

**О РАСПРОСТРАНЕНИИ И ПОВЕДЕНИИ ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ
ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИКЕ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ
НЕОДНОРОДНОСТИ**

Камалян А.А.

Ключевые слова: электроупругие волны, неоднородный пьезоэлектрический слой, распределение напряжений по толщине слоя, изменение фазовой скорости

Key Words: electroelastic waves, inhomogeneous piezoelectric medium, tension distribution over the thickness of the layer, variation of the phase speed

Քամալյան Ա.Ա.

**Էլեկտրաառաձգական ալիքի տարածումը և վարքը կախված պիեզոէլեկտրիկի
անհամասեռությունից**

Դիտարկված է 6mm դասի անհամասեռ պիեզոէլեկտրիկ շերտում էլեկտրաառաձգական մոնոխրոմատիկ ալիքի տարածումը: Ներմուծված է անհամասեռության ֆունկցիա, որը նկարագրում է ազատ և էկրանավորված եզրերով շերտի էլեկտրաստատիկ և մեխանիկական հատկությունների ֆունկցիոնալ կախվածությունը: Կատարված է ալիքի դիսպերսիայի վերաբերյալ հետազոտություն՝ կախված անհամասեռության ֆունկցիայի ազդեցությունից: Բերված են միևնույն եզրային պայմանների դեպքում թվային համեմատություններ համասեռ և անհամասեռ շերտերում գոյացած ալիքների արագությունների միջև:

Kamalyan A.A.

On propagation and characteristics of electroelastic wave in functionally graded piezoelectric layer.

In this paper the propagation of electroelastic monochromatic waves in functionally graded layer made of 6mm piezoelectric is investigated. Electroelastic and mechanical constants of the layer (with metalized and tension free surfaces) are variations of the same function, which is responsible for inhomogeneity and derived here. The influence of inhomogeneity function upon the dispersion of shear wave is analyzed and the numerical comparison between wave speeds of homogeneous and inhomogeneous layers is given with the same boundary conditions is made.

В работе исследовано распространение электроупругих монохроматических волн в пьезоэлектрическом неоднородном слое класса 6mm.

Физико-механические свойства слоя определяются посредством одной функции, зависящей от толщины слоя. Исследовано влияние функции неоднородности на дисперсию сдвиговой волны. Проведён сравнительный анализ для скоростей волны неоднородного и однородного слоёв.

Введение

Внедрение новых технологий во многих областях неразрывно связано с созданием новых композитных материалов. В связи с этим, весьма актуальны исследования волновых процессов, сопряжённых электромагнитных и механических полей в неоднородных и механических полях в неоднородных средах.

Этой тематике посвящены работы [1-10], где исследуется влияние некоторых типов неоднородностей на волновые явления. В частности, в [1], где за основу

выдвинута модель слоя пьезоэлектрика класса 6mm с линейной неоднородностью по толщине и исследуется вопрос распространения монохроматической волны в данной неоднородной среде. В работах [2]-[7] исследуется влияние нескольких типов неоднородностей на характеристики волн в слоях и полупространствах электромагнитоупругих сред при учёте разных краевых задач.

В данной работе рассмотрено распространение электроупругой монохроматической волны в неоднородном слое пьезоэлектрика класса 6mm. Внедрена функция, которая отвечает за функциональную неоднородность физико-механических свойств материала в зависимости от толщины слоя. Проведён анализ влияния этой функции на дисперсию волны и приведены численные сравнения величин скоростей волн в неоднородном случае с однородным при одинаковых краевых условиях.

1. Рассмотрим распространение монохроматических волн в неоднородной пьезоэлектрической среде гексагональной симметрии (класса 6mm). Пусть координатная ось OZ параллельна оси симметрии пьезокристалла, а плоскость $ХОУ$ есть плоскость изотропии. В этой плоскости плоское деформированное состояние не электроактивно. Исходя из этого, здесь будем исследовать антиплоскую задачу распространения горизонтально поляризованных (SH) электроупругих монохроматических волн.

Уравнения антиплоского электроупругого состояния записываются в виде :

$$\operatorname{div} \vec{\sigma} = \rho \ddot{W}$$

$$\vec{\sigma} = \{ \sigma_{xz}, \sigma_{yz} \} \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь используем квазистатическое приближение для электрического поля. Электрическое поле E_i выражается через скалярный потенциал Φ .

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \Phi \quad (1.3)$$

Исследуем монохроматические решения, распространяющиеся по оси Ox в слое, имеющем неоднородность по толщине. Пусть пьезоэлектрический слой в прямоугольной системе координат $(x; y; z)$ занимает область $-\infty < x < \infty; 0 \leq y \leq 2h; -\infty < z < \infty$.

$$\text{На поверхностях слоя } y = 2h; y = 0 \text{ имеют место граничные условия } \sigma_{yz} = 0; \Phi = 0 \quad (1.4)$$

Условие электрически закрытой границы $\Phi = 0$ изолирует неоднородную среду слоя от внешней среды.

Допустим также, что неоднородность пьезоэлектрика по толщине характеризуется функцией $a(y)$ и физико-механические характеристики материала, в частности, C_{44} – модуль сдвига, e_{15} – пьезоэлектрический модуль, ϵ_{11} – диэлектрическая проницаемость и ρ – плотность материала также будут зависеть от толщины следующим образом:

$$e_{15}(y) = e_{15}^0 a(y), \quad \epsilon_{11}(y) = \epsilon_{11}^0 a(y)$$

$$C_{44}(y) = C_{44}^0 a(y), \quad \rho(y) = \rho_0 a(y) \quad (1.5)$$

Здесь $C_{44}^0, e_{15}^0, \epsilon_{11}^0, \rho_0$ являются постоянными.

Для пьезоэлектрического слоя класса бтп с вышеупомянутым типом неоднородности касательные напряжения σ_{xz}, σ_{yz} и нормальные компоненты электрического поля D_x, D_y принимают вид:

$$\sigma_{xz} = C_{44}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial x} + e_{15}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \sigma_{yz} = C_{44}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial y} + e_{15}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.6)$$

$$D_x = e_{15}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial x} - \varepsilon_{11}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad D_y = e_{15}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial y} - \varepsilon_{11}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (1.7)$$

Подставим теперь (1.6) и (1.7) в уравнения движения (1.1) и уравнения электростатики (1.2).

Запишем уравнение электростатики в раскрытом виде:

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} = 0, \quad \nabla^2 \varphi + \frac{a'}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{e_{15}^0}{\varepsilon_{11}^0} \left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a} \frac{\partial W}{\partial y} \right] \quad (1.8)$$

Полученное соотношение (1.8) является функциональной связью между потенциалом электрического поля φ и компонентом вектора перемещения W .

Теперь раскроем уравнение движения:

$$C_{44}^0 \left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a} \frac{\partial W}{\partial y} \right] + e_{15}^0 \left[\nabla^2 \varphi + \frac{a'}{a} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = \rho_0 \ddot{W} \quad (1.9)$$

Подставив функциональную связь (1.8), получим уравнение движения, выраженное только компонентом вектора перемещения W и функцией неоднородности $a(y)$

$$C_{44}^0 \left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a} \frac{\partial W}{\partial y} \right] + \frac{e_{15}^{02}}{\varepsilon_{11}^0} \left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a} \frac{\partial W}{\partial y} \right] = \rho_0 \ddot{W}$$

$$C_{44}^0 (1 + \chi_0) \left[\nabla^2 W + \frac{a'}{a} \frac{\partial W}{\partial y} \right] = \rho_0 \ddot{W} \quad (1.10)$$

$$\nabla^2 W + \frac{a'}{a} \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\rho_0}{C_{44}^0 (1 + \chi_0)} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$$

где $\chi_0 = \frac{e_{15}^{02}}{C_{44}^0 \varepsilon_{11}^0}$ – коэффициент электромеханической связи калибровочного слоя.

2. Решение дифференциального уравнения (1.11) будем искать следующим образом:

$$W = W_0(y) a^{-1/2}(y) \exp i(kx - \omega t) \quad (2.1)$$

После простейших преобразований получим

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2 \left[1 - \frac{1}{k^2} \left(-\frac{1}{2} \frac{a''}{a} + \frac{1}{4} \frac{(a')^2}{a^2} \right) - \frac{V^2}{C_t^2} \right] W_0 = 0 \quad (2.2)$$

где $C_t^2 = \frac{C_{44}^0(1+\chi_0)}{\rho_0}$ – скорость сдвиговой волны в среде, а $V^2 = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2$ – фазовая скорость.

Очевидно, что если пренебречь неоднородностью на любом этапе расчётов, взяв $a(y) = 1$ при всей толщине $0 \leq y \leq 2h$, то получим классическую постановку задачи для однородного пьезоэлектрического слоя класса бтм, в частности, (2.2) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2 \tilde{\alpha}^2 W_0 = 0$$

$$W = W_0 \exp i(kx - \omega t)$$

$$\tilde{\alpha}^2 = 1 - \frac{\omega^2}{k^2 C_t^2} = 1 - \frac{V_0^2}{C_t^2}$$

$$\tilde{\alpha} > 0 \quad (*)$$

Здесь неравенство (*) можно переписать в виде:

$$0 < \frac{V_0^2}{C_t^2} < 1, \text{ что является условием затухания или условием существования}$$

поверхностной волны.

Также напишем дисперсионное уравнение для однородного случая:

$$T_0(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k}) = (\chi_0^2 + \tilde{\alpha}^2(1 + \chi_0)^2) \sinh[2\tilde{\alpha}\tilde{k}] \sinh[2\tilde{k}] - 2\tilde{\alpha}\chi_0(1 + \chi_0)(\cosh[2\tilde{\alpha}\tilde{k}] \cosh[2\tilde{k}] - 1) \quad (2.3)$$

Здесь введены обозначения для C_t^2 , χ_0 , $\tilde{k} = hk$, идентичные вышеперечисленным.

$$V_0^2 = C_t^2(1 - \tilde{\alpha}^2) \quad (2.4)$$

В случае отсутствия пьезоэффекта ($\chi_0 = 0$) (2.3) примет следующий вид:

$$T_0(\tilde{\alpha}, 0, \tilde{k}) = \tilde{\alpha}^2 \sinh[2\tilde{\alpha}\tilde{k}] \sinh[2\tilde{k}] \quad (2.5)$$

и решением будет $\tilde{\alpha} = 0$, $V_0^2 = C_t^2$ (объёмная волна), что означает отсутствие в слое поверхностных волн, если нет пьезоэффекта в исследуемой среде.

В длинноволновом приближении ($\tilde{k} \rightarrow 0$), когда толщина слоя $2h$ намного меньше, чем длина поверхностной акустической волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, дисперсионное

уравнение (2.3) запишется как $T_0(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k} \rightarrow 0) = -\tilde{\alpha}\chi_0 + \tilde{\alpha}^3(1 + \chi_0)$ и нетривиальным решением будет:

$$\tilde{\alpha}^2 = \frac{\chi_0}{1 + \chi_0}, \quad \frac{V_0^2}{C_t^2} = \frac{1}{1 + \chi_0} < 1 \quad (2.6)$$

Величину безразмерной скорости $\frac{V_0^2}{C_t^2}$ находим из ненулевых решений уравнения

$T_0(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k}) = 0$ при значениях \tilde{k} (в спектре от 0.01 до 5) и определённых χ_0 . Они приведены в табл.1.

Таблица 1

$\gamma=0$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\tilde{k} \ll 1$	0.9708	0.9009	0.7042	0.6451	0.5076
$\tilde{k} = 0.01$	0.9708	0.9009	0.7042	0.6451	0.5076
$\tilde{k} = 0.1$	0.9709	0.9011	0.7049	0.6459	0.5084
$\tilde{k} = 0.5$	0.9730	0.9077	0.7202	0.6628	0.5271
$\tilde{k} = 1$	0.9776	0.9225	0.7567	0.7035	0.5730
$\tilde{k} = 2$	0.9856	0.9490	0.8257	0.7818	0.6650 0.9837
$\tilde{k} = 5$	0.9938	0.9764	0.8971 0.9367	0.8613 0.8914	0.7509 0.7650

В табл. 2 приведены физико-механические характеристики и общепринятые маркировки для нескольких пьезокерамических материалов, а также приведены величины скоростей сдвиговых волн для вышеупомянутых материалов.

Таблица 2

	CdS(χ_1)	ZnO(χ_2)	PZT-7(χ_3)	PZT-5H(χ_4)	PZT-4(χ_5)
$C_{44} \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$	1.49	4.25	2.5	2.3	2.56
$\rho \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$	4.82	5.68	7.8	7.5	7.5
$e_{15} \cdot \text{Кл/м}^2$	-0.21	-0.59	13.5	-17.0	12.7
$\varepsilon_{11} \cdot 10^{-11} \text{ Ф/м}$	7.99	7.38	1710	22.71	6.45
χ	0.03	0.11	0.42	0.55	0.97
$C_t \cdot \text{м/с}$	1784	2881	2133	2180	2593

Исследуя существование решений уравнения (2.3), можно сказать, что при значениях $\tilde{k} > 2$, $\chi_0 > 0.4$ возникает второе ненулевое решение меньше значения объёмной волны, удовлетворяющее условию затухания, что свидетельствует о существовании поверхностных волн.

В случае, когда неоднородность в слое имеет место быть, в уравнении (2.2)

обратим внимание на член $-\frac{1}{2} \frac{a''}{a} + \frac{1}{4} \frac{(a')^2}{a^2} = \ell$, которым и характеризуется

влияние неоднородности на решение уравнения движения и величину фазовой скорости. Для простоты допустим, что $\ell = \text{const}$, и общий вид для функции неоднородности $a(y)$ зависит от значения ℓ .

- $\ell < 0$
 $a(y) = C_2 \cosh^2 \left[\sqrt{-\ell} (y - 2C_1) \right]$
 $C_1, C_2 = \text{const}$
- $\ell > 0$
 $a(y) = C_2 \cos^2 \left[\sqrt{\ell} (y - 2C_1) \right]$
 $C_1, C_2 = \text{const}$
- $\ell = 0$
 $a(y) = C_2 (y - 2C_1)^2$
 $C_1, C_2 = \text{const}$

Обозначим также

$$\alpha^2 = 1 - \frac{V^2}{C_t^2} - \frac{\ell}{k^2} \quad (2.7)$$

$$\alpha > 0 \quad (**)$$

Здесь неравенство (**) можно переписать в виде:

$$0 < \frac{V_0^2}{C_t^2} < 1 + \gamma^2, \text{ что является условием существования поверхностной волны.}$$

Таким образом, уравнение (2.2) примет окончательный вид:

$$\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2 \alpha^2 W_0 = 0 \quad (2.8)$$

и общее решение будет

$$W_0 = A_1 \sinh[k\alpha y] + A_2 \cosh[k\alpha y] \quad (2.9)$$

$$A_1, A_2 = \text{const.}$$

Имея решение для (2.3) и (2.1), получим решение для (1.9), подставив в него (2.4) и принимая потенциал Φ в виде

$$\Phi = \Phi_0(y) a^{-1/2}(y) \exp i(kx - \omega t). \quad (2.10)$$

Применив некоторые простые преобразования, получим уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \left[1 - \frac{\ell}{k^2} \right] \Phi_0 &= \frac{e_{15}^0}{\epsilon_{11}^0} \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2 \left[1 - \frac{\ell}{k^2} \right] W_0 \right], \quad 1 - \frac{\ell}{k^2} = \beta \\ \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial y^2} - k^2 \beta^2 \Phi_0 &= \frac{e_{15}^0}{\epsilon_{11}^0} \left[\frac{\partial^2 W_0}{\partial y^2} - k^2 \beta^2 W_0 \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \frac{e_{15}^0}{\epsilon_{11}^0} \left[A_1 \sinh[k\alpha y] + A_2 \cosh[k\alpha y] \right] + A_3 \sinh[k\beta y] + \\ &+ A_4 \cosh[k\beta y]. \end{aligned}$$

3. Итак, в частном случае, когда $\ell < 0$

$$a(y) = C_2 \cosh^2 \left[\sqrt{-\ell} (y - 2C_1) \right]$$

$$C_1, C_2 = \text{const}$$

и принимая краевые условия $a(0) = 1$, $a'(0) = 0$,
получим $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ $a(y) = \cosh^2(\sqrt{-\ell}y)$,

а функции $W(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, t)$ примут окончательный вид:

$$\begin{aligned}
 W &= \frac{(A_1 \sinh[k\alpha y] + A_2 \cosh[k\alpha y])}{\cosh(\sqrt{-\ell}y)} \exp i(kx - \omega t) \\
 \varphi &= \frac{e_{15}^0 (A_1 \sinh[k\alpha y] + A_2 \cosh[k\alpha y])}{\varepsilon_{11}^0 \cosh(\sqrt{-\ell}y)} \exp i(kx - \omega t) + \\
 &+ \frac{(A_3 \sinh[k\beta y] + A_4 \cosh[k\beta y])}{\cosh(\sqrt{-\ell}y)} \exp i(kx - \omega t)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Из формулы (1.7) запишем также окончательный вид для касательного напряжения σ_{yz}

$$\begin{aligned}
 \sigma_{yz} &= C_{44}^0 a(y) \frac{\partial W}{\partial y} + e_{15}^0 a(y) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\
 \sigma_{yz} &= A_1 C_{44}^0 (1 + \chi_0) \Omega_1 + A_2 C_{44}^0 (1 + \chi_0) \Omega_2 + A_3 e_{15}^0 \Omega_3 + A_4 e_{15}^0 \Omega_4
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Для упрощения вида последующих выражений и их дальнейшего анализа сделаем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1 &= k\alpha \cosh[k\alpha y] \cosh(\sqrt{-\ell}y) - \sqrt{-\ell} \sinh(\sqrt{-\ell}y) \sinh[k\alpha y] \\
 \Omega_2 &= k\alpha \sinh[k\alpha y] \cosh(\sqrt{-\ell}y) - \sqrt{-\ell} \sinh(\sqrt{-\ell}y) \cosh[k\alpha y] \\
 \Omega_3 &= k\beta \cosh(\sqrt{-\ell}y) \cosh[k\beta y] - \sqrt{-\ell} \sinh(\sqrt{-\ell}y) \sinh[k\beta y] \\
 \Omega_4 &= k\beta \cosh(\sqrt{-\ell}y) \sinh[k\beta y] - \sqrt{-\ell} \sinh(\sqrt{-\ell}y) \cosh[k\beta y]
 \end{aligned}$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{-\ell}}{k}, \quad \gamma^2 = -\frac{\ell}{k^2}.$$

Следовательно, α и β будут записаны с учётом вышеупомянутого обозначения

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{V^2}{C_t^2} + \gamma^2}, \quad \beta = \sqrt{1 + \gamma^2}$$

Здесь γ представляет с величину, отвечающую за численное присутствие неоднородности при расчёте скорости волны и значение $\gamma = 0$ нулевой неоднородности, то есть однородному случаю.

В этом случае фазовая скорость V^2 будет определяться следующим образом:

$$V^2 = C_t^2(1 - \alpha^2 + \gamma^2) \quad (3.3)$$

Учитывая граничные условия (1.4) и условия существования ненулевых решений $\det |A_i| = 0, i = 1, \dots, 4$, получим следующее трансцендентное дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned} T(\alpha, \chi_0, \tilde{k}, \gamma) = & 2\alpha\sqrt{1+\gamma^2}\chi_0(1+\chi_0)(\cosh[2\alpha\tilde{k}]\cosh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]-1) - \\ & - ((1+\gamma^2)\chi_0^2 + \alpha^2(1+\chi_0)^2) \sinh[2\alpha\tilde{k}]\sinh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}] + \\ & + \gamma \tanh[2\gamma\tilde{k}]\alpha(\chi_0+1) \sinh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]\cosh[2\alpha\tilde{k}] - \\ & - \gamma \tanh[2\gamma\tilde{k}]\sqrt{1+\gamma^2}\chi_0 \cosh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]\sinh[2\alpha\tilde{k}] \end{aligned} \quad (3.4)$$

Заметим что, если взять нулевой коэффициент неоднородности $\gamma = 0$ в (3.4), то совпадение (3.4) с (2.3) будет очевидным.

В случае отсутствия пьезоэффекта ($\chi_0 = 0$) (3.4) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} T(\alpha, 0, \tilde{k}, \gamma) = & -\alpha^2 \sinh[2\alpha\tilde{k}]\sinh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}] + \\ & + \alpha\gamma \tanh[2\gamma\tilde{k}]\sinh[2\sqrt{1+\gamma^2}\tilde{k}]\cosh[2\alpha\tilde{k}]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

В уравнении $T(\alpha, 0, \tilde{k}, \gamma) = 0$ в отличие от (2.5) кроме решения $\alpha = 0, V^2 = C_t^2(1 + \gamma^2)$ будем также иметь решение возникшего трансцендентного уравнения $\alpha \tanh[2\alpha\tilde{k}] = \gamma \tanh[2\gamma\tilde{k}]$, решением которого будет $\alpha = \gamma, V^2 = C_t^2$.

Если будем рассматривать предельный случай длинных волн ($\tilde{k} \rightarrow 0$), когда толщина слоя меньше длины волны, то решение для (3.4) примет вид:

$$\alpha^2 = \frac{\chi_0}{1+\chi_0} + \gamma^2, \quad \frac{V_0^2}{C_t^2} = \frac{1}{1+\chi_0} < 1. \quad (3.6)$$

Сравнивая значения (3.6) и (2.6), можно сказать, что в краевом случае неоднородность не влияет на скорость волны.

Величину безразмерной скорости $\frac{V_0^2}{C_t^2}$ находим из ненулевых решений уравнения

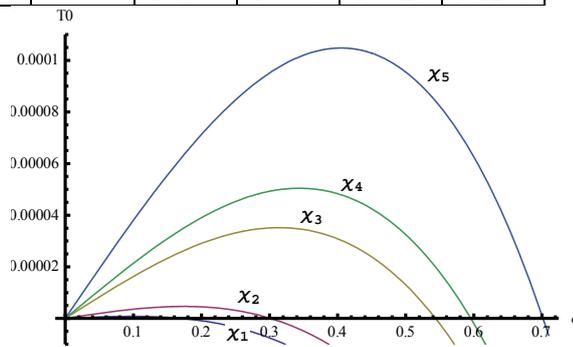
$T(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k}, \gamma) = 0$ при значениях \tilde{k} (в спектре от 0.01 до 5), определённых χ_0 (из табл.2) и неоднородности γ . Эти величины приведены в табл.3.

На фиг.1 и 2 приведены графики зависимости $\{\tilde{\alpha}; T_0(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k})\}$ для фиксированных $\tilde{k} = 0.01$ и $\tilde{k} = 2$ и разных χ_0 . На них – кривые, отображающие

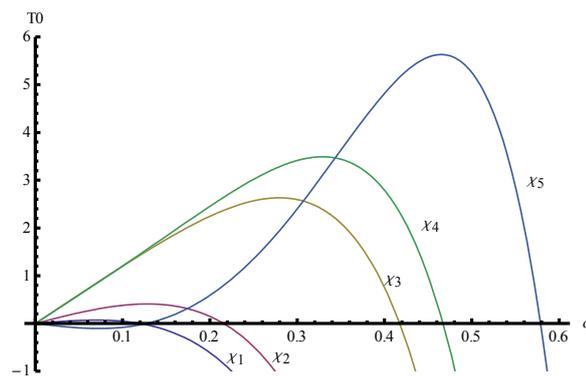
поведение дисперсионной функции $T_0(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k})$. Точки их пересечения с осью $\tilde{\alpha}$ дают корни в интересующем нас промежутке условия существования.

Таблица 3

$\gamma=0.5$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\tilde{k}=1$	0.9769	0.9201	0.7506	0.6966	0.5650
$\tilde{k}=2$	0.9812	0.9339	0.7834	0.7327 1.2297	0.6045 1.0306
$\tilde{k}=5$	0.9816	0.9350	0.7838 1.1424	0.7326 1.0934	0.6031 0.9470
$\gamma=0.7$	χ_1	χ_2	χ_3	χ_4	χ_5
$\tilde{k}=1$	0.9762	0.9179	0.7450	0.6903	0.5570
$\tilde{k}=2$	0.9785	0.9250	0.7610 1.4785	0.7077 1.3972	0.5762 1.1822
$\tilde{k}=5$	0.9785	0.9251 1.4880	0.7606 1.3606	0.7072 1.3027	0.5753 1.1288



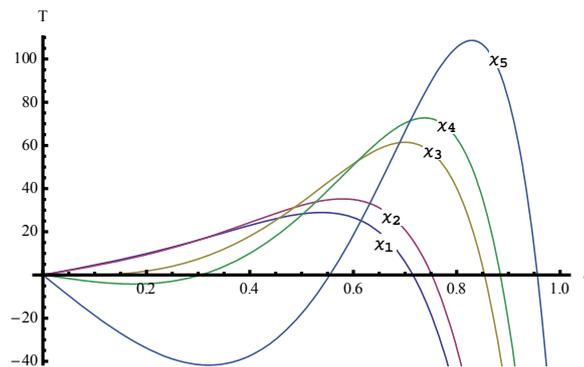
Фиг.1. Однородный случай при фиксированном $\tilde{k} = 0.01$



Фиг.2. Однородный случай при фиксированном $\tilde{k} = 2$

На фиг.2 отчетливо видно возникновение второго решения при $\tilde{k} = 2$ и χ_5 .

На фиг.3 приведён график зависимости кривых $\{\alpha; T(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k}, \gamma)\}$ для фиксированных $\tilde{k} = 2$ и разных χ_0 с учётом неоднородности $\gamma = 0.7$, отображающий поведение дисперсионной функции $T(\tilde{\alpha}, \chi_0, \tilde{k}, \gamma)$ и точки их пересечения с осью α дают корни в интересующем нас промежутке условия существования. Здесь отчётливо видно возникновение вторых решений для нескольких кривых $\chi_3, \chi_4, \chi_5, \tilde{k} = 2, \gamma = 0.7$.



Фиг.3. Неоднородный случай при фиксированном $\tilde{k} = 2$ и $\gamma = 0.7$

Заключение.

В данной работе получено дисперсионное уравнение для одного случая неоднородности пьезоактивного слоя. Исследованы возможные решения в разных диапазонах. Сделаны сравнения с однородным пьезоактивным слоем при одинаковых физико-механических характеристиках сред для нескольких материалов, приведённых в табл.2. Величины фазовых скоростей волн для интересующего материала при интересующих значениях параметров можно рассчитать, если умножить скорость C_t^2 для данного материала из табл. 2 на безразмерную величину скоростей, приведённых в табл.1 и 3.

При сравнении фазовых скоростей в средах в пределах $\tilde{k} \leq 1$ и средних значениях пьезоэффекта неоднородность не играет значительной роли, поскольку разницы между численными величинами скоростей или нет, или она не превышает 4. По этой причине использованы безразмерные скорости, значения которых для неоднородного случая при $\tilde{k} \leq 1$ не приведены в табл. 3. Но в диапазоне $\tilde{k} \geq 2$ и средних значениях пьезоэффекта разница между величинами безмерных скоростей неоднородного слоя уменьшается по сравнению с безразмерными скоростями в однородном слое на 10% и больше. К тому же, присутствие неоднородности в среде усиливает эффект возникновения вторых решений, которые, как и в однородном случае, удовлетворяют условию затухания. Падение скоростей волн и выявление вторых решений становится более очевидным с возрастанием неоднородности γ в среде, что свидетельствует о воздействии неоднородности на усиление эффекта локализации поверхностных волн.

Данная модель неоднородного слоя и подход к задаче даёт возможность исследования сред с другими вариантами неоднородности и краевыми условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. О распространении электроупругой монохроматической волны в неоднородном пьезоэлектрике. // Изв. АН Армянской ССР. Механика. 1988. Т.41. №5. С.34-40.
2. Аветисян А.С., Маргарян Дж.М. Электроупругие поверхностные волны сдвига на границе раздела двух пьезоэлектрических полупространств. // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №3-4. С.31-36.
3. Bernard Collet, Michel Destrade, Gerard A. Maugin Bleustein-Gulyaev waves in some functionally graded materials. // European Journal of Mechanics A/Solids 25 (2006) 695-706.
4. D.J. Hasanyan, G.T. Piliposian, A.H. Kamalyan, M.I. Karakhanyan. Some dynamic problems for elastic materials with functional inhomogeneties: anti-plane deformations. Continuum Mech. Thermodyn. (2003) 15: 519-527.
5. Мухсихачоян А.Р. К задаче сдвиговой поверхностной волны в неоднородной среде. // Изв. НАН Армении. Механика. 1999. Т.52. №1. С.12-16.
6. Xiaoshan Cao, Junping Shi, Feng Jin Lamb wave propagation in the functionally graded piezoelectric-piezomagnetic material plate. // Acta Mech 223, 1081-1091 (2012).
7. Liming Gao, Ji Wang, Zheng Zhong, Jianke Du. An analysis of surface acoustic wave propagation in functionally graded plates with homotopy analysis method // Acta Mech. 208, 249-258 (2009).
8. Heinonen, E., Juuti, J., and Leppavuori, S. (2005) Characterization and modelling of 3D piezoelectric ceramic structures with ATILA software. Journal of European Ceramic Society, 25, 2467–2470.
9. Бирюков С.В., Гуляев Ю.В., Крылов В.В., Плесский В.П. Поверхностные акустические волны в неоднородных средах. М.: Наука, Физматлит, 1991. 416с.
10. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.
11. Бардзокас Д.И., Кудрявцев Б.А., Сеник Н.А. Распространение волн в электромагнитоупругих средах. Editorial УРСС, 2003. 336с.

Сведения об авторе:

Камальян Андраник Арменович – Аспирант факультета математики и механики, ЕГУ

Тел.: (094)90-96-92, (060)44-73-72

E-mail: kamalyan.andranik@yahoo.com

Поступила в редакцию 13.11.2013