

УДК 539.3

**О КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗГИБА БАЛКИ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ  
НА УПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ С УЧЁТОМ СИЛ  
В ЕЁ СРЕДИННОЙ ЛИНИИ**

**Амирбекян А.Н., Мкртчян М.С., Мхитарян С.М., Шемян Л.А.**

**Ключевые слова:** изгиб, балка, упругость, полуплоскость, осевые силы, давление балки.  
**Key words:** bending, beam, elasticity, half-plane, the axial force, the pressure beams.

**Ամիրբեկյան Ա.Ն., Մկրտչյան Մ.Ս., Մխիթարյան Ս.Մ., Շեմյան Լ.Ա.  
Առանցքային ուժերի հաշվառմամբ առաձգական կիսահարթության վրա  
վերջավոր երկարության հեծանի ծռման մասին**

Մ.Պ. Տիմոշենկոյի ծռման մոդելի շրջանակներում դիտարկվում է կիսահարթության տեսքով առաձգական հիմքի վրա դրված վերջավոր երկարության հեծանի ծռման կոնտակտային խնդիրը, որտեղ ուղղաձիգ ուժերից բացի առանցքային սեղմող կամ ձգող ուժերը նույնպես ազդում են հեծանի ձկվածքի վրա:

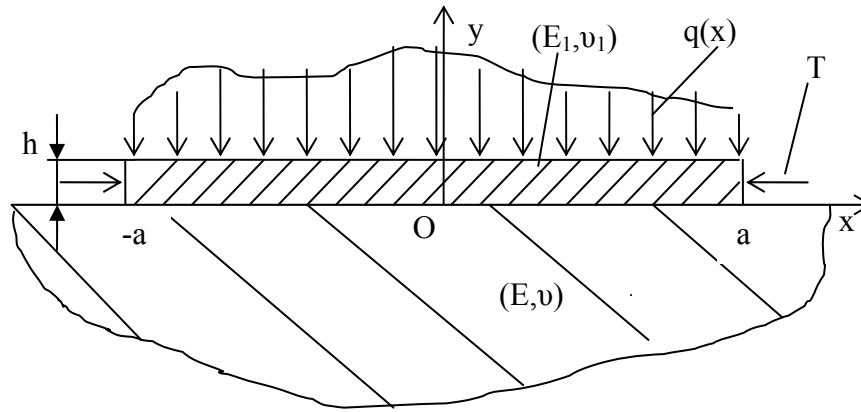
**Amirbekyan A.N., Mkrtychyan M.S., Mkhitaryan S.M., Shekyan L.A.  
About contact problem of bending of a beam of finite length on an elastic half-plane  
in view of forces in its mid-line**

The contact problem of the bending of the beam of finite length on elastic foundation in the form of a half-plane being in the plane strain conditions, the generalized model of the bend in the framework of S.P. Timoshenko, where in addition to vertical forces axial compressive or tensile forces also affect the deflection of the beam is considered.

Рассматривается контактная задача об изгибе балки конечной длины на упругом основании в виде полуплоскости, находящейся в условиях плоской деформации, по обобщенной модели изгиба в рамках теории С.П. Тимошенко, где помимо вертикальных сил, осевые сжимающие или растягивающие силы также влияют на прогибы балки.

Обширные классы задач об изгибе тонкостенных элементов в виде балок, плит, оболочек на деформируемых основаниях различных форм и в рамках различных физических допущений, тесно примыкающие к классическим контактным задачам теории упругости, ввиду их актуальности и практической значимости стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на монографии [1-3], на обзорную статью [4] и на коллективную монографию [5]. Отметим также работы [6,7]. В работе [8] по классической теории изгиба балок методом сингулярных интегральных уравнений (СИУ) в сочетании с известным численно-аналитическим методом решения СИУ [9-11] построено решение задачи об изгибе балки конечной длины на деформируемом основании в виде упругой полуплоскости. В [12] эта задача вкратце рассмотрена в рамках теории изгиба балок и пластин С.П. Тимошенко [13,14], где вместе с влиянием вертикальных сил учитывается также влияние осевых сжимающих или растягивающих сил на прогибы балки. В настоящей работе продолжается исследование этой задачи, где подробнее излагается постановка задачи, приводятся результаты численного анализа основных механических характеристик задачи, выясняется эффект влияния на них сил на срединной линии балки.

1. Пусть балка, отнесённая к правой прямоугольной системе координат  $Oxy$ , длины  $2a$ , высоты  $h$ , модуля упругости  $E_1$  и коэффициента Пуассона  $\nu_1$  под действием распределённых вертикальных сил интенсивности  $q(x)$  изгибается и вдавливается в нижнюю упругую полуплоскость с модулем упругости  $E$  и коэффициентом Пуассона  $\nu$  (фиг. 1).



Фиг. 1

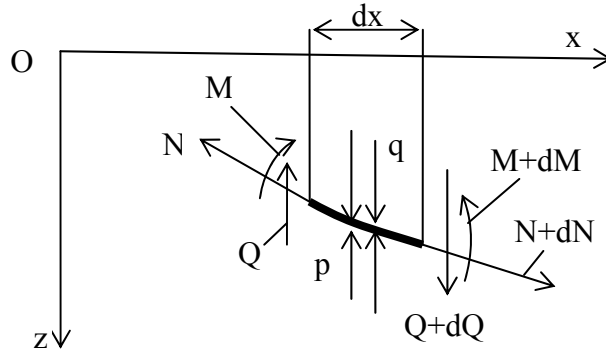
Предполагается, что упругая полуплоскость находится в условиях плоской деформации. Относительно балки предполагается, что она на упругом основании в виде полуплоскости  $y < 0$  изгибается по модели С.П.Тимошенко [13,14], где помимо влияния распределённых вертикальных поперечных сил интенсивности  $q(x)$  на прогибы балки осевые сжимающие силы постоянной величины  $T$ , действующие вдоль срединной линии балки, также влияют на эти прогибы. При этих физических допущениях требуется определить распределение нормальных контактных напряжений  $\sigma_y|_{y=0} = -p(x)$  ( $-a < x < a$ ) на отрезке контакта балки с упругой полуплоскостью, а также изгибающие моменты  $M(x)$  и поперечные силы  $Q(x)$  в сечениях балки по изложенной выше модели.

2. Рассмотрим равновесие малого элемента, находящегося под действием распределённых поперечных сил  $q$ ,  $p$  и некоторой осевой растягивающей силы  $N$  балки, вырезанного из неё двумя параллельными плоскостями, перпендикулярные к оси  $Ox$  и отделены друг от друга на расстояние  $dx$  (фиг. 2).

Уравнения равновесия этого малого элемента балки, с учётом возникающих вследствие изгиба балки проекции сил  $N$  и  $N + dN$  на оси  $Oz$ , будут:

$$\begin{aligned}
 -N + (N + dN) &= 0, \\
 -N \frac{dw}{dx} - Q + (q - p)dx + (Q + dQ) + (N + dN) \left( \frac{dw}{dx} + \frac{d^2w}{dx^2} dx \right) &= 0, \\
 -M - (q - p)dx \cdot \frac{dx}{2} + M + dM - (Q + dQ)dx &= 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $w$  – перемещения точек балки в направлении оси  $Oz$ . Отсюда, пренебрегая малыми величинами выше первого порядка малости, получим



Фиг. 2

$$N = \text{const}, \quad q - p + \frac{dQ}{dx} + N \frac{d^2 w}{dx^2} = 0, \quad \frac{dM}{dx} - Q = 0. \quad (2)$$

Далее, учитывая соотношение  $M = -D d^2 w / dx^2$  [14], где

$D = E_1 h^3 / 12 (1 - \nu_1^2)$  – жёсткость балки на изгиб,  $E_1$  – её модуль упругости,  $\nu_1$  – коэффициент Пуассона,  $h$  – высота балки, получим

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - N \frac{d^2 w}{dx^2} = q(x) - p(x), \quad (3)$$

которое является дифференциальным уравнением изгиба балки при совместном воздействии поперечных сил и растягивающих сил в её срединной линии. Оно совпадает с формулой 217 на стр. 422 в [14], когда пластинка находится в условиях плоской деформации с базовой плоскостью  $Oxz$ .

В случае, когда балка сжимается осевой силой  $T$  (фиг. 1), то принимая в (3)  $T = -N$  и  $v_1 = w$ , будем иметь

$$D \frac{d^4 v_1}{dx^4} + T \frac{d^2 v_1}{dx^2} = p(x) - q(x), \quad (4)$$

где  $v_1 = v_1(x)$  – смещения точек балки в направлении оси  $Oy$  (фиг.1).

Дифференциальное уравнение изгиба балки (4) рассматривается при следующих граничных условиях:

$$M(x) \Big|_{x=\pm a} = D \frac{d^2 v_1}{dx^2} \Big|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v_1}{dx^2} \Big|_{x=\pm a} = 0, \quad (5)$$

указывающих на то, что в конечных точках балки  $x = \pm a$  отсутствуют изгибающие моменты  $M(x)$ . При этом условия равновесия балки имеют вид

$$\int_{-a}^a [p(x) - q(x)] dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a p(x) dx = \int_{-a}^a q(x) dx = P, \quad (6a)$$

$$\int_{-a}^a x[p(x) - q(x)] dx = 0 \Rightarrow \int_{-a}^a xp(x) dx = \int_{-a}^a xq(x) dx = M. \quad (6b)$$

3. Приступим к решению дифференциального уравнения (4) при условиях (5). С этой целью сначала обе части уравнения (4) разделим на  $D$  и введём обозначения

$$k = \sqrt{T/D}, \quad g(x) = [p(x) - q(x)]/D, \quad y = d^2 v_1 / dx^2. \quad (7)$$

В результате, придём к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = g(x), \quad (-a < x < a). \quad (8)$$

Общее решение дифференциального уравнения (8) с учётом обозначения из (7) представляется формулой

$$y \equiv \frac{d^2 v_1}{dx^2} = C_1 \cos kx + C_2 \sin kx + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds, \quad (-a < x < a). \quad (9)$$

Отсюда

$$\frac{d^3 v_1}{dx^3} = -C_1 k \sin kx + C_2 k \cos kx + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) g(s) ds. \quad (10)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определим из (9) при помощи граничных условий (5). В результате, относительно них придём к простой системе уравнений

$$\begin{cases} C_1 \cos ka + C_2 \sin ka = -\frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin[k(a-s)] g(s) ds, \\ C_1 \cos ka - C_2 \sin ka = -\frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin[k(a+s)] g(s) ds, \end{cases}$$

решение которой имеет вид:

$$C_1 = -\frac{\operatorname{tg}(ka)}{2k} \int_{-a}^a \cos(ks) g(s) ds, \quad C_2 = \frac{\operatorname{ctg}(ka)}{2k} \int_{-a}^a \sin(ks) g(s) ds. \quad (11)$$

Теперь выражения  $C_1$  и  $C_2$  из (11) подставим в (9) и (10). Получим

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{dx^2} &= \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a (\cos^2 ka \sin kx \sin ks - \sin^2 ka \cos kx \cos ks) g(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds. \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3 v_1}{dx^3} &= \frac{1}{2} \int_{-a}^a [\operatorname{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks) + \operatorname{ctg}(ka) \cos(kx) \sin(ks)] g(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) g(s) ds. \end{aligned} \quad (13)$$

Далее, исходя из (2) и (13), проверим условия

$$Q(x) \Big|_{x=\pm a} = \frac{dM}{dx} \Big|_{x=\pm a} = D \frac{d^3 v_1}{dx^3} \Big|_{x=\pm a} = 0 \Rightarrow \frac{d^3 v_1}{dx^3} \Big|_{x=\pm a} = 0,$$

указывающие на отсутствие поперечных сил  $Q(x)$  в концевых точках балки. Будем иметь

$$\left. \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right|_{x=\pm a} = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \left( \frac{\sin ks}{\sin ka} \pm \frac{\cos ks}{\cos ka} \right) g(s) ds = \pm \frac{1}{\sin 2ka} \int_{-a}^a \sin[k(a \pm s)] g(s) ds. \quad (14)$$

Отсюда видно, что записанные условия отсутствия поперечных сил  $Q(\pm a)$ , вообще, не удовлетворяются.

Но если в (14) совершить предельный переход  $k \rightarrow 0$  и принять во внимание условия равновесия балки (6а)-(6б) и обозначение  $g(x)$  из (7), то

$$\left. \frac{d^3 v_1}{dx^3} \right|_{x=\pm a} = \pm \int_{-a}^a \frac{(a \pm s)}{2a} g(s) ds = \pm \frac{1}{2} \int_{-a}^a g(s) ds + \frac{1}{2a} \int_{-a}^a s g(s) ds = 0,$$

и, следовательно, в классической теории изгиба балки условия  $Q(\pm a) = 0$ , как следствия условий равновесия балки, сразу выполняются.

Если же постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определить из условий  $Q(\pm a) = 0$ , то при помощи (10) придём к системе уравнений

$$\begin{cases} -C_1 k \sin ka + C_2 k \cos ka = -\frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos(k(a-s)) g(s) ds, \\ C_1 k \sin ka + C_2 k \cos ka = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos(k(a+s)) g(s) ds, \end{cases}$$

откуда

$$C_1 = \frac{\operatorname{ctg}(ka)}{2k} \int_{-a}^a \cos(ks) g(s) ds, \quad C_2 = -\frac{\operatorname{tg}(ka)}{2k} \int_{-a}^a \sin(ks) g(s) ds. \quad (15)$$

Подставляя выражения  $C_1$  и  $C_2$  из (15) в (9), будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{d^2 v_1}{dx^2} &= \frac{1}{2k} \int_{-a}^a [\operatorname{ctg}(ka) \cos(kx) \cos(ks) - \operatorname{tg}(ka) \sin(kx) \sin(ks)] g(s) ds + \\ &+ \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) g(s) ds. \end{aligned} \quad (16)$$

Из (16) легко вытекает, что

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a \cos(k(a \pm s)) g(s) ds. \quad (17)$$

Формулу (17) преобразуем следующим образом:

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a \{\cos[k(a \pm s)] - 1\} g(s) ds + \frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a g(s) ds$$

и используем условие равновесия балки (6а) в виде

$$\int_{-a}^a g(s) ds = 0.$$

В результате,

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = -\frac{1}{k \sin 2ka} \int_{-a}^a \{1 - \cos[k(a \pm s)]\} g(s) ds. \quad (18)$$

Откуда при предельном переходе  $k \rightarrow 0$  получим

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=\pm a} = -\frac{1}{2a} \int_{-a}^a \frac{(a \pm s)^2}{2} g(s) ds = -\frac{1}{4a} \int_{-a}^a s^2 g(s) ds, \quad (19)$$

Итак, при  $k \rightarrow 0$

$$\left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=a} = \left. \frac{d^2 v_1}{dx^2} \right|_{x=-a} = -\frac{1}{4a} \int_{-a}^a s^2 g(s) ds,$$

т.е. условия  $M(\pm a) = 0$  классической теории изгиба балки не выполняются. Поэтому дифференциальное уравнение (4) изгиба балки по теории С.П. Тимошенко будем рассматривать только при условиях (5), так как решение этой граничной задачи при предельном переходе  $k \rightarrow 0$  переходит в известное решение классической теории изгиба балки и, следовательно, при достаточно малых  $k$ , при которых и здесь будет, в основном, рассматриваться контактная задача об изгибе балки на упругом основании, величины  $Q(\pm a)$  сколь угодно малы. При более совершенных, но довольно непростых, моделях изгиба балки [15], можно достичь точного удовлетворения обеих пар граничных условий  $M(\pm a) = 0$ ;  $Q(\pm a) = 0$ .

Отметим, что в случае осевых растягивающих сил  $T$  во всех предыдущих формулах следует параметр  $k$  формально заменить на  $ik$ , где  $i$  – мнимая единица, постоянную  $C_1$  оставить без изменения, постоянную  $C_2$  заменить на постоянную  $-iC_2$  и везде от тригонометрических функций перейти к соответствующим гиперболическим функциям.

Далее, уравнение (9) ещё раз проинтегрируя, получим

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} = C_1 \frac{\sin kx}{k} + C_2 \frac{1 - \cos kx}{k} + \\ + \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \{1 - \cos[k(x-s)]\} \text{sign}(x-s) g(s) ds + C, \quad (-a \leq x \leq a). \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь выражения постоянных  $C_1$  и  $C_2$  из (11) подставляем в (20). В результате,

$$\frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a H(x,s) g(s) ds + C, \quad (-a \leq x \leq a) \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} H(x,s) = \{1 - \cos[k(x-s)]\} \text{sign}(x-s) + \\ + \text{ctg}(ka) [1 - \cos(kx)] \sin(ks) - \text{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks). \end{aligned}$$

4. Для вывода определяющих уравнений описанной контактной задачи сначала запишем выражение вертикальных перемещений  $v(x)$  граничных точек нижней упругой полуплоскости [16]

$$v(x) = -\frac{2(1-v^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \ln \frac{1}{|x-s|} p(s) ds + C_*, \quad (-\infty < x < \infty). \quad (22)$$

Далее запишем условие контакта балки и упругого основания  $v(x) = v_1(x)$ ,  $(-a < x < a)$ , которое после дифференцирования принимает вид

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv_1}{dx}, \quad (-a < x < a). \quad (23)$$

Теперь в условие контакта (23) подставим выражения (21) и (22). Будем иметь следующее сингулярное интегральное уравнение (СИУ):

$$\frac{2(1-v^2)}{\pi E} \int_{-a}^a \frac{p(s) ds}{s-x} = -\frac{1}{2k^2 D} \int_{-a}^a H(x,s) [p(s) - q(s)] ds + C, \quad (-a < x < a) \quad (24)$$

решение которого должно удовлетворять условиям равновесия балки (6a)-(6b).

В СИУ (24) введём безразмерные координаты и величины

$$\xi = x/a, \quad \eta = s/a, \quad \varphi(\xi) = p(a\xi)/E, \quad h(\xi) = q(a\xi)/E \quad (-1 < \xi, \eta < 1)$$

$$\chi = ka, \quad \lambda = \frac{3\pi E}{(1-v^2)\chi^2 E_1} \left(\frac{a}{h}\right)^3, \quad \gamma = \frac{C}{2(1-v^2)}. \quad (25)$$

Тогда в безразмерных величинах СИУ (24) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{\lambda}{\pi} \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi) + \gamma, \quad (26)$$

где введены обозначения

$$K(\xi, \eta) = \{1 - \cos[\chi(\xi - \eta)]\} \operatorname{sign}(\xi - \eta) + \operatorname{ctg}\chi [1 - \cos(\chi\xi)] \sin(\chi\eta) - \operatorname{tg}\chi \sin(\chi\xi) \cos(\chi\eta), \quad f(\xi) = \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) h(\eta) d\eta. \quad (27)$$

В безразмерных величинах запишем также условия равновесия балки (6a)-(6b):

$$\int_{-1}^1 \varphi(\xi) d\xi = P_0, \quad \left(P_0 = \frac{P}{aE}\right), \quad \int_{-1}^1 \xi \varphi(\xi) d\xi = M_0, \quad \left(M_0 = \frac{M}{a^2 E}\right). \quad (28)$$

Таким образом, определяющее СИУ (26) должно рассматриваться при условиях (28).

$$\text{Отметим, что полагая } \lambda = \mu/\chi^2, \quad \mu = \left[3\pi E/(1-v^2) E_1\right] \cdot (a/h)^3,$$

определяющее СИУ (26) можем записать в форме

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\eta) d\eta}{\eta - \xi} + \frac{\mu}{\pi\chi^2} \int_{-1}^1 K(\xi, \eta) \varphi(\eta) d\eta = \frac{\mu}{\pi\chi^2} f(\xi) + \gamma$$

откуда посредством предельного перехода  $\chi \rightarrow 0$  получается определяющее СИУ поставленной задачи по обычной классической теории изгиба балки [12].

Далее СИУ (26) при условиях (29) известным численно-аналитическим методом [9-11] сведём к системе линейных алгебраических уравнений. С этой целью положим

$$\varphi(\xi) = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \quad (-1 < \xi < 1), \quad (29)$$

где функция  $\Phi(\xi)$  определена на отрезке  $[-1 < \xi < 1]$  и принадлежит гёльдеровскому классу функций. В результате, придём к следующей системе уравнений:

$$\sum_{m=1}^N \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \lambda K(\xi_r, \eta_m) \right] \Phi(\eta_m) = \frac{\lambda}{\pi} f(\xi_r) + \gamma \quad (r = 1, 2, \dots, N-1), \quad (30)$$

$$\frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \Phi(\eta_m) = P_0, \quad \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N \eta_m \Phi(\eta_m) = M_0.$$

Система (30) состоит из  $(N+1)$  линейных алгебраических уравнений относительно  $(N+1)$  неизвестных  $\Phi(\eta_1), \Phi(\eta_2), \dots, \Phi(\eta_N), \gamma$ , где

$$\eta_m = \cos\left(\frac{2m-1}{2N}\pi\right) \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad \xi_r = \cos\left(\frac{\pi r}{N}\right) \quad (r = 1, 2, \dots, N-1)$$

– известные чебышевские узлы.

Чтобы преобразовать систему (30) к каноническому виду, положим

$$X_m = \begin{cases} \Phi(\eta_m) & (m = 1, 2, \dots, N); \\ \gamma & (m = N+1); \end{cases} \quad (31)$$

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \lambda K(\xi_r, \eta_m) \right] & (r = 1, 2, \dots, N-1; m = 1, 2, \dots, N); \\ -1 & (r = 1, 2, \dots, N-1; m = N+1); \\ \pi/N & (r = N; m = 1, 2, \dots, N); \\ 0 & (r = N; m = N+1); \\ \pi \eta_m / N & (r = N+1; m = 1, 2, \dots, N); \\ 0 & (r = N+1; m = N+1); \end{cases} \quad (32)$$

$$a_r = \begin{cases} \frac{\lambda}{\pi} f(\xi_r) & (r = 1, 2, \dots, N-1); \\ P_0, & (r = N); \\ M_0, & (r = N+1). \end{cases} \quad (33)$$

Тогда система (30) запишется в виде

$$\sum_{m=1}^{N+1} K_{rm} X_m = a_r \quad (r = 1, 2, \dots, N+1). \quad (34)$$

Теперь решение системы (34) при правой части в виде вектора-столбца



$$a_r^{(1)} = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \lambda f(\xi_r), & (r = 1, 2, \dots, N-1) \\ 0, & (r = N, N+1) \end{cases}$$

обозначим через  $X_m^{(1)}$  ( $m = 1, 2, \dots, N+1$ ), решение системы (34) при правой части в виде вектора-столбца

$$a_r^{(2)} = \begin{cases} 0, & (r = 1, 2, \dots, N-1) \\ 1, & (r = N) \\ 0, & (r = N+1) \end{cases}$$

обозначим через  $X_m^{(2)}$  ( $m = 1, 2, \dots, N+1$ ), а при правой части – опять в виде вектора-столбца

$$a_r^{(3)} = \begin{cases} 0, & (r = 1, 2, \dots, N) \\ 1, & (r = N+1) \end{cases}$$

обозначим через  $X_m^{(3)}$  ( $m = 1, 2, \dots, N+1$ ). Тогда решение системы (34) можем представить в форме

$$X_m = X_m^{(1)} + P_0 X_m^{(2)} + M_0 X_m^{(3)}, \quad (m = 1, 2, \dots, N+1). \quad (35)$$

Обратимся к вычислению силовых факторов – изгибающих моментов  $M(x)$  и поперечных сил  $Q(x)$  в сечениях балки  $x$  ( $-a < x < a$ ). С этой целью дифференциальное уравнение изгиба балки (4) запишем в виде

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + k^2 M = p(x) - q(x), \quad (-a < x < a); \quad M(x) = D \frac{d^2 v_1}{dx^2}. \quad (36)$$

Решение уравнения (36) при граничных условиях  $M(\pm a) = 0$ , согласно (12) имеет вид

$$M(x) = \int_{-a}^a \frac{\cos^2(ka) \sin(kx) \sin(ks) - \sin^2(ka) \cos(kx) \cos(ks)}{k \sin(2ka)} [p(s) - q(s)] ds + \\ + \frac{1}{2k} \int_{-a}^a \sin(k|x-s|) [p(s) - q(s)] ds \quad (-a \leq x \leq a). \quad (37)$$

Обратимся к поперечным силам  $Q(x)$ . Из (2) и (37) находим

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a [\operatorname{tg}(ka) \sin(kx) \cos(ks) + \operatorname{ctg}(ka) \cos(kx) \sin(ks)] [p(s) - q(s)] ds + \\ + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[k(x-s)] \operatorname{sign}(x-s) [p(s) - q(s)] ds, \quad (-a \leq x \leq a). \quad (38)$$

Далее в (37) и (38) совершим предельный переход  $k \rightarrow 0$ . Последовательно будем иметь

$$M(x) = \int_{-a}^a \frac{xs - a^2}{2a} [p(s) - q(s)] ds + \frac{1}{2} \int_{-a}^a |x-s| [p(s) - q(s)] ds =$$

$$= \frac{x}{2a} \int_{-a}^a s[p(s) - q(s)]ds - \frac{a}{2} \int_{-a}^a [p(s) - q(s)]ds + \frac{1}{2} \int_{-a}^a |x - s|[p(s) - q(s)]ds.$$

$$Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \frac{s}{a}[p(s) - q(s)]ds + \frac{1}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x - s)[p(s) - q(s)]ds.$$

Учитывая условия равновесия (6a)-(6b) балки, получим

$$M(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a |x - s|[p(s) - q(s)]ds, \quad Q(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \text{sign}(x - s)[p(s) - q(s)]ds,$$

что совпадают с классическим случаем [12].

Далее введём безразмерные величины, полагая

$$\bar{M}(\xi) = \frac{M(a\xi)}{a^2 E}, \quad \bar{Q}(\xi) = \frac{Q(a\xi)}{aE}.$$

Тогда из (37) и (38), с учётом (25) получим

$$\bar{M}(\xi) = \frac{1}{\chi \sin 2\chi} \int_{-1}^1 [\cos^2 \chi \sin(\chi\xi) \sin(\chi\eta) - \sin^2 \chi \cos(\chi\xi) \cos(\chi\eta)] [\varphi(\eta) - h(\eta)] d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2\chi} \int_{-a}^a \sin(\chi|\xi - \eta|) [\varphi(\eta) - h(\eta)] d\eta; \quad (39)$$

$$\bar{Q}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 [\text{tg}\chi \sin(\chi\xi) \cos(\chi\eta) + \text{ctg}\chi \cos(\chi\xi) \sin(\chi\eta)] [\varphi(\eta) - h(\eta)] d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{-a}^a \cos[\chi(\xi - \eta)] \text{sign}(\xi - \eta) [\varphi(\eta) - h(\eta)] d\eta. \quad (40)$$

Приступим к расчёту нужных функций и величин. Рассматривая функцию  $f(\xi)$  из (27), будем иметь

$$f(\xi_r) = \frac{\pi}{N} \sum_{m=1}^N K(\xi_r, \eta_m) \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m), \quad (r = 1, 2, \dots, N - 1). \quad (41)$$

Далее приняв во внимание формулу (29), вычислим функцию  $\bar{M}(\xi)$  из (39):

$$\bar{M}(\xi_r) = \frac{\pi}{N\chi \sin 2\chi} \sum_{m=1}^N [\cos^2 \chi \sin(\chi\xi_r) \sin(\chi\eta_m) - \sin^2 \chi \cos(\chi\xi_r) \cos(\chi\eta_m)] \times$$

$$\times [X_m - \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m)] + \frac{\pi}{2\chi N} \sum_{m=1}^N \sin(\chi|\xi_r - \eta_m|) [X_m - \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m)], \quad (42)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Опять при помощи формулы (29) из (40)

$$\bar{Q}(\xi_r) = \frac{\pi}{2N} \sum_{m=1}^N [\text{tg}\chi \sin(\chi\xi_r) \cos(\chi\eta_m) + \text{ctg}\chi \cos(\chi\xi_r) \sin(\chi\eta_m)] [X_m - \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m)] +$$

$$+ \frac{\pi}{2N} \sum_{m=1}^N \cos[\chi(\xi_r - \eta_m)] \text{sign}(\xi_r - \eta_m) [X_m - \sqrt{1 - \eta_m^2} h(\eta_m)], \quad (43)$$

$$(r = 1, 2, \dots, N - 1).$$

Пусть теперь в определяющем СИУ (26)-(27) функция  $h(\xi)$  – чётная, т.е.  $h(-\xi) = h(\xi)$  ( $-1 < \xi < 1$ ). Тогда по (27)  $f(-\xi) = -f(\xi)$ , т.е. функция  $f(\xi)$  – нечётная. С другой стороны, если  $h(\xi)$  – чётная функция, то из (20)

$$\left. \frac{dv_1}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a [1 - \cos(ks)] \text{sign}(s) g(s) ds + C = C.$$

Вследствие симметрии  $C = 0$ . Тогда

$$v_2(x) = \frac{dv_1}{dx} = \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \{1 - \cos[k(x-s)]\} \text{sign}(x-s) g(s) ds + \\ + \frac{1}{2k^2} \int_{-a}^a \{ \text{ctg}ka(1 - \cos kx) \sin ks - \text{tg}ka \sin kx \cos ks \} g(s) ds \quad (-a \leq x \leq a)$$

– нечётная функция от  $x$ .

Отсюда видно, что постоянная  $C$  и, следовательно,  $\gamma$ , характеризуют угол поворота сечения  $x = 0$  балки и в случае симметрии относительно сечения  $x = 0$  эта постоянная равна нулю.

Итак, при чётной функции  $q(x)$  или  $h(\xi)$  можно положить  $C = 0$  или  $\gamma = 0$ , а решение  $\varphi(\xi)$  определяющего СИУ (26), и, следовательно, функция  $\Phi(\xi)$  из (29) – чётная функция. В этом случае моментное условие равновесия балки удовлетворяется тождественно, и, поэтому, последнее уравнение в (30) отпадает. В результате, определяющая система линейных уравнений (30) принимает вид

$$\sum_{m=1}^N K_{rm} X_m = a_r \quad (r = 1, 2, \dots, N) \quad (44)$$

где

$$K_{rm} = \begin{cases} \frac{1}{N} \left[ \frac{1}{\eta_m - \xi_r} + \lambda K(\xi_r, \eta_m) \right], & (m = 1, 2, \dots, N; \quad r = 1, 2, \dots, N-1) \\ \frac{\pi}{N}, & (r = N; \quad m = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (45)$$

$$a_r = \begin{cases} \frac{\lambda}{\pi} f(\xi_r), & (r = 1, 2, \dots, N-1); \\ \frac{\pi}{N}, & (r = N). \end{cases} \quad (46)$$

Теперь решение системы (44) при правой части в виде вектора-столбца

$$a_r^{(1)} = \frac{1}{\pi} \begin{cases} \lambda f(\xi_r), & (r = 1, 2, \dots, N-1) \\ 0, & (r = N) \end{cases}$$

обозначим через  $X_m^{(1)}$  ( $m = 1, 2, \dots, N + 1$ ), а решение системы (44) при правой части в виде вектора-столбца

$$a_r^{(2)} = \begin{cases} 0, & (r = 1, 2, \dots, N - 1); \\ 1, & (r = N) \end{cases}$$

обозначим через  $X_m^{(2)}$  ( $m = 1, 2, \dots, N$ ).

Тогда решение системы (44) представляется в форме

$$X_m = X_m^{(1)} + P_0 X_m^{(2)}. \quad (47)$$

Все остальные обозначения – прежние.

По интерполяционному многочлену Лагранжа по чебышевским узлам вычислим также значение расчётной функции  $\Phi(\xi)$  в точке  $\xi = 1$

$$\Phi(1) = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} \Phi(\eta_m) \operatorname{ctg} \left( \frac{2m-1}{4N} \pi \right). \quad (48)$$

Далее введём в рассмотрение коэффициент концентрации напряжений в концевой точке балки  $\xi = 1$

$$K = \lim_{\xi \rightarrow 1-0} \left[ \sqrt{1-\xi} \varphi(\xi) \right] = \frac{\Phi(1)}{\sqrt{2}}. \quad (49)$$

При помощи (48) из (49) будем иметь

$$K = \frac{1}{N\sqrt{2}} \sum_{m=1}^N (-1)^{m+1} X_m \operatorname{ctg} \left( \frac{2m-1}{4N} \pi \right). \quad (50)$$

5. Численная реализация поставленной контактной задачи осуществлена при равномерно распределённых поперечных силах  $q(x) = q = \text{const}$ , вследствие чего по (25)  $h(\xi) = q/E = q_0 = \text{const}$ . Для числовых расчётов было принято  $q_0 = 0.001$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $E/E_1 = 0.1$ ,  $a/h = 10$ .

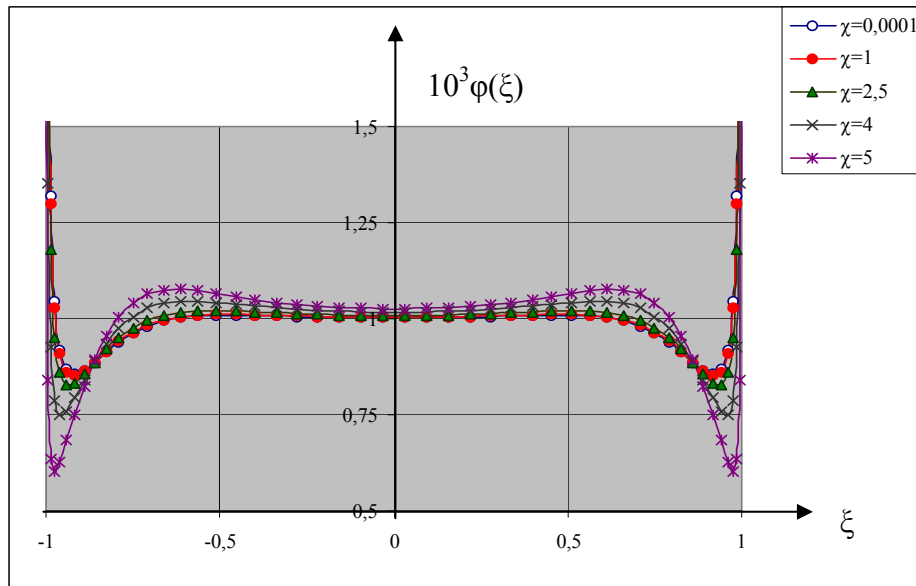
Чтобы выяснить эффекты влияния осевых сил  $T$  на характерные величины рассматриваемой задачи, в выражении параметра  $\lambda = \mu/\chi^2$  параметр  $\chi$  будем считать переменным, а в соответствии с указанными значениями других параметров  $\mu \approx 1035$ . Тогда после решения определяющей системы линейных уравнений (44)-(46) с решением в виде (47), основными расчётными формулами будут формула (29) для нахождения безразмерного давления балки на упругое основание, формулы (42)-(43) для нахождения безразмерных изгибающих моментов и перерезывающих сил в сечениях балки, и формула (50) для определения безразмерного коэффициента концентрации (КК) давления на правом конце балки. При этом, формулу (29) можно представить в форме

$$\varphi(\eta_m) = X_m / \sqrt{1-\eta_m^2}, \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (51)$$

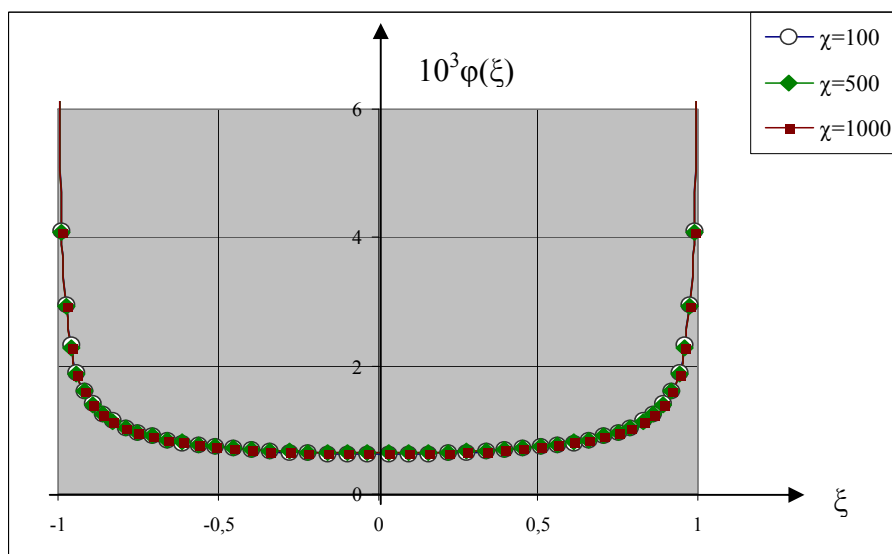
Вычисленные по формуле (51) значения затем умножены на  $10^3$  и по этим значениям построены графики изменения величины  $10^3 \varphi(\xi)$  для различных значений параметра  $\chi$  (фиг. 3).

Как видно из этих графиков, контактные давления в центральной части балки больше, чем в окрестностях концов балки на некотором расстоянии от них. При этом, в центральной части они с возрастанием параметра  $\chi$  возрастают, а поближе к

концам, наоборот, уменьшаются, и при приближении к концам, как обычно, бесконечно возрастают. Это явление может быть объяснено тем, что из-за способности балки деформироваться вместе с основанием, её центральная часть вдавливается в основание глубже, чем её концевые части, склонные к отрыву от основания.



Фиг. 3



Фиг. 4

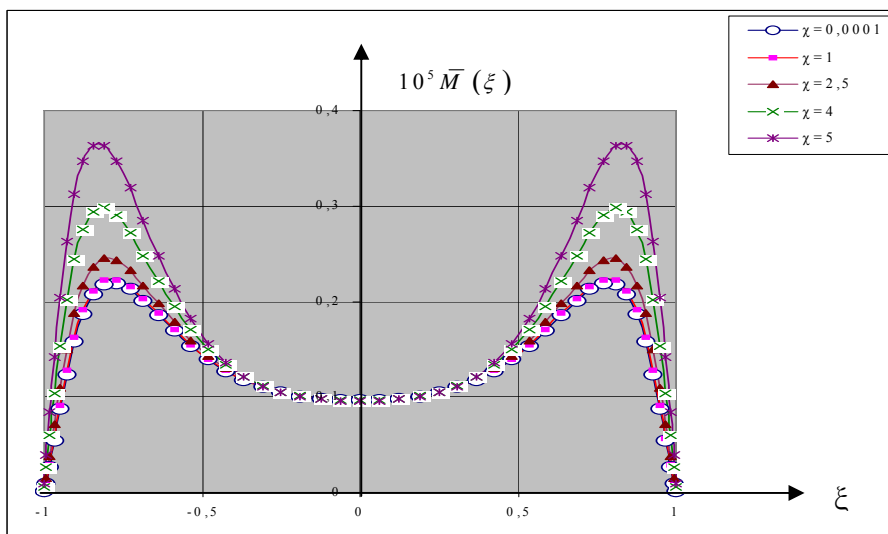
Минимальные значения  $10^3 \varphi(\xi)$  при различных  $\chi$  достигаются почти в последовательных узловых точках, в среднем, в точках  $\xi \approx 0,93964$ . Их значения в этой точке приведены в табл. 1. С возрастанием  $\chi$   $\min 10^3 \varphi(\xi)$  уменьшается.

Таблица 1

$\xi$	$\chi=0.0001$	$\chi=1$	$\chi=2.5$	$\chi=4$	$\chi=5$
0,93964	0,855744	0,852174	0,828897	0,749554	0,627734

С другой стороны, при  $\lambda \rightarrow 0$ , что эквивалентно формальному безграничному увеличению  $\chi$ , графики на фиг.3, сливаясь между собой в своих центральных частях, спускаются к оси абсцисс и в предельном случае  $\lambda = 0$  переходят в известную параболу (фиг.4), соответствующую решению Садовского для классической контактной задачи о вдавливании штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость [16].

На фиг.5 и 6 приведены, соответственно, графики величин  $10^5 \overline{M}(\xi)$  и  $10^4 \overline{Q}(\xi)$ , вычисленные по формулам (42) и (43).



Фиг. 5

Максимальные значения  $10^5 \overline{M}(\xi)$  на фиг. 5 для различных  $\chi$  достигаются почти в последовательных узловых точках, в среднем, в точке  $\xi \approx 0.80795$ . Эти значения  $\max 10^5 \overline{M}(\xi)$  приведены в табл. 2.

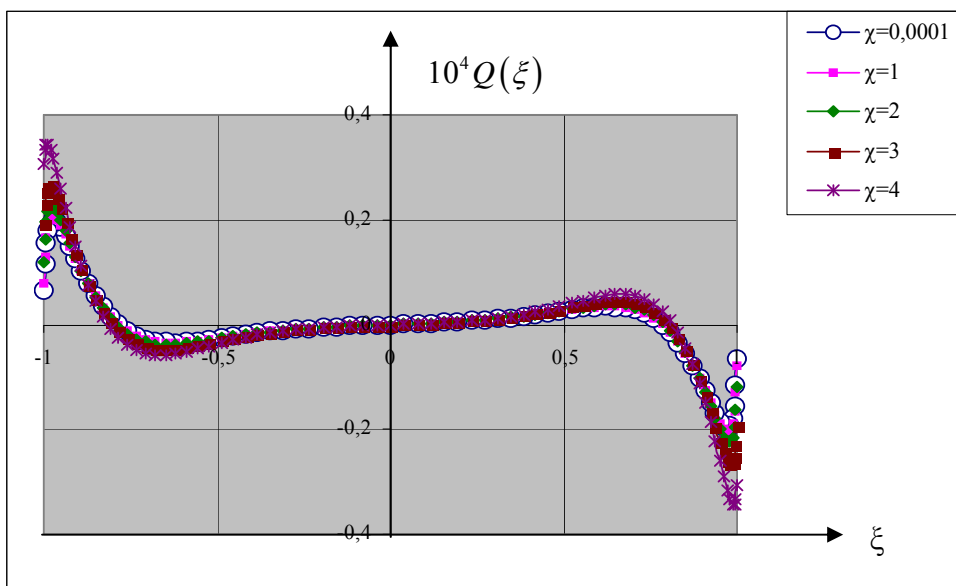
Таблица 2

$\xi$	$\chi=0.0001$	$\chi=1$	$\chi=2.5$	$\chi=4$	$\chi=5$
0,80795	0,219316	0,222949	0,24537	0,29854	0,363425

Значения  $10^4 \overline{Q}(\xi)$ , вычисленные при помощи интерполяционного многочлена Лежандра по узлам  $\xi_r$ , при различных  $\chi$  приведены в табл. 3. Данные этой таблицы показывают, что по мере уменьшения  $\chi$ , безразмерные перерезывающие силы приближаются к нулю.

Таблица 3

$\xi$	$\chi=0.0001$	$\chi=1$	$\chi=2$	$\chi=3$	$\chi=4$
1	-0.03704	-0.05044	-0.09242	-0.16884	-0.29186



Фиг. 6

Наконец, в табл. 4 приведены вычисленные по формуле (48) и умноженные на  $10^3$  значения КК для нескольких значений  $\chi$ .

Таблица 4

$\chi$	0.01	0.05	0.1	0.3	0.5	0.8
$10^3 K$	0.131249	0.131243	0.131223	0.131018	0.130607	0.129599
$\chi$	1	1.5	2	3	4	5
$10^3 K$	0.128662	0.12536	0.120608	0.106125	0.0832359	0.0481198

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: Физматгиз, 1960. 491с.
2. Корнев Б.Г. Вопросы расчёта балок и плит на упругом основании. М.: Госстройиздат, 1954. 232с.
3. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек. М.: Машиностроение, 1980. 415с.
4. Попов Г.Я., Толкачев В.М. Проблема контакта жёстких тел с тонкостенными элементами. // Изв. АН СССР. МТТ. 1980. №4. С.192-206.
5. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493с.
6. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Гулян К.Г. Изгиб балки на границе упругой полуплоскости. // Труды международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посвящ. 95-летию академика НАН Армении Н.Х. Арутюняна. Цахкадзор, Армения. 25-28 сентября 2007. С.32-36.
7. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О задаче изгиба полубесконечной балки на границе упругой полуплоскости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №4. С.5-19.
8. Амирбекян А.Н. Решение интегрального уравнения изгиба балки на упругом основании // В сб. трудов международной школы-конференции молодых учёных

- «Механика», 28 сентября – Октября, Агавнадзор, Армения. Ереван, 2009. С.135-139.
9. Erdogan F., Gupta G. D., Gook T. S. The numerical solutions of singular integral equations. Methods of Analysis and Solution of Crack Problems. // Intern.Publ., Leyden, 1973. P. 368-425.
  10. Theocaris P. S., Ioakimidis N. I. Numerical Integration Methods for the Solution of Singular Integral Equations. // Quart. Appl.Math. Vol. 35. №1. 1997. P.173-185.
  11. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацьшин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
  12. Амирбекян А.Н. О контактном взаимодействии изгибающейся по теории С.П. Тимошенко балки конечной длины с упругой полуплоскостью. // Труды II межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды». Дилижан, Армения. Ереван. 4-8 октября 2010. С.76-80.
  13. Тимошенко С. П. Соппротивление материалов. Т.2. М.: Наука, 1965. 480с.
  14. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636с.
  15. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 488с.
  16. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Госмехтеориздат, 1949. 270с.

**Сведения об авторах:**

**Амирбекян Аревик Норайровна** – младший научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (37410) 52-48-90. **E-mail:** [a.amirbekyan@mail.ru](mailto:a.amirbekyan@mail.ru)

**Мкртчян Мушег Сережаевич** – канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА

Тел.: (37410) 43-16-52, (37410) 80-19-56, **E-mail:** [muscheg-mkrtchyan@rambler.ru](mailto:muscheg-mkrtchyan@rambler.ru)

**Мхитарян Сурен Манукович** – член-корр. НАН РА, докт. физ.-мат. наук, проф., Институт механики НАН РА

Тел: (+37410)621025; (+37493)936117; **E-mail:** [smkhitaryan@mechins.sci.am](mailto:smkhitaryan@mechins.sci.am)

**Шекян Лаврентий Арамович** - докт. физ.-мат. наук, Государственный инженерный университет Армении

Тел: (+37410)39 89 01; (+37499)28 34 40; **E-mail:** [lshekyan@mail.ru](mailto:lshekyan@mail.ru)

Поступила в редакцию 14.06.2013