

УДК 539.3

**К ВОПРОСУ О НАПРЯЖЁННОМ СОСТОЯНИИ ТРЁХСЛОЙНОЙ  
ПОЛОГОЙ ОБОЛОЧКИ С УЧЁТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ  
СРЕДНЕГО СЛОЯ**

**Безоян Э.К.**

**Ключевые слова:** трёхслойная пологая оболочка, ползучесть

**Key words:** threelayer shellow shell, creep

**Բեզոյան Է.Կ.**

**Եռաշերտ ցածրանիստ թաղանթների լարվածային վիճակի վերաբերյալ հարցերը միջին շերտի սողքի հաշվառմամբ**

Գիտարկվում է եռաշերտ թաղանթի լարվածային վիճակը, երբ արտաքին և ներքին շերտերը առաձգական են և սիմետրիկ են դասավորված երկրաչափական առանցքի նկատմամբ, իսկ միջին շերտը օժտված է Ն. Հարությունյանի կողմից առաջարկված առաձգամածուցիկ ոչ գծային հատկություններով: Ընդունվում է, որ լարումները միջին շերտում ըստ բարձրության փոխվում են ոչ գծային: Լուծող հավասարումները ստանալու համար մտցված են եռաշերտությունը, ինչպես նաև ծող մոմենտները բնութագրող ֆունկցիաներ: Ստացված է թաղանթների լարվածա-դեֆորմացիոն վիճակը ուսումնասիրելու համար չորս անհայտ ֆունկցիաների նկատմամբ ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգ:

Բերված է թվային օրինակ:

**Bezoyan E.K.**

**On problem of stress state of three layer gentle shell taking into account of creep of middle layer**

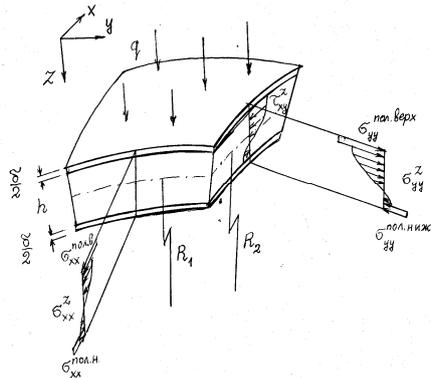
The stress state of three layer shell is considered in the condition when the external layers are elastic ones and symmetrically settled according to geometrical axis, and the middle layer has property according to non-linear viscoelasticity proposed by N.Ch. Arutyunyan. It is assumed that the stresses of middle layer are changed by non-linear relation along its thickness. For the obtaining of decisive equations it is used functions which define bending moments. For the investigation of stress-strain state, the system from four integral-differential equations for unknown functions is obtained. The numerical example is presented.

Рассматривается напряжённое состояние трёхслойной оболочки в условиях, когда наружные слои упругие и симметричные относительно геометрической оси, а средний слой деформируется согласно нелинейной теории вязкоупругости. Принимается, что напряжения в среднем слое изменяются по толщине по нелинейному закону. Для исследования напряжённо-деформированного состояния получена система интегро-дифференциальных уравнений. Приведён численный пример.

Использование трёхслойных конструкций обусловлено тем обстоятельством, что нахождение несущих слоёв на расстоянии друг от друга обеспечивает высокую сопротивляемость изгибу. Основная роль среднего слоя заключается именно в фиксации дистанции между крайними слоями в случае чистого изгиба. В условиях действия поперечных сил основная нагрузка по восприятию сдвигающих напряжений ложится уже на средний слой.

Зачастую, железобетонные оболочки рассматриваются как трёхслойные, где слои с располагающимися арматурными сетками расцениваются как несущие слои, между которыми располагается бетонный слой (фиг.1).

В настоящей работе рассматривается напряжённое состояние трёхслойных оболочек в условиях, когда наружные слои могут приниматься линейно-упругими, а средний слой обладает реологическими свойствами, согласно нелинейной теории наследственности с учётом изменения свойств материала во времени.



Фиг. 1

Итак, положим, что в трёхслойной оболочке толщины наружных слоёв  $\frac{\delta}{2}$  весьма малы по отношению к толщине среднего слоя  $h$ , причём у наружных слоёв эффективный модуль упругости и коэффициент Пуассона – соответственно  $E_1$  и  $\mu_1$  (фиг.1). Материал же среднего слоя деформируется согласно соотношениям [1]

$$\varepsilon_{ij}(t) = (2 - \delta_{ij}) \left\{ \frac{(1 + \mu) \sigma_{ij}(t) - \mu \delta_{ij} \rho(t)}{E(t)} - \int_{t_0}^t \left[ (1 + \mu) \sigma_{ij}(\tau) - \mu \delta_{ij} \rho(\tau) \right] \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - \int_{t_0}^t \left[ (1 + \mu) \sigma_{ij}(\tau) - \mu \delta_{ij} \rho(\tau) \right] F[\sigma_0(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t, \tau) d\tau \right\} \quad (i, j = x, y, z) \quad (1)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\sigma_0$  – интенсивность напряжений,  $\rho$  – первый инвариант напряжений,  $C(t, \tau)$  – мера ползучести,

$$F[\sigma_0(t)] = 1 + \beta \sigma_0^{m-1}(t)$$

где  $\beta$  и  $m$  – параметры, определяемые из эксперимента.

Принимая гипотезу прямых нормалей Кирхгофа–Лява и пренебрегая изменением напряжений по толщине наружных слоёв, получим

$$\varepsilon_{ij}^{\text{нар}} = \varepsilon_{ij} \pm (\delta_{ij} - 2) \frac{h}{2} \chi_{ij} \quad (2)$$

$$\sigma_{ij}^{\text{нар}} = \frac{T_{ij} - T_{ij}^*}{\delta} \pm \frac{6}{h^2} (M_{ij} - M_{ij}^*), \quad (i, j = x, y)$$

где  $T_{ij}^*, M_{ij}^*$  – усилия и моменты, воспринимаемые средним слоем, откуда получим

$$\begin{aligned} M_{ij}^* &= M_{ij} - D_1 \left[ (1 - \mu_1) \chi_{ij} + \mu_1 \delta_{ij} \chi \right] \\ T_{ij}^* &= T_{ij} - D_2 \left[ (1 - \mu_1) \varepsilon_{ij} + \mu_1 \delta_{ij} \varepsilon \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\chi = \chi_{xx} + \chi_{yy}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}, \quad D_1 = \frac{E_1 \delta h^2}{4(1 - \mu_1^2)}, \quad D_2 = \frac{E_1 \delta}{1 - \mu_1^2}$$

Уравнение совместности деформаций для пологих оболочек запишется так [2]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - k_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (4)$$

а для изменений кривизн  $\chi_{ij}$  запишем следующие выражения через прогибы [3]:

$$\chi_{xx} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{yy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5)$$

Представим напряжения в точках оболочки, расположенных на расстоянии  $Z$  от срединной поверхности в виде

$$\sigma_{ij}^z = \sigma_{ij} + \sigma_{ij0} \left( \frac{2z}{h} \right)^{\frac{1}{2n+1}},$$

где  $n$  – целое число,  $\sigma_{ij}$  – мембранное напряжение,  $\sigma_{ij0}$  – максимальное напряжение изгиба.

Уравнение равновесия элемента оболочки запишется так:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xx}^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}^*}{\partial y^2} = D_1 \nabla^4 w - L(w, \phi) - \nabla_k^2 \phi - q, \quad (6)$$

где

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \quad L(w, \phi) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y},$$

$$\nabla_k^2 \phi = k_x \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k_y \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}.$$

$\phi$  – так называемая функция напряжений, определяемая соотношениями [3]

$$T_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad T_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad T_{xy} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}.$$

Для усилий, воспринимаемых средним слоем, получим

$$\begin{aligned} T_{xx}^* &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - D_2 (\varepsilon_{xx} + \mu_1 \varepsilon_{yy}) \\ T_{yy}^* &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - D_2 (\varepsilon_{yy} + \mu_1 \varepsilon_{xx}) \\ T_{xy}^* &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - D_2 (1 - \mu_1) \varepsilon_{xy} \end{aligned} \quad (7)$$

Вводя для  $T_{ij}^*$  функцию  $\psi(x, y, t)$  подстановкой

$$T_{xx}^* = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad T_{yy}^* = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}, \quad T_{xy}^* = -\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y},$$

после ряда выкладок получим следующую разрешающую систему уравнений при кубической нелинейности ( $m = 3$ )  $F(\sigma_0) = 1 + \beta \sigma_0^2$  и вводя функцию  $\varphi(x, y, t)$  подстановкой

$$M_{xx}^* = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad M_{yy}^* = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad M_{xy}^* = (1 - \mu) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},$$

получим

$$\begin{aligned} \nabla^4 \varphi &= D_1 \nabla^4 w - L(w, \varphi) - \nabla_k^2 \varphi - q \\ \nabla^4 (\varphi - \psi) &= -E_1 \delta \left[ \frac{1}{2} L(w, w) + \nabla_k^2 w \right] \\ \nabla^4 \psi - E(t) \int_{t_0}^t \nabla^4 \psi \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - E(t) \int_{t_0}^t [\nabla^4 \psi + L_1(\psi, \varphi)] K(t, \tau) d\tau &= \\ = -E(t) h \left[ \frac{1}{2} L(w, w) + \nabla_k^2 w \right] & \quad (8) \\ \nabla^4 \varphi - E(t) \int_{t_0}^t \nabla^4 \varphi \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] d\tau - E(t) \int_{t_0}^t [\nabla^4 \varphi + L_2(\psi, \varphi)] K(t, \tau) d\tau &= \\ = -D \nabla^4 w, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} L_1(\psi, \varphi) &= \nabla^2 \left[ (\beta_1 N_0^2 + \beta_2 M_0^2) \nabla^2 \psi \right] + \beta_2 (1 - \mu^2) L(\varphi, z_0^2) - \\ &- (1 + \mu) L \left[ \psi, (\beta_1 N_0^2 + \beta_2 M_0^2) \right] \\ L_2(\psi, \varphi) &= \nabla^2 \left[ (\beta_1 N_0^2 + \beta_3 M_0^2) \nabla^2 \varphi \right] + \beta_1 L(\psi, z_0^2) - \\ &- (1 - \mu) L[\varphi, (\beta_1 N_0^2 + \beta_3 M_0^2)]; \\ N_0^2 &= (\nabla^2 \psi)^2 - \frac{3}{2} L(\psi, \psi); \\ M_0^2 &= (1 - \mu + \mu^2) (\nabla^2 \varphi)^2 - \frac{3}{2} (1 - \mu) L(\varphi, \varphi); \\ Z_0^2 &= (1 - 2\mu) \nabla^2 \psi \nabla^2 \varphi + 3(1 - \mu) L(\varphi, \varphi); \\ \beta_1 &= \frac{\beta}{h^2}, \quad \beta_2 = \frac{4(4n+3)^2}{(2n+3)(2n+1)} \frac{\beta}{h^4}, \quad \beta_3 = \frac{4(4n+3)^3}{(4n+5)(2n+1)^2} \frac{\beta}{h^4} \end{aligned}$$

Система (8) решается с применением метода Бубнова–Галёркина [3].  
Опуская соответствующие выкладки, ниже приведём численную иллюстрацию

рассчитанных прогибов для трёхслойной квадратной ( $axa$ ) в плане сферической оболочки при действии равномерно-распределённой поперечной нагрузки  $q$ .

Расчёты проведены при кривизнах  $k_x = k_y = \frac{24h}{a^2}$ . Мера ползучести принята в следующем виде:

$$C(t, \tau) = \left( C_0 + \frac{A}{\tau} \right) \left[ 1 - e^{-\gamma(t-\tau)} \right],$$

где  $\gamma = 0,78 \frac{1}{\text{мес.}}$ ,  $C_0 E = 1,8$ ,  $A = \frac{9,84}{E}$  мес.

Кроме того, приняты следующие данные:  $E = 2 \cdot 10^4$  МПа,  $E_1 = 2 \cdot 10^5$  МПа,

$$\beta = 12,5 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-2}, \mu_1 = 0,3; \mu = 0,2; q = \frac{80 E h^4}{a^4}, \frac{\delta}{h} = 0,01, n = (0;1).$$

В нижеприведённой таблице приведены результаты расчётов прогибов оболочки.

Анализируя полученные данные, приходим к выводу, что ползучесть существенно отражается на прогибах оболочки. Показано, что для рассмотренного примера в линейном варианте у оболочки со средним слоем из стареющего бетона прогиб превосходит прогиб аналогичной оболочки со старым бетоном с теми же свойствами на 15,5%, в нелинейном варианте тот же рост составляет 19,2%.

**Таблица прогибов оболочки  $w/h$**

$t - t_0$ (месяцы)	0	2	4	$\infty$
Теория наследственности с учётом старения линейный вариант ( $m = 1$ )	0,204	0,627	0,707	0,725
Теория наследственности с учётом старения нелинейный вариант ( $m = 3$ )	0,204	0,703	0,797	0,819
Теория наследственности для старого бетона ( $A = 0$ ) линейный вариант	0,204	0,477	0,529	0,540
Теория наследственности для старого бетона нелинейный вариант	0,204	0,504	0,559	0,570
	0,204	0,506	0,561	0,572

В вышеприведённой таблице верхние значения соответствуют  $n = 0$ , нижние –  $n = 1$ .

Таким образом, нагружая железобетонную оболочку после установления реологических свойств бетона, можно добиться уменьшения прогиба оболочки, а следовательно, и уменьшения опасности трещинообразования в оболочке, приводящего к коррозии арматуры.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести. М–Л.: Гостехтеориздат, 1952. 323с.
2. Алфутов Н.А., Зиновьев П.А., Попов Б.Г. Расчёт многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 262с.
3. Власов В.З. Общая теория оболочек и её приложения в технике. М–Л.: Гостехиздат, 1949. 784с.

### **Сведения об авторе:**

**Безоян Эдуард Коломбосович** – канд.техн.наук, доцент,  
генеральный директор 000 «Чанапар»

**Ереван. Тел.:** (010)627240  
(093)19-00-99; (091)40-24-96

**E-mail:** lfroad@rambler.ru

Поступила в редакцию 09.07.2013