ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика
УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СТЕПЕННЫХ РЯДОВ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ПРИКЛАДНОЙ МОДЕЛИ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Жамакочян К. А.

Ключевые слова: степенные ряды, метод, построение, модель, микрополярный, пластинка.
Key words: power series, method, construction, model, micropolar, plate.

Ժամակոչյան Ք. Ա.
Աստիճանային շարքերի մեթոդի կիրառումը միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի կիրառական մոդելի կառուցման համար

Դիտարկվում են տեղափոխությունների և պտույտների անկախ դաշտերով միկրոպոլյար առաձգականության տեսության տարածական լարվածային վիճակի դինամիկայի հավասարումները, եզրային և նախնական պայմանները բարակ սալի տիրույթում: Կիրառելով ըստ հաստության աստիճանային շարքերի վերլուծման մեթոդը՝ կառուցվում են միկրոպոլյար առաձգական բարակ սալերի ծռման դեֆորմացիայի և ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի դինամիկայի կիրառական-երկչափ մաթեմատիկական մոդելները: Ցույց է տրվում, որ կառուցված մոդելները լիովին համընկնում են միկրոպոլյար սալերի անալոգ մոդելների հետ, որոնք կառուցվել են ասիմպտոտիկ հիմնավորմամբ վարկածների մեթոդի հիման վրա:

Zhamakochyan K. A.
Application of the Method of Power Series for Construction of Applied Model of Micropolar Elastic Thin Plates

Dynamic equations, boundary and initial conditions of spatial stress state of the micropolar theory of elasticity with independent fields of displacements and rotations are considered in thin plate. Using the method of expansion to power series along the thickness of plate, applied two dimensional models of dynamic bending and plane stress state of micropolar elastic thin plates are constructed. It is shown that the constructed models coincide with the analogical models of micropolar plates, constructed on the basis of the asymptotically justified hypotheses method.

Рассматриваются уравнения, граничные и начальные условия динамики пространственного напряжённого состояния микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений в тонкой области пластинки. Применяя метод разложений по толщине в степенные ряды, построены прикладные-двухмерные модели динамического изгиба и плоского напряжённого состояния микрополярных упругих тонких пластин. Показывается, что построенные модели полностью совпадают с аналогичными моделями микрополярных пластин, построенных на основе асимптотически обоснованного метода гипотез.

Введение. Решение проблемы сведения трёхмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек осуществляется тремя основными методами: (а) методом гипотез [1-3]; (в) методом разложений по толщине в степенные ряды [4-7] или по полиномам Лежандра [8]; (с) асимптотическим методом [9-17].

Проблема о сведении трёхмерных уравнений микрополярной теории упругости к двумерным уравнениям теории пластин и оболочек на основе метода гипотез впервые поставлена в монографии [18].

В работах [19-22] построено асимптотическое решение трёхмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях, а в работах [23-26] на основе качественных сторон асимптотического решения сформулированы адекватные гипотезы и построены прикладные теории динамики микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек.

В данной работе развивается метод разложений по толщине в степенные ряды для построения прикладной-двухмерной динамической модели микрополярных упругих пластин и даётся сравнение (обоснование) с аналогичной моделью пластин, построенной в работе [25] на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое подтверждение.

1.Постановка задачи. Рассмотрим изотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной динамической задачи микрополярной теории упругости с независимыми полями перемещений и вращений [27]:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2},\qquad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=\rho\frac{\partial^2 V_3}{\partial t^2},\ \ \frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_3}+(\sigma_{23}-\sigma_{32})=J\frac{\partial^2\omega_1}{\partial t^2},\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}+(\sigma_{31}-\sigma_{13})=J\frac{\partial^2\omega_2}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial x_3}+(\sigma_{12}-\sigma_{21})=J\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2};$$

физические соотношения упругости

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}=\lambda\theta+2\mu\gamma_{11},\ \sigma_{22}=\lambda\theta+2\mu\gamma_{22},\ \sigma_{33}=\lambda\theta+2\mu\gamma_{33},\ \theta=\gamma_{11}+\gamma_{22}+\gamma_{33}\\
\sigma_{12}=(\mu+\alpha)\gamma_{12}+(\mu-\alpha)\gamma_{21},\ \ \sigma_{21}=(\mu-\alpha)\gamma_{12}+(\mu+\alpha)\gamma_{21},\\
\sigma_{13}=(\mu+\alpha)\gamma_{13}+(\mu-\alpha)\gamma_{31},\ \ \sigma_{31}=(\mu-\alpha)\gamma_{13}+(\mu+\alpha)\gamma_{31},\\
\sigma_{23}=(\mu+\alpha)\gamma_{23}+(\mu-\alpha)\gamma_{32},\ \ \sigma_{32}=(\mu-\alpha)\gamma_{23}+(\mu+\alpha)\gamma_{32},\\
\mu_{11}=\beta\overline{\theta}+2\gamma\chi_{11},\ \ \mu_{22}=\beta\overline{\theta}+2\gamma\chi_{22},\\
\mu_{33}=\beta\overline{\theta}+2\gamma\chi_{33},\ \ \overline{\theta}=\chi_{11}+\chi_{22}+\chi_{33},\\
\mu_{12}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{12}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{21},\ \ \ \mu_{21}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{21}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{12},\\
\mu_{13}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{13}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{31},\ \ \ \mu_{31}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{31}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{13},\\
\mu_{23}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{23}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{32},\ \ \ \mu_{32}=(\gamma+\varepsilon)\chi_{32}+(\gamma-\varepsilon)\chi_{23};
\end{gathered}\tag{1.2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\ \gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2},\ \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial x_3},\ \gamma_{12}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\omega_3,\ \gamma_{21}=\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+\omega_3,$$

$$\gamma_{13}=\frac{\partial V_3}{\partial x_1}+\omega_2,\ \ \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial x_3}-\omega_2,\ \ \gamma_{23}=\frac{\partial V_3}{\partial x_2}-\omega_1,\ \ \gamma_{32}=\frac{\partial V_2}{\partial x_3}+\omega_1,$$

$$\chi_{11}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_1},\ \ \chi_{22}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_2},\chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_3},\chi_{12}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_1},\ \ \chi_{21}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_2}\ , \tag{1.3}$$

$$\chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\chi_{31}=\frac{\partial\omega_1}{\partial x_3},\chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2},\chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial x_3}.$$

Здесь σ_{11}, σ_{12}, σ_{13}, σ_{21}, σ_{22}, σ_{23}, σ_{31}, σ_{32}, σ_{33} – силовые напряжения; μ_{11}, μ_{12}, μ_{13}, μ_{21}, μ_{22}, μ_{23}, μ_{31}, μ_{32}, μ_{33} – моментные напряжения; γ_{11}, γ_{22}, γ_{33}, γ_{12}, γ_{21}, γ_{13}, γ_{31}, γ_{23}, γ_{32} – деформации; χ_{11}, χ_{22}, χ_{33}, χ_{12}, χ_{21}, χ_{13}, χ_{31}, χ_{23}, χ_{32} – изгибы-кручения; V_1, V_2, V_3 – перемещения, ω_1, ω_2, ω_3 – независимые повороты; $-h\le x_3\le h$; $\lambda=\dfrac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, $\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}$, $\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ –постоянные упругости микрополярного тела.

На лицевых плоскостях пластинки $x_3=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные напряжения

$$\sigma_{31}=\pm p_1^{\pm},\ \sigma_{32}=\pm p_2^{\pm},\ \sigma_{33}=\pm p_3^{\pm},\ \mu_{31}=\pm m_1^{\pm},\ \mu_{32}=\pm m_2^{\pm},\mu_{33}=\pm m_3^{\pm}$$

при $x_3=\pm h$. (1.4)

Граничные условия на боковой поверхности пластинки, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

К граничным условиям следует присоединить начальные условия при $t=0$ для величин V_1, V_2, V_3, ω_1, ω_2, ω_3, $\dfrac{\partial V_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V_2}{\partial t}$, $\dfrac{\partial V_3}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_1}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_2}{\partial t}$, $\dfrac{\partial\omega_3}{\partial t}$.

2.Метод степенных рядов. Если выражения (1.3) подставим в формулы (1.2), то получим, что силовые и моментные напряжения выражаются через перемещения V_1,V_2,V_3 и повороты $\omega_1,\omega_2,\omega_3$. Для построения двумерной модели пластинки применяем метод приведения [7]. Аппроксимируем V_1,V_2,V_3 и $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ степенными полиномами относительно x_3:

$$V_1=\sum_{n=0}^{N}V_{1,n}x_3^n,\quad V_2=\sum_{n=0}^{N}V_{2,n}x_3^n,\quad V_3=\sum_{n=0}^{N}V_{3,n}x_3^n,$$
$$\omega_1=\sum_{n=0}^{N}\omega_{1,n}x_3^n,\quad \omega_2=\sum_{n=0}^{N}\omega_{2,n}x_3^n,\quad \omega_3=\sum_{n=0}^{N}\omega_{3,n}x_3^n, \tag{2.1}$$

где $V_{1,n}$, $V_{2,n}$, $V_{3,n}$, $\omega_{1,n}$, $\omega_{2,n}$, $\omega_{3,n}$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от координат x_1,x_2 и времени t.

Подставляя ряды (2.1) в основные уравнения (1.1)-(1.3) и граничные условия (1.4) пространственной задачи микрополярной теории упругости для тонкого параллелепипеда, получаем рекуррентные соотношения и условия, связывающие коэффициенты полиномов (2.1), причём число соотношений равно числу неизвестных коэффициентов.

На самом деле, на основании формул (1.2), (1.3), с учётом (2.1), для силовых напряжений $\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33}$ и моментных напряжений $\mu_{31},\mu_{32},\mu_{33}$ получим:

$$\sigma_{31}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(n+1)V_{1,n+1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,n}\right]x_3^n, \tag{2.2}$$

$$\sigma_{32}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(n+1)V_{2,n+1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,n}\right]x_3^n, \tag{2.3}$$

$$\sigma_{33}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}\right)+(\lambda+2\mu)(n+1)V_{3,n+1}\right]x_3^n, \tag{2.4}$$

$$\mu_{31}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(n+1)\omega_{1,n+1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_1}\right]x_3^n, \tag{2.5}$$

$$\mu_{32}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(n+1)\omega_{2,n+1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_2}\right]x_3^n, \tag{2.6}$$

$$\mu_{33}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,n}}{\partial x_2}\right)+(\beta+2\gamma)(n+1)\omega_{3,n+1}\right]x_3^n, \tag{2.7}$$

Используя формулы (2.2)-(2.7) и имея в виду граничные условия (1.4) на лицевых плоскостях пластинки $x_3=\pm h$, после некоторых преобразований приходим к следующим равенствам:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(2k+1)V_{1,2k+1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,2k}\right]h^{2k}=\frac{p_1^+-p_1^-}{2}, \tag{2.8}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(2k+2)V_{1,2k+2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k+1}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,2k+1}\right]h^{2k+1}=\frac{p_1^++p_1^-}{2}, \tag{2.9}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(2k+1)V_{2,2k+1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,2k}\right]h^{2k}=\frac{p_2^+-p_2^-}{2}, \tag{2.10}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)(2k+2)V_{2,2k+2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,2k+1}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,2k+1}\right]h^{2k+1}=\frac{p_2^++p_2^-}{2}, \tag{2.11}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{\partial V_{1,2k}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,2k}}{\partial x_2}\right)+(\lambda+2\mu)(2k+1)V_{3,2k+1}\right]h^{2k}=\frac{p_3^+-p_3^-}{2}, \tag{2.12}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\lambda\left(\frac{\partial V_{1,2k+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,2k+1}}{\partial x_2}\right)+(\lambda+2\mu)(2k+2)V_{3,2k+2}\right]h^{2k+1}=\frac{p_3^++p_3^-}{2}, \tag{2.13}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(2k+1)\omega_{1,2k+1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,2k}}{\partial x_1}\right]h^{2k}=\frac{m_1^+-m_1^-}{2}, \tag{2.14}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(2k+2)\omega_{1,2k+2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,2k+1}}{\partial x_1}\right]h^{2k+1}=\frac{m_1^++m_1^-}{2}, \tag{2.15}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(2k+1)\omega_{2,2k+1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,2k}}{\partial x_2}\right]h^{2k}=\frac{m_2^+-m_2^-}{2}, \tag{2.16}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)(2k+2)\omega_{2,2k+2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,2k+1}}{\partial x_2}\right]h^{2k+1}=\frac{m_2^++m_2^-}{2}, \tag{2.17}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,2k}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2k}}{\partial x_2}\right)+(\beta+2\gamma)(2k+1)\omega_{3,2k+1}\right]h^{2k}=\frac{m_3^+-m_3^-}{2}, \tag{2.18}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,2k+1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2k+1}}{\partial x_2}\right)+(\beta+2\gamma)(2k+2)\omega_{3,2k+2}\right]h^{2k+1}=\frac{m_3^++m_3^-}{2}. \tag{2.19}$$

Далее, подставляя выражения (1.3) в формулы обобщённого закона Гука (1.2), силовые напряжения и моментные напряжения выражаются через перемещения V_1, V_2, V_3 и свободные повороты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Учитывая разложения (2.1), полученные таким образом формулы для силовых напряжений и моментных напряжений, подставляя их в уравнения движения (1.1), приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно коэффициентов разложения (2.1):

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}+(n+1)V_{3,n+1}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{1,n}+(n+2)(n+1)V_{1,n+2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_2}-(n+1)\omega_{2,n+1}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{1,n}}{\partial t^2}, \tag{2.20}$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}+(n+1)V_{3,n+1}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{2,n}+(n+2)(n+1)V_{2,n+2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[(n+1)\omega_{1,n+1}-\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_1}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{2,n}}{\partial t^2}, \tag{2.21}$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\left[(n+1)\frac{\partial V_{1,n+1}}{\partial x_1}+(n+1)\frac{\partial V_{2,n+1}}{\partial x_2}+(n+2)(n+1)V_{3,n+2}\right]+$$

$$(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{3,n}+(n+2)(n+1)V_{3,n+2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{2,n}}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_{1,n}}{\partial x_2}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{3,n}}{\partial t^2}, \tag{2.22}$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\omega_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,n}}{\partial x_2}+(n+1)\omega_{3,n+1}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{1,n}+(n+2)(n+1)\omega_{1,n+2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_2}-(n+1)V_{2,n+1}-2\omega_{1,n}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{1,n}}{\partial t^2}, \tag{2.23}$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\omega_{1,n}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,n}}{\partial x_2}+(n+1)\omega_{3,n+1}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{2,n}+(n+2)(n+1)\omega_{2,n+2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[(n+1)V_{1,n+1}-\frac{\partial V_{3,n}}{\partial x_1}-2\omega_{2,n}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{2,n}}{\partial t^2}, \tag{2.24}$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\left[(n+1)\frac{\partial\omega_{1,n+1}}{\partial x_1}+(n+1)\frac{\partial\omega_{2,n+1}}{\partial x_2}+(n+2)(n+1)\omega_{3,n+2}\right]+$$

$$+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{3,n}+(n+2)(n+1)\omega_{3,n+2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_2}-2\omega_{3,n}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{3,n}}{\partial t^2}, \tag{2.25}$$

Отметим, что уравнения (2.20)-(2.25) и условия (2.8)-(2.19) распадаются на две части: симметричную относительно x_3 (соответствующую продольным колебаниям) и обратно-симметричную (соответствующую поперечным колебаниям).

3.Математическая модель динамики обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных тонких пластин.

Продольные колебания микрополярной тонкой пластинки на основании перечисленных выше уравнений и условий, в исходном приближении метода степенных рядов описываются следующей системой уравнений:

$$2(\mu+\alpha)V_{1,2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,1}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,1}=\frac{p_1^+ + p_1^-}{2h},$$

$$2(\mu+\alpha)V_{2,2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,1}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,1}=\frac{p_2^+ + p_2^-}{2h},$$

$$\lambda\left(\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}\right)+(\lambda+2\mu)V_{3,1}=\frac{p_3^+ - p_3^-}{2},$$

$$(\gamma+\varepsilon)\omega_{1,1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_1}=\frac{m_1^+ - m_1^-}{2},$$

$$(\gamma+\varepsilon)\omega_{2,1}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_2}=\frac{m_2^+ - m_2^-}{2},$$

$$\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,1}}{\partial x_2}\right)+2(\beta+2\gamma)\omega_{3,2}=\frac{m_3^+ + m_3^-}{2h}, \tag{3.1}$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}+V_{3,1}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{1,0}+2V_{1,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_2}-\omega_{2,1}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}+V_{3,1}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2 V_{2,0}+2V_{2,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\omega_{1,1}-\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_1}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\left[\frac{\partial\omega_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,1}}{\partial x_2}+2\omega_{3,2}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{3,0}+2\omega_{3,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_2}-2\omega_{3,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{3,0}}{\partial t^2}.$$

Подставляя $\omega_{1,1}, \omega_{3,2}, \omega_{2,1}, V_{1,2}, V_{2,2}$ и $V_{3,1}$ соответственно из первого, второго, третьего, четвёртого, пятого и шестого уравнений системы (3.1) в седьмое, восьмое и девятое уравнения, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно основных функций задачи: $V_{1,0}$, $V_{2,0}$, $\omega_{3,0}$:

$$(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_2}+\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}+\nu\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}\right)+$$

$$+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{p_3^+-p_3^-}{2}\right)=\rho\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial t^2}-\frac{p_1^++p_1^-}{2h},$$

$$(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial x_1^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,0}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial x_1}+\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_2}+\nu\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_1}\right)+$$

$$+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{p_3^+-p_3^-}{2}\right)=\rho\frac{\partial^2 V_{2,0}}{\partial t^2}-\frac{p_2^++p_2^-}{2h}, \tag{3.2}$$

$$\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\Delta^2\omega_{3,0}+2\alpha\left[\frac{\partial V_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,0}}{\partial x_2}-2\omega_3\right]+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{m_1^+-m_1^-}{2}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{m_2^+-m_2^-}{2}\right]=$$

$$=J\frac{\partial^2\omega_{3,0}}{\partial t^2}-\frac{m_3^++m_3^-}{2h}.$$

Система уравнений (3.2) представляет собой основные уравнения динамики обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных упругих пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Эта система записана посредством перемещений $(V_{1,0}, V_{2,0})$ и независимого поворота $(\omega_{3,0})$. К этой системе следует присоединить граничные условия на контуре срединной плоскости пластинки и начальные условия для $V_{1,0}$, $V_{2,0}$, $\omega_{3,0}$, $\frac{\partial V_{1,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial V_{2,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial\omega_{3,0}}{\partial t}$.

Теперь, будем сравнивать полученную модель плоского обобщённого напряжённого состояния динамики микрополярной упругой тонкой пластинки с аналогичной моделью [25], построенной на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое подтверждение:

уравнения движения

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial S_{21}}{\partial x_2}=2\rho h\frac{\partial^2 V_1}{\partial t^2}-(p_1^+ + p_1^-),\ \ \frac{\partial S_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial T_{22}}{\partial x_2}=2\rho h\frac{\partial^2 V_2}{\partial t^2}-(p_2^+ + p_2^-),$$
$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{23}}{\partial x_2}+(S_{12}-S_{21})=2Jh\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}-(m_3^+ + m_3^-); \tag{3.3}$$

соотношения упругости

$$S_{12}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{12}+(\mu-\alpha)\Gamma_{21}],\ \ S_{21}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{21}+(\mu-\alpha)\Gamma_{12}],$$
$$L_{13}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{13}+(\gamma-\varepsilon)k_{31}],\ \ L_{23}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{23}+(\gamma-\varepsilon)k_{32}],$$
$$T_{11}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\Gamma_{11}+\nu\Gamma_{22}),\ \ T_{22}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}(\Gamma_{22}+\nu\Gamma_{11}), \tag{3.4}$$
$$L_{31}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{31}+(\gamma-\varepsilon)k_{13}],\ \ L_{32}=2h[(\gamma+\varepsilon)k_{32}+(\gamma-\varepsilon)k_{23}],$$
$$L_{31}=h(m_1^+ - m_1^-),\ L_{32}=h(m_2^+ - m_2^-);$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{11}=\frac{\partial V_1}{\partial x_1},\ \Gamma_{22}=\frac{\partial V_2}{\partial x_2},\ \Gamma_{12}=\frac{\partial V_2}{\partial x_1}-\Omega_3,\ \Gamma_{21}=\frac{\partial V_1}{\partial x_2}+\Omega_3,$$
$$k_{13}=\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1},\ k_{23}=\frac{\partial \Omega_3}{\partial x_2}. \tag{3.5}$$

Если (3.5) подставить в соотношения упругости (3.4) и последние в уравнения движения (3.3), получим основные уравнения в перемещениях и поворотах модели динамики плоского напряжённого состояния микрополярных упругих пластин работы [25]. Сравнивая уравнения этой системы с полученными уравнениями (3.2) на основе метода степенных рядов ($V_{1,0}=V_1,\ V_{2,0}=V_2,\ \omega_{3,0}=\Omega_3$), легко убедиться, что разница только в подчёркнутых членах в (3.2). Но эти величины – результат того, что в физическом уравнении для γ_{ii} $(i=1,2)$ было удержано силовое напряжение σ_{33}, которое, как известно, в теории пластин принято пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{11},σ_{22}. Таким образом, модель динамики обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных упругих тонких пластин, которая построена в работе [25] на основе метода гипотез и которая асимптотически точная модель [22], можем утверждать, что эта модель обосновывается также методом степенного разложения.

4.Математическая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Поперечные колебания микрополярной тонкой пластинки на основании перечисленных выше уравнений и условий описываются следующей системой уравнений:

$$(\mu+\alpha)V_{1,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,0}+3(\mu+\alpha)h^2V_{1,3}+(\mu-\alpha)h^2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}-2\alpha h^2\omega_{2,2}=\frac{p_1^+-p_1^-}{2},$$

$$(\mu+\alpha)V_{2,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}+2\alpha\omega_{1,0}+3(\mu+\alpha)h^2V_{2,3}+(\mu-\alpha)h^2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}+2\alpha h^2\omega_{1,2}=\frac{p_2^+-p_2^-}{2},$$

$$\lambda\left(\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}\right)+2(\lambda+2\mu)V_{3,2}=\frac{p_3^++p_3^-}{2h},$$

$$2(\gamma+\varepsilon)\omega_{1,2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}=\frac{m_1^++m_1^-}{2h},$$

$$2(\gamma+\varepsilon)\omega_{2,2}+(\gamma-\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}=\frac{m_2^++m_2^-}{2h}, \tag{4.1}$$

$$\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}\right)+(\beta+2\gamma)\omega_{3,1}+\beta h^2\left(\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,2}}{\partial x_2}\right)+3h^2(\beta+2\gamma)\omega_{3,3}=\frac{m_3^+-m_3^-}{2},$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+2V_{3,2}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2V_{1,1}+6V_{1,3}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}-2\omega_{2,2}\right]=\rho\frac{\partial^2V_{1,1}}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+2V_{3,2}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2V_{2,1}+6V_{2,3}\right]+2\alpha\left[2\omega_{1,2}-\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}\right]=\rho\frac{\partial^2V_{2,1}}{\partial t^2},$$

$$(\lambda+\mu-\alpha)\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+2V_{3,2}\right]+(\mu+\alpha)\left[\Delta^2V_{3,0}+2V_{3,2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_2}\right]=\rho\frac{\partial^2V_{3,0}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}+\omega_{3,1}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{1,0}+2\omega_{1,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-V_{2,1}-2\omega_{1,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}+\omega_{3,1}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{2,0}+2\omega_{2,2}\right]+$$

$$+2\alpha\left[V_{1,1}-\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\omega_{2,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+\gamma-\varepsilon)\left[2\frac{\partial\omega_{1,2}}{\partial x_1}+2\frac{\partial\omega_{2,2}}{\partial x_2}+6\omega_{3,3}\right]+(\gamma+\varepsilon)\left[\Delta^2\omega_{3,1}+6\omega_{3,3}\right]+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2}.$$

Подставляя $V_{3,2}$, $\omega_{1,2}$ и $\omega_{2,2}$ соответственно из третьего, четвёртого и пятого уравнений системы (4.1) в девятое, десятое и одиннадцатое уравнения, получим:

$$(\mu+\alpha)\Delta^2 V_{3,0}+(\mu-\alpha)\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_2}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2}-\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}, \quad (4.2)$$

$$\begin{gathered}(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_2^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+\\ +2\alpha\left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-V_{2,1}-2\omega_{1,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial t^2}-\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h}\end{gathered} \quad (4.3)$$

$$\begin{gathered}(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_1^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+\\ +2\alpha\left[V_{1,1}-\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\omega_{2,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial t^2}-\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}\end{gathered} \quad (4.4)$$

Подставив (2.1) в (1.2), для σ_{11}, σ_{12}, σ_{21}, σ_{22}, μ_{13}, μ_{23} получим:

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+\lambda\left(\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}+V_{3,n+1}(n+1)\right)\right]x_3^n,\\
\sigma_{12}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_2}-2\alpha\omega_{3,n}\right]x_3^n,\\
\sigma_{21}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_1}+2\alpha\omega_{3,n}\right]x_3^n,\\
\sigma_{22}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial V_{2,n}}{\partial x_2}+\lambda\left(\frac{\partial V_{1,n}}{\partial x_1}+V_{3,n+1}(n+1)\right)\right]x_3^n,\\
\mu_{13}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_1}+(\gamma-\varepsilon)(n+1)\omega_{1,n+1}\right]x_3^n,\\
\mu_{23}&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial\omega_{3,n}}{\partial x_2}+(\gamma-\varepsilon)(n+1)\omega_{2,n+1}\right]x_3^n,
\end{aligned} \quad (4.5)$$

откуда для случая изгиба в исходном приближении будем иметь:

$$\sigma_{11}=\left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\lambda\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}+2V_{3,2}\right)\right]x_3,$$

$$\sigma_{12}=\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\alpha\omega_{3,1}\right]x_3,$$

$$\sigma_{21} = \left[(\mu+\alpha)\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2} + (\mu-\alpha)\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1} + 2\alpha\omega_{3,1} \right] x_3,$$

$$\sigma_{22} = \left[(2\mu+\lambda)\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2} + \lambda\left(\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + 2V_{3,2} \right) \right] x_3, \tag{4.6}$$

$$\mu_{13} = \left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1} + 2(\gamma-\varepsilon)\omega_{1,2} \right] x_3,$$

$$\mu_{23} = \left[(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2} + 2(\gamma-\varepsilon)\omega_{2,2} \right] x_3,$$

Для силовых напряжений σ_{31}, σ_{32} и моментного напряжения μ_{33} сначала имеем

$$\overset{0}{\sigma}_{31} = (\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (\mu+\alpha)V_{1,1} - 2\alpha\omega_{2,0}, \tag{4.7}$$

$$\overset{0}{\sigma}_{32} = (\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2} + (\mu+\alpha)V_{2,1} + 2\alpha\omega_{1,0}, \tag{4.8}$$

$$\overset{0}{\mu}_{33} = (2\gamma+\beta)\omega_{3,1} + \beta\left[\frac{\partial \omega_{1,0}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{2,0}}{\partial x_2} \right]. \tag{4.9}$$

Подставив выражения σ_{11}, σ_{21}, σ_{12}, σ_{22}, μ_{13}, μ_{23} из (4.6) в первое, второе и шестое уравнения движения (1.1), проинтегрировав по x_3, получим:

$$\tilde{\sigma}_{31} = \frac{x_3^2}{2}\left[\rho\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1} \right) - \right.$$
$$\left. -(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} - (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2} \right] + \bar{\sigma}_{31}(x_1, x_2, t),$$

$$\tilde{\sigma}_{32} = \frac{x_3^2}{2}\left[\rho\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2} \right) - \right.$$
$$\left. -(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2} - (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1} \right] + \bar{\sigma}_{32}(x_1, x_2, t), \tag{4.10}$$

$$\tilde{\mu}_{33} = \frac{x_3^2}{2}\left[J\frac{\partial^2 \omega_{3,1}}{\partial t^2} - (\gamma+\varepsilon)\Delta^2\omega_{3,1} - 2(\gamma-\varepsilon)\left(\frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{2,2}}{\partial x_2} \right) - \right.$$
$$\left. -2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2} - 2\omega_{3,1} \right) \right] + \bar{\mu}_{33}(x_1, x_2, t),$$

где $\overline{\sigma}_{31}(x_1,x_2,t), \overline{\sigma}_{32}(x_1,x_2,t), \overline{\mu}_{33}(x_1,x_2,t)$ – постоянные интегрирования. Для определения этих величин потребуем, чтобы усреднённые по высоте пластинки величины $\tilde{\sigma}_{31}, \tilde{\sigma}_{32}, \tilde{\mu}_{33}$ были равны нулю:

$$\int_{-h}^{h} \tilde{\sigma}_{31} dx_3 = 0, \int_{-h}^{h} \tilde{\sigma}_{32} dx_3 = 0, \int_{-h}^{h} \tilde{\mu}_{33} dx_3 = 0. \tag{4.11}$$

Подставив выражение (4.10) в (4.11), получим:

$$\overline{\sigma}_{31}(x_1,x_2,t) = -\frac{h^2}{6}\left[\rho\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}\right) - \right.$$

$$\left. -(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} - (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2}\right],$$

$$\overline{\sigma}_{32}(x_1,x_2,t) = -\frac{h^2}{6}\left[\rho\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}\right) - \right.$$

$$\left. -(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2} - (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1}\right], \tag{4.12}$$

$$\overline{\mu}_{33}(x_1,x_2,t) = -\frac{h^2}{6}\left[J\frac{\partial^2 \omega_{3,1}}{\partial t^2} - (\gamma+\varepsilon)\Delta^2\omega_{3,1} - 2(\gamma-\varepsilon)\left(\frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{2,2}}{\partial x_2}\right) - \right.$$

$$\left. -2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2} - 2\omega_{3,1}\right)\right].$$

Подставив (4.12) в (4.10), для $\tilde{\sigma}_{31}, \tilde{\sigma}_{32}, \tilde{\mu}_{33}$ получим следующие выражения:

$$\tilde{\sigma}_{31} = \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[\rho\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}\right) - \right.$$

$$\left. -(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} - (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2}\right],$$

$$\tilde{\sigma}_{32} = \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[\rho\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2} - \lambda\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}\right) - \right.$$

$$\left. -(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2} - (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1}\right], \tag{4.13}$$

$$\tilde{\mu}_{33} = \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[J\frac{\partial^2 \omega_{3,1}}{\partial t^2} - (\gamma+\varepsilon)\Delta^2\omega_{3,1} - 2(\gamma-\varepsilon)\left(\frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{2,2}}{\partial x_2}\right) - \right.$$

$$\left. -2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2} - 2\omega_{3,1}\right)\right].$$

Таким образом, для силовых напряжений σ_{31}, σ_{32} и моментного напряжения μ_{33} будем иметь:

$$\sigma_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31} + \tilde{\sigma}_{31}, \quad \sigma_{32} = \overset{0}{\sigma}_{32} + \tilde{\sigma}_{32}, \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33} + \tilde{\mu}_{33}. \tag{4.14}$$

Подставив (4.7)-(4.9) и (4.13) в (4.14), получим окончательные формулы для σ_{31}, σ_{32}, μ_{33}:

$$\sigma_{31} = (\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} + (\mu+\alpha)V_{1,1} - 2\alpha\omega_{2,0} + \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[\rho\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} - \right.$$

$$\left. -\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_1}\right) - (\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} - (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} - 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2}\right],$$

$$\sigma_{32} = (\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2} + (\mu+\alpha)V_{2,1} + 2\alpha\omega_{1,0} + \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[\rho\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2} - (2\mu+\lambda)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2} - \right. \tag{4.15}$$

$$\left. -\lambda\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\frac{\partial V_{3,2}}{\partial x_2}\right) - (\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2} - (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1}\right],$$

$$\mu_{33} = (2\gamma+\beta)\omega_{3,1} + \beta\left[\frac{\partial \omega_{1,0}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{2,0}}{\partial x_2}\right] + \left(\frac{x_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left[J\frac{\partial^2 \omega_{3,1}}{\partial t^2} - (\gamma+\varepsilon)\Delta^2\omega_{3,1} - \right.$$

$$\left. -2(\gamma-\varepsilon)\left(\frac{\partial \omega_{1,2}}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_{2,2}}{\partial x_2}\right) - 2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1} - \frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2} - 2\omega_{3,1}\right)\right],$$

где $V_{3,2}$, $\omega_{1,2}$, $\omega_{2,2}$ выражаются с помощью $V_{1,1}$, $V_{2,1}$, $\omega_{3,1}$:

$$V_{3,2} = \frac{1}{2(\lambda+2\mu)}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h} - \frac{\lambda}{2(\lambda+2\mu)}\left(\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1} + \frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}\right),$$

$$\omega_{1,2} = \frac{1}{2(\gamma+\varepsilon)}\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h} - \frac{\gamma-\varepsilon}{2(\gamma+\varepsilon)}\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_1}, \tag{4.16}$$

$$\omega_{2,2} = \frac{1}{2(\gamma+\varepsilon)}\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h} - \frac{\gamma-\varepsilon}{2(\gamma+\varepsilon)}\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2}.$$

При помощи формул (4.15) удовлетворяя соответствующим граничным условиям из (1.4), имея в виду (4.16), получим следующие уравнения:

$$(\mu+\alpha)V_{1,1} + (\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1} - 2\alpha\omega_{2,0} - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2} + \nu\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2}\right) -$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2} + (\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1 \partial x_2} + 2\alpha\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial x_2} + \frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}\right] = \tag{4.17}$$

$$= \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} - \rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2},$$

$$(\mu+\alpha)V_{2,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-2\alpha\omega_{1,0}-\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}\right]= \tag{4.18}$$

$$=\frac{p_2^+ - p_2^-}{2}-\rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2},$$

$$(\beta+2\gamma)\omega_{3,1}+\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}\right)-\frac{h^2}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\Delta^2\omega_{3,1}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}\right)+\right.$$

$$\left.+2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right)\right]=\frac{m_3^+ - m_3^-}{2}-J\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2}, \tag{4.19}$$

Объединив (4.2), (4.3), (4.4), (4.17), (4.18) и (4.19), окончательным образом приходим к следующей системе дифференциальных уравнений относительно $V_{1,1}$, $V_{2,1}$, $V_{3,0}$, $\omega_{1,0}$, $\omega_{2,0}$, $\omega_{3,1}$:

$$(\mu+\alpha)\Delta^2 V_{3,0}+(\mu-\alpha)\left[\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_1}+\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_2}\right]+2\alpha\left[\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_1}-\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_2}\right]=\rho\frac{\partial^2 V_{3,0}}{\partial t^2}-\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h},$$

$$(\mu+\alpha)V_{1,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\alpha\omega_{2,0}-\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1\partial x_2}+2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_2}+\underline{\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}}\right]=$$

$$=\frac{p_1^+ - p_1^-}{2}-\rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial t^2},$$

$$(\mu+\alpha)V_{2,1}+(\mu-\alpha)\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-2\alpha\omega_{1,0}-\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_1^2}+\nu\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}\right)-$$

$$-\frac{h^2}{3}\left[(\mu+\alpha)\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial x_2^2}+(\mu-\alpha)\frac{\partial^2 V_{1,1}}{\partial x_1\partial x_2}-2\alpha\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+\underline{\frac{\nu}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{p_3^+ + p_3^-}{2h}}\right]=$$

$$=\frac{p_2^+ - p_2^-}{2}-\rho\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2 V_{2,1}}{\partial t^2}, \tag{4.20}$$

$$(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_1^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_2^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+$$

$$+2\alpha\left[\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_2}-V_{2,1}-2\omega_{1,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial t^2}-\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h}$$

$$(\beta+2\gamma)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_2^2}+(\gamma+\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial x_1^2}+(\beta+\gamma-\varepsilon)\frac{\partial^2\omega_{1,0}}{\partial x_1\partial x_2}+\beta\frac{\partial\omega_{3,1}}{\partial x_1}+$$

$$+2\alpha\left[V_{1,1}-\frac{\partial V_{3,0}}{\partial x_1}-2\omega_{2,0}\right]=J\frac{\partial^2\omega_{2,0}}{\partial t^2}-\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}$$

$$(\beta+2\gamma)\omega_{3,1}+\beta\left(\frac{\partial\omega_{1,0}}{\partial x_1}+\frac{\partial\omega_{2,0}}{\partial x_2}\right)-\frac{h^2}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\Delta^2\omega_{3,1}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{m_1^+ + m_1^-}{2h}+\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{m_2^+ + m_2^-}{2h}\right)+\right.$$

$$\left.+2\alpha\left(\frac{\partial V_{2,1}}{\partial x_1}-\frac{\partial V_{1,1}}{\partial x_2}-2\omega_{3,1}\right)\right]=\frac{m_3^+ - m_3^-}{2}-J\frac{h^2}{3}\frac{\partial^2\omega_{3,1}}{\partial t^2},$$

Система уравнений (4.20) представляет собой математическую модель динамики микрополярных упругих тонких пластин при изгибной деформации. К системе (4.20) следует присоединить граничные условия на боковой поверхности пластинки [25] и начальные условия для $V_{1,1}$, $V_{2,1}$, $V_{3,0}$, $\omega_{1,0}$, $\omega_{2,0}$, $\omega_{3,1}$, $\frac{\partial V_{3,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial V_{1,1}}{\partial t}$, $\frac{\partial V_{2,1}}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega_{1,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega_{2,0}}{\partial t}$, $\frac{\partial \omega_{3,1}}{\partial t}$.

Теперь, сравним полученную модель динамики микрополярной упругой тонкой пластинки с аналогичной моделью [25], построенной на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое подтверждение:

уравнения движения

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-2\tilde{p}_3,\quad N_{31}-\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial M_{21}}{\partial x_2}=-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}+2h\tilde{p}_1,$$

$$N_{32}-\frac{\partial M_{22}}{\partial x_2}-\frac{\partial M_{12}}{\partial x_1}=-\frac{2\rho h^3}{3}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2}+2h\tilde{p}_2 \qquad (4.21)$$

$$\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{21}}{\partial x_2}+N_{23}-N_{32}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial t^2}-2\tilde{m}_1,\quad \frac{\partial L_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial L_{22}}{\partial x_2}+N_{31}-N_{13}=2Jh\frac{\partial^2\Omega_2}{\partial t^2}-2\tilde{m}_2,$$

$$L_{33}-\left[\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}+M_{12}-M_{21}\right]=-\frac{2Jh^3}{3}\frac{\partial^2\tau}{\partial t^2}+2\tilde{m}_3;$$

соотношения упругости

$$N_{13}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{13}+(\mu-\alpha)\Gamma_{31}],\quad N_{23}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{23}+(\mu-\alpha)\Gamma_{32}],$$

$$N_{31}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{31}+(\mu-\alpha)\Gamma_{13}],\quad N_{32}=2h[(\mu+\alpha)\Gamma_{32}+(\mu-\alpha)\Gamma_{23}],$$

$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{11}+\nu K_{22}),\quad M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{22}+\nu K_{11}),$$

$$M_{12} = \frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{12} + (\mu-\alpha)K_{21}\right],\ M_{21} = \frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{21} + (\mu-\alpha)K_{12}\right], \quad (4.22)$$

$$L_{11} = 2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{11} + \frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{22}\right] + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{22} = 2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}k_{22} + \frac{2\beta\gamma}{\beta+2\gamma}k_{11}\right] + \frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{12} = 2h[(\gamma+\varepsilon)k_{12} + (\gamma-\varepsilon)k_{21}],\ L_{21} = 2h[(\gamma+\varepsilon)k_{21} + (\gamma-\varepsilon)k_{12}],$$

$$\Lambda_{13} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{13} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\tilde{m}_1}{2h}\right],\ \Lambda_{23} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{23} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{\tilde{m}_2}{2h}\right],$$

$$L_{33} = 2h(\beta+2\gamma)\iota + 2h\beta(k_{11}+k_{22});$$

геометрические соотношения

$$K_{11} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1},\ K_{22} = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2},\ K_{12} = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \iota,\ K_{21} = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \iota,$$

$$\Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2,\ \Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2,\ \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1,\ \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \quad (4.23)$$

$$k_{11} = \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1},\ k_{22} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2},\ k_{12} = \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1},\ k_{21} = \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2},\ l_{13} = \frac{\partial\iota}{\partial x_1},\ l_{23} = \frac{\partial\iota}{\partial x_2}.$$

Если (4.23) подставить в соотношения упругости (4.22) и последние в уравнения движения (4.21), получим основные уравнения в перемещениях и поворотах модели микрополярных упругих пластин работы [25]. Сравнивая уравнения этой системы с уравнениями (2.48), полученными на основе метода степенных рядов $(V_{3,0} = w,\ V_{1,1} = \psi_1,\ V_{2,1} = \psi_2,\ \omega_{1,0} = \Omega_1, \omega_{2,0} = \Omega_2, \omega_{3,1} = \iota)$, легко убедиться, что разница только в подчеркнутых членах в (4.20). Но это – результат того, что в физическом уравнении для γ_{ii} $(i = 1,2)$ было удержано силовое напряжение σ_{33}, которое, как известно, в теории пластин принято пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{11}, σ_{22}. Таким образом, модель динамики микрополярных упругих тонких пластин, которая построена в работе [25] на основе метода гипотез, является асимптотически точной моделью [22], она обосновывается также и методом степенного разложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266с.
2. Reissner E. On the theory of bending of elastic plates // J. Math. and Phys. 1944. Vol.23. P.184-191.

3. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М: Изд. Наука, 1967. 444с.
4. Cauchy A.L. Sur lequilibre et le movement dune lame solide //Exercices Math. 1828. V.3. P.245-326.
5. Poisson S.D. Memoire sur lequilibre et le movement des corps elastiques //Mem. Acad. Roy. Sci. 1829. V.8. P.357-570.
6. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек. Киев: Изд-во АН Укр. ССР, 1963. 353с.
7. Селезов І.Т. Дослідження поперечних коливань пластини//Прикладна механіка. 1960. Т. VI. Вып. 5. С.319-327.
8. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 286с.
9. Friedrichs K. O. and Dressler R. F. A. Boundary Layer Theory for Elastic Plates // Comm. Pure and Apll. Math. 1961. Vol. №1. P.1-33.
10. Green A.E. On the Linear Theory of Thin Elastic Shells // Proc. Roy. Soc. Ser. A. 1962. Vol. 266. №1325.
11. Ворович И.И. Некоторые результаты и проблемы асимптотической теории пластин и оболочек // В сб.: Материалы I Всесоюзн. школы по теории и численным методам расчёта оболочек и пластин. Тбилиси: Изд-во Тбилисск. ун-та, 1975. С.51-149.
12. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 510с.
13. Гольденвейзер А.Л., Каплунов Ю.Д., Нольде Е.В. Асимптотический анализ и уточнение теории пластин и оболочек типа Тимошенко-Рейсснера// Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1990. №6. С.124-138.
14. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука, 1997. 414 с.
15. Рогачева Н.Н. Пьезокерамические оболочки, поляризованные вдоль одного семейства координатных линий срединной поверхности// Препринт №204. Институт Проблем Механики АН СССР. М.: 1982. 60с.
16. Устинов Ю.А., Шленев М.А. О некоторых направлениях развития асимптотического метода плит и оболочек// Межвузовский сборник “Расчет оболочек и пластин”. Ростов-на-Дону. Изд-во Ростовского Инженерно-строительного ин-та. 1978. С.3-27.
17. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении, 1992. 260с.
18. Амбарцумян С.А. Микрополярная теория оболочек и пластин. Ереван: Изд-во НАН Армении, 1999. 214с.
19. Саркисян С.О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин // Прикладная математика и механика. 2008. Т.72. Вып.1. С.129-147.

20. Саркисян С.О. Теория микрополярных упругих тонких оболочек //Прикладная математика и механика. 2012. Т.76. Вып. 2. С.325-343.
21. Саркисян С.О. Построение математической модели микрополярных упругих тонких стержней асимптотическим методом //Изв. высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2012. №5. С.31-37.
22. Саркисян С.О. Асимптотический метод построения математических моделей микрополярных упругих тонких пластин //«Ученые записки». Гюмрийский государственный педагогический институт им. М.Налбандяна. 2013. Серия А. №1. С.7-37.
23. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек// Докл. АН России. 2011. Т.436. № 2. С.195-198.
24. Саркисян А.А. Математическая модель динамического изгиба микрополярных упругих тонких стержней// Докл. НАН Армении. 2011. Т.11. №4. С.342-351.
25. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением и особенности их свободных колебаний // Акустический журнал. 2011. Т.57. №4. С.461-469.
26. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Модель колебания микрополярных упругих тонких оболочек // Акустический журнал. 2013. Т.59. № 2. С.170-181.
27. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.

Сведение об авторе:

Жамакочян Кнарик Араратовна – аспирант кафедры мат.анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.
Тел: (093)873294.
E-mail: knarikzhamakochyan@mail.ru.

Поступила в редакцию 31.05.2013