

**ОПТИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОР В УПРУГОЙ  
ИЗОТРОПНОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКЕ ПРИ  
СОВМЕСТНОМ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ И  
ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ**

**Элоян А.В.**

**Ключевые слова:** пластинка, упругий, оптимальное расположение, температурное поле.  
**Key words:** plate, elastic, optimal location, temperature field.

**Էլոյան Ա.Վ.**

**Հենարանների տեղադրման օպտիմալ ընտրությունը առաձգական իզոտրոպ ուղղանկյուն սալում  
լայնական ուժի և ջերմային դաշտի համատեղ ազդեցության դեպքում**

Աշխատանքում դիտարկվում է առաձգական ուղղանկյուն սալի հենարանների տեղադրման օպտիմալ ընտրությունը, երբ միաժամանակ ազդում են լայնական ուժը և ջերմային դաշտը:

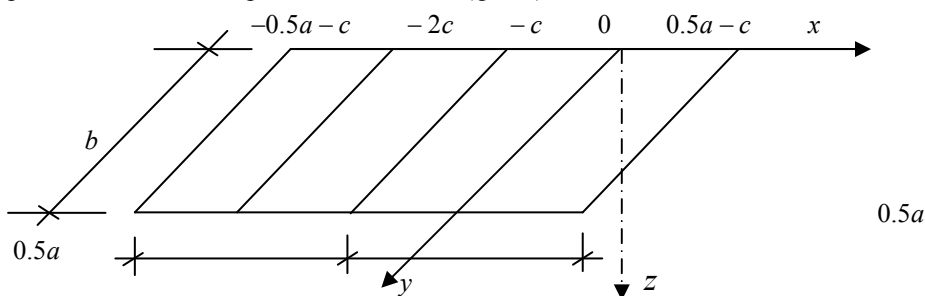
**Eloyan A. V.**

**The optimal choice of location of supports in case of thermal and transverse loading of isotropic elastic rectangular plate**

The problem of determining the optimal location of the supports along the length of the elastic, isotropic rectangular plate in the case of simultaneous action of transverse load and temperature field.

Рассматривается задача определения оптимального расположения опор по длине упругой, изотропной прямоугольной пластинки в случае одновременного действия на пластинку поперечной нагрузки и температурного поля.

Рассматривается прямоугольная пластинка размерами  $a, b, h$ , свободно опертая по продольным краям  $y = 0, y = b$  и имеющая поперечные опоры, расположенные на расстоянии  $\pm c$  от середины пластинки (фиг.1)



Фиг. 1. Расчётная схема пластинки

Предполагается, что пластинка находится под воздействием поперечной нагрузки  $q = q(y)$  и температурного поля  $T = (x, y, z)$ .

Ставится задача оптимального выбора параметра  $c$ , обеспечивающего наименьшее значение наибольшего прогиба пластинки.

Вопросы оптимального расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки рассматривались в работах [2].

Ввиду симметрии пластинки относительно линии  $x = -c$  рассматривается её

правая половина  $-c \leq x \leq 0.5a - c$ . При этом, решается задача изгиба каждого из участков  $-c \leq x \leq 0$  и  $0 \leq x \leq 0.5a - c$  с удовлетворением условий сопряжения на линии  $x = 0$ .

Прогибы пластинки  $w_1(x, y)$  и  $w_2(x, y)$  на соответствующих участках должны удовлетворять дифференциальным уравнениям, учитывающим наличие стационарного температурного поля [1]:

$$D(\Delta^2 w_i(x, y) + \Delta R_e(x, y)) = q \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

где  $w_i(x, y)$  ( $i = 1, 2$ ) – прогиб,  $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$  – цилиндрическая жёсткость пластинки,  $E$  – модуль упругости,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,

$$R_e = \frac{3(1 + \nu)}{2h^3} \alpha_t \int_{-h/2}^{h/2} zT(x, y, z) dz$$

$\alpha_t$  – коэффициент температурного линейного расширения.

Граничные условия задачи запишутся в виде:

– шарнирного опирания на продольных краях

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial y^2} = 0 \quad (i = 1, 2) \quad \text{при } y = 0, \quad y = b \quad (2)$$

– сопряжения на поперечной опоре

$$\frac{\partial w_1}{\partial y} = \frac{\partial w_2}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \quad \text{при } x = 0 \quad (3)$$

– свободного края

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0.5a - c \quad (4)$$

– симметрии

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при } x = -c \quad (5)$$

Допустим, что изменение температуры по толщине пластинки следует линейному закону и что в плоскостях, параллельных поверхностям пластинки, температура остаётся постоянной.

$$\text{В этом случае, } T(x, y, z) = \frac{2zT_0}{h} \text{ и } R_e(x, y) = \frac{\alpha_t T_0 (1 + \nu)}{4h}.$$

Прогиб пластинки  $w_i(x, y)$  ( $i = 1, 2$ ) представляются в виде:

$$w_i(x, y) = \bar{w}_i(x, y) + w_i(x, y)$$

где  $\bar{w}_i(x, y)$  – прогибы на каждом из участков пластинки от нагрузки  $q(y)$ , а

$w_i(x, y)$  – функция прогиба от действия температуры, которая предполагается изменяющейся по параболическому закону

$$w_i(x, y) = 0.5y(b - y)R_i.$$

Разлагая эту функцию в ряд Фурье, получим:

$$q(y) = \sum_{n=1}^n g_n \sin(\mu_n y), \quad y(b-y) = \sum_{n=1}^n g_n \sin(\mu_n y),$$

$$\text{где } q_n = \frac{2}{b} \int_0^b q(y) \sin(\mu_n y) dy, \quad g_n = \frac{2}{b} \int_0^b y(b-y) \sin(\mu_n y) dy, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{b}$$

и получаем

$$\bar{w}_i(x, y) = \sum \left[ \frac{q_n}{D\mu_n^4} + a_{in} \operatorname{ch}(\mu_n x) + xb_{in} \operatorname{ch}(\mu_n x) + c_{in} \sin(\mu_n x) + \right. \\ \left. + xd_{in} \sin(\mu_n x) \right] \sin(\mu_n y) \quad (i=1, 2)$$

$$w_i = -0.5R_t \sum g_n \sin(\mu_n y)$$

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), принимается в виде:

$$w_i(x, y) = \sum \left[ \frac{q_n}{D\mu_n^4} + a_{in} \operatorname{ch}(\mu_n x) + xb_{in} \operatorname{ch}(\mu_n x) + c_{in} \sin(\mu_n x) + \right. \\ \left. + xd_{in} \sin(\mu_n x) - 0.5g_n \sin(\mu_n y) \right] \sin(\mu_n y)$$

Постоянные коэффициенты  $a_{in}, b_{in}, c_{in}, d_{in}$  определяются из граничных условий (3) – (5), откуда

$$a_{1n} = -1 - 0.5R_t \sum g_n \sin(\mu_n y), \quad b_{1n} = -1 - 0.5R_t y(b-y), \quad a_{4n} = b_{4n}, \\ a_{2n} = a_{4n} \operatorname{th}(\mu_n y), \quad a_{3n} = a_{4n} \left[ \frac{\mu_n c + \mu_n \operatorname{cth}^2(\mu_n c)}{\mu_n} \right] + a_{1n} \operatorname{th}(\mu_n c), \quad b_{2n} = -Qb_{4n} + Bb_{1n}, \\ Q = \frac{2M \operatorname{ch}^2(\mu_n x) - N \operatorname{sh}^2(\mu_n x) + Mx\mu_n [\gamma \operatorname{sh}(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x) - \operatorname{sh}(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x)]}{Mx\mu_n [\gamma \operatorname{ch}^2(\mu_n x) - \operatorname{sh}^2(\mu_n x)] + (2M + N) \operatorname{sh}(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x)},$$

$$\gamma = 1 - \nu$$

$$B = \frac{M\mu_n [\gamma \operatorname{ch}^2(\mu_n x) - \operatorname{ch}^2(\mu_n x)]}{Mx\mu_n [\gamma \operatorname{ch}^2(\mu_n x) - \operatorname{sh}^2(\mu_n x)] + (2M + N) \operatorname{sh}(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x)}$$

$$M = 2\mu_n^2 + 2 - \nu, \quad N = 4\mu_n^2 + 2 - \nu,$$

$$D = \left[ \left[ 2M \operatorname{ch}^2(\mu_n x) - N \operatorname{sh}^2(\mu_n x) + Mx\mu_n [\gamma \operatorname{sh}(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x) - \operatorname{sh}(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x)] \right] \right] \times \\ \times \left[ x\mu_n \gamma \operatorname{ch}(\mu_n x) + 2 \operatorname{sh}(\mu_n x) \right] \times \\ \times \left[ x\mu_n \gamma \operatorname{sh}(\mu_n x) + 2 \operatorname{ch}(\mu_n x) \right] \left[ x\mu_n \gamma \operatorname{ch}^2(\mu_n x) - \operatorname{sh}^2(\mu_n x) \right] \times \\ \times \left[ x\mu_n \gamma \operatorname{ch}^2(\mu_n x) - \operatorname{sh}^2(\mu_n x) \right] + (2M + N) \operatorname{sh}(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x) \Big/ \\ \Big/ \left\{ Mx\mu_n [\gamma \operatorname{ch}^2(\mu_n x) - \operatorname{sh}^2(\mu_n x)] + (2M + N) \operatorname{sh}(\mu_n x) \operatorname{ch}(\mu_n x) \right\}$$

Имея значения  $w_i(x, y)$ , можно рассматривать следующую оптимизационную задачу:

$$\text{найт } \min_c \max_x w_i(x, y) \quad (i = 1, 2) \quad x \in [-c; 0.5a - c], \quad 0 \leq c \leq 0.5a \quad (6)$$

при заданных значениях  $T$  и  $h$ .

Введём безразмерное значение для прогиба пластинки:

$$\bar{w}_i(\bar{x}, \alpha) = w_i(x, c) D / q_0, \quad \text{где } \bar{x} = x / a, \quad \alpha = c / a.$$

Таблица 1.

$\lambda/T$	1/3	1/2	1	2
-30	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
-25	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
-20	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
-15	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
-10	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
-5	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
0	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
5	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
10	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
15	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
20	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
25	$\alpha=0,265$ $w=1.004$	$\alpha=0,265$ $w=1.102$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=1.787$
30	$\alpha=0,265$ $w=0.367$	$\alpha=0,265$ $w=0.615$	$\alpha=0,265$ $w=1.599$	$\alpha=0,265$ $w=2.011$

Отметим, что при  $\alpha = 0$  ( $c = 0$ ) получаются две пластинки длиной  $0.5a$ , два края которых  $y = 0, b$  свободно опёрты, края  $x = 0$  жёстко заделаны, а край

$x = 0.5a$  ( $x = -0.5a$ ) свободен. В случае же  $\alpha = 0.5a$  получается пластинка длиной  $\alpha$ , все четыре края которой  $x = 0; -a$   $y = 0; b$  свободно опёрты.

Результаты решения оптимизационной задачи (6) для различных отношений сторон  $\lambda = a/b$  пластинки и при заданных значениях от  $-30^{\circ}\text{C}$  до  $30^{\circ}\text{C}$  температур приведены в табл.1

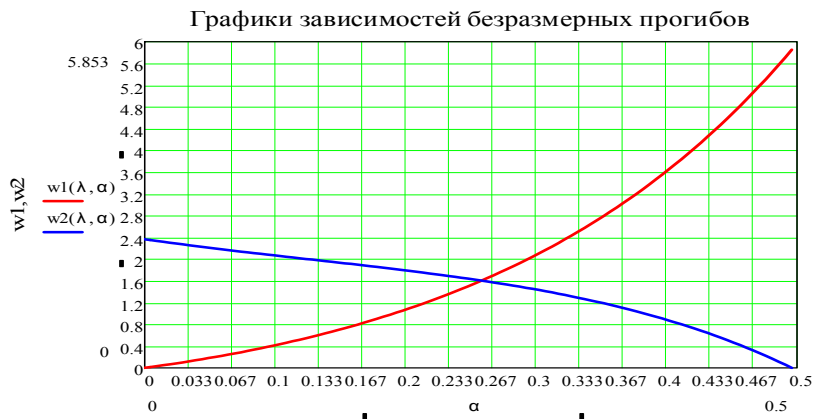
Как следует из таблицы, расположение опор не зависит от температуры и для всех  $\lambda$  наилучшим значением параметра по длине пластинки является

$$\alpha_* = 0.265 \quad (c = 0.265a).$$

Таким образом, величина  $\alpha_* = 0.265$  является характеристикой для упругой изотропной прямоугольной пластинки, нагружённой температурным полем и поперечной нагрузкой  $q = q(y)$ , свободно опёртых по краям  $y = 0, b$ .

На фиг.2 приведены графики зависимостей безразмерных прогибов под воздействием температурного поля и поперечной нагрузки при  $\lambda = a/b = 1$ ,  $h = 5$  мм и  $T = 25^{\circ}$ .

Здесь на оси  $O\alpha_*$  точка  $\alpha_* = 0.265$  ( $c = 0.265a$ ) соответствует оптимальному расположению опор, обеспечивающему наименьшее значение наибольшего по координатам  $x, y$  прогиба пластинки  $\bar{w}_i(\bar{x}, \alpha) = 1.599$ .



Фиг.2

## ЛИТЕРАТУРА

1. Белубекян М.В., Саргсян М.Г., Саноян Ю.Г. Управление перемещениями в пьезопластинках с помощью электрического поля. //Вестник инженерной академии Армении. 2009. Т.6. №2. С.255-261.
2. Гнуни В.Ц., Элоян А.В. Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. №3. С.14-17.
3. Тимошенко С.П. Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Физматгиз, 1975. 704с.

**Сведения об авторе:** Элоян Асатур Ваноевич – доцент кафедры «Промышленное и гражданское строительство», Гюмрийский филиал ГИУА, канд. техн. наук, доцент.

**Тел.:** (094) 583167;

**E-mail:** aeloyan@yandex.ru.

Поступила в редакцию 11.06.2013