ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика

**УДК 539.3**

# РАСПРОСТРАНЕНИЕ СДВИГОВЫХ ВОЛН В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ В АНТИПЛОСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

**Погосян Н. Д., Саноян Ю. Г. , Терзян С. А.**

**Ключевые слова:** волна, однородный слой, неоднородный слой, свободная граница.
**Key words:** shear wave, homogeneous layer, nonhomogeneous layer, free boundary.

**Պողոսյան Ն. Ջ., Սանոյան ՅՈՒ. Գ., Թերզյան Ս. Հ.**
**Սահքի ալիքների տարածումը երկշերտ միջավայրում**

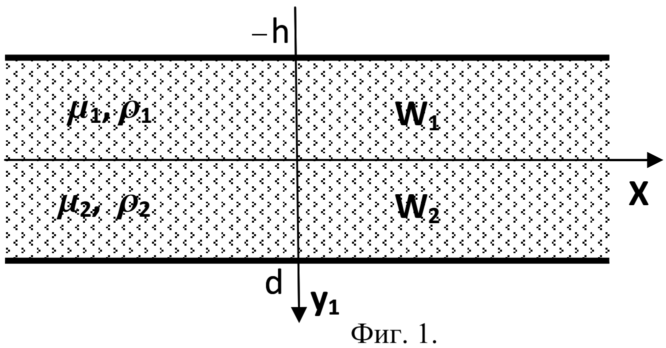
Դիտարկվում է հակահարթ ալիքների տարածումը երկշերտ միջավայրում երբ մի շերտն համասեռ է, իսկ մյուս շերտն ունի էքսպոնենցիալ անհամասեռություն: Ուսումնասիրվել է ստացված դիսպերսիոն հավասարումը արագությունը բնութագրող պարամետրի նկատմամբ:

**Poghosyan N. D., Sanoyan Ju. G., Terzyan S. A.**
**Shear Waves Propagation in Two-Layer Media**

The propagation of shear waves in a two-layer medium when one layer is homogeneous and other heterogeneous with exponentially heterogeneity is considered. The obtined dispersion equation for velocity is studied.

Рассматривается распространение сдвиговых волн в двухслойной среде, когда один слой однородный, а другой неоднородный с экспоненциональной неоднородностью. Изучено полученное дисперсионное уравнение относительно параметра, характеризующего скорость.

Задаче распространения упругих волн в двухслойной среде посвящены работы Jones J.P. [1], Бреховского Л.М. [2] и др. В данной работе изучается двухслойная среда (фиг.1), где первый слой {x∈R, y∈[-h,0]} имеет экспоненциальную неоднородность, а второй слой {x∈R, y∈[0,d]} – однородный с постоянным модулем сдвига $\mu_{20}$ и плотностью $\rho_{20}$.




Фиг. 1.

Предполагается, что модуль сдвига и плотность слоя 1 меняются по толщине по закону

$$\mu_1(x,y)=\mu_{10}e^{2\alpha y}, \quad \rho_2(x,y)=\rho_{20}e^{2\alpha y}, \quad y\in[-h,0] \tag{1}$$

На границах $y=-h, \ y=d$ заданы условия свободной границы

$$\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=-h} = 0\,, \left.\frac{\partial W_2}{\partial y}\right|_{y=d} = 0\ . \tag{2}$$

На границе контакта слоёв 1 и 2 принимаются условия непрерывности перемещений и касательных напряжений

$W_1(x,0) = W_2(x,0)$, $\sigma_{1,yz}(x,0) = \sigma_{2,yz}(x,0)$

или с учётом закона Гука

$$W_1(x,0) = W_2(x,0)\,,\ \mu_{10}\left.\frac{\partial W_1}{\partial y}\right|_{y=0} = \mu_{20}\left.\frac{\partial W_2}{\partial y}\right|_{y=0}\ . \tag{3}$$

Уравнение распространения чисто сдвиговых волн сдвига в слое 1 имеет вид

$$c_{t1}^2\left(\Delta W_1 + 2\alpha\frac{\partial W_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 W_1}{\partial t^2}\,,\quad \text{где } c_{t1}^2 = \frac{\mu_{10}}{\rho_{10}}\ . \tag{4}$$

Уравнение распространения волн сдвига в слое 2 с постоянным модулем сдвига $\mu_{20}$ и плотностью $\rho_{20}$ будет

$$c_{t2}^2\Delta W_2 = \frac{\partial^2 W_2}{\partial t^2}\,,\qquad \text{где } c_{t2}^2 = \frac{\mu_{20}}{\rho_{20}}\ . \tag{5}$$

Рассматривается антиплоская задача, т.е. вектор перемещения представляется в виде

$$\vec{u} = \left[0, 0, W\left(x, y, t\right)\right]. \tag{6}$$

Требуется найти решение уравнений (4) и (5), удовлетворяющие граничным условиям (2) и (3). Решение уравнения (4) представим в виде гармонической волны, распространяющейся в направлении оси $X$

$$W_1 = \left(A_1 e^{kp_1 y} + B_1 e^{kp_2 y}\right)\exp i(kx - \omega t)\,, \tag{7}$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{\alpha}{k} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{k^2} - \frac{\omega^2}{k^2 c_{t1}^2} + 1} = -\frac{\alpha}{k} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2}{k^2} - \theta\eta + 1}\,, \eta = \frac{\omega^2}{k^2 c_{t2}^2}\,, \theta = \frac{c_{t2}^2}{c_{t1}^2}\ .$$

Решение уравнения (15) имеет вид

$$W_2 = \left(A_2 \sin k\sqrt{\eta - 1}\,y + B_2 \cos k\sqrt{\eta - 1}\,y\right)\exp i(kx - \omega t)\ . \tag{8}$$

Подставляя эти решения в граничные условия (2) и (3), получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&A_1 p_1 e^{-kp_1 h} + B_1 p_2 e^{-kp_2 h} = 0\,,\\
&A_2 \cos k\sqrt{\eta - 1}\,d + B_2 \sin k\sqrt{\eta - 1}\,d = 0\,,\\
&A_1 + B_1 - B_2 = 0\,,\\
&A_1 kp_1 + B_1 kp_2 - A_2 k\gamma\sqrt{\eta - 1} = 0\,,
\end{aligned} \tag{9}$$

где $\gamma = \mu_{20} / \mu_{10}$ .

Равенство нулю детерминанта системы приводит к уравнению, определяющему фазовую скорость волны

$$\begin{vmatrix} p_1 e^{-kp_1 h} & p_2 e^{-kp_2 h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos k\sqrt{\eta - 1}\,d & -\sin k\sqrt{\eta - 1}\,d \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ kp_1 & kp_2 & -k\gamma\sqrt{\eta - 1} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

После преобразований получим

$$\operatorname{tg}\chi kh=-\frac{\kappa\gamma\sqrt{\eta-1}\chi\operatorname{tg}kd\sqrt{\eta-1}}{k\left(\theta\eta-1\right)+\gamma\alpha\sqrt{\eta-1}\operatorname{tg}kd\sqrt{\eta-1}},\tag{10}$$

где $\chi=\sqrt{\theta\eta-1-\alpha^2/k^2}$ .

При $\alpha$=0, $\chi=\sqrt{\theta\eta-1}$ получим

$$\sqrt{\theta\eta-1}\operatorname{tg}kh\sqrt{\theta\eta-1}+\gamma\sqrt{\eta-1}\operatorname{tg}kd\sqrt{\eta-1}=0,\tag{11}$$

Случай $\alpha=0$ соответствует тому, когда оба слоя однородны. Формулу (10) после введения обозначений $d/h=r,\ kh=\xi,\ \alpha h=\varepsilon$ можно записать в виде

$$\operatorname{tg}\sqrt{\left(\theta\eta-1\right)\xi^2-\varepsilon^2}=-\frac{\gamma\sqrt{\eta-1}\sqrt{\left(\theta\eta-1\right)\xi^2-\varepsilon^2}\operatorname{tg}r\xi\sqrt{\eta-1}}{\xi\left(\theta\eta-1\right)+\gamma\varepsilon\sqrt{\eta-1}\operatorname{tg}r\xi\sqrt{\eta-1}}.\tag{12}$$

При $kd\to\infty$ получим $\eta-1<0$ и тогда

$$\operatorname{tg}\chi kh=\frac{\gamma\chi\sqrt{1-\eta}}{\theta\eta-1-\gamma\alpha\sqrt{1-\eta}/k},\tag{13}$$

которое представляет дисперсионное уравнение задачи Лява [4] с неоднородным слоем, внешняя граница которой свободна от нагрузок. При $\eta=1$ из (12) получим

$$\operatorname{tg}\sqrt{\theta-1-\frac{\alpha^2}{\kappa^2}}\kappa h=0,\quad \sqrt{\theta-1-\frac{\alpha^2}{\kappa^2}}\xi=\pi n$$

или $\xi=-\dfrac{\pi n}{\sqrt{\theta-1-\alpha^2/\kappa^2}}$, $n\in Z$ .

Уравнение (11) имеет бесконечно много решений, помимо этого, надо учесть решения системы уравнений

$$\begin{cases}\operatorname{tg}kd\sqrt{\eta-1}=0,\\ \operatorname{tg}kh\sqrt{\eta\theta-1}=0,\end{cases}\quad \begin{cases}kd\sqrt{\eta-1}=\pi n.\\ kh\sqrt{\eta\theta-1}=\pi m.\end{cases}\quad m,n\in N.\tag{14}$$

Отсюда получается зависимость между $d$ и $h$

$$d=\frac{\pi nh\sqrt{\theta}}{\sqrt{(1-\theta)k^2h^2+\pi^2m^2}}.\tag{15}$$

В частности, при $n=1,\ m=1$ получим

$$d=\frac{\pi h\sqrt{\theta}}{\sqrt{(1-\theta)k^2h^2+\pi^2}}.$$

Аналогично для неоднородной среды получим:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}\sqrt{\theta\eta-1-\alpha^2/k^2}\times kh=0,\\ \operatorname{tg}kh\sqrt{\eta-1}=0,\end{cases}\quad \begin{cases}kh\sqrt{\theta\eta-1-\alpha^2/k^2}=\pi n,\\ kd\sqrt{\eta-1}=\pi m.\end{cases}\quad m,n\in N$$

отсюда получим

$$d=\frac{\pi nh\sqrt{\theta}}{\sqrt{k^2h^2(1-\theta)+\pi^2m^2+\alpha^2n^2}}$$

В частности, при $n=1,\ m=1$ получим зависимость

$$d = \frac{\pi h\sqrt{\theta}}{\sqrt{k^2h^2(1-\theta)+\pi^2+\alpha^2}}.$$

При $\theta = 1$ и $\gamma = 1$ из уравнения (11) получим

$$\sqrt{\eta-1}(\mathrm{tg}kd\sqrt{\eta-1}+\sqrt{\eta-1}\,\mathrm{tg}kh\sqrt{\eta-1}) = 0$$

или $\sin k(h+d)\sqrt{\eta-1} = 0$, что представляет собой решение задачи об однородном слое толщиной $h+d$. В уравнении (11) при $kd \to \infty$ величина $\eta$ должна удовлетворять условию $\eta < 1$

$$\sqrt{\eta-1}\mathrm{tg}kh\sqrt{\theta\eta-1}+\gamma i\sqrt{\eta-1}\,\mathrm{tg}ikd\sqrt{\eta-1} = 0.$$

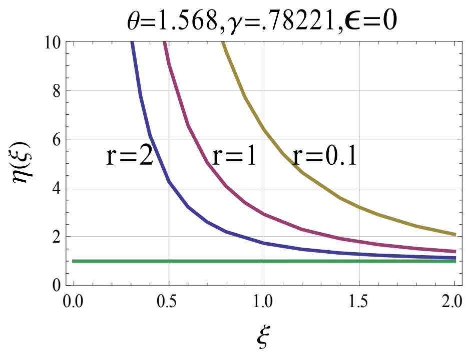
Учитывая, что

$$\lim_{kd\to\infty}\mathrm{th}\,kd\sqrt{1-\eta} = 1,$$

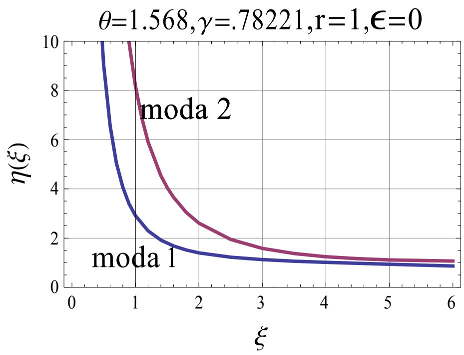
получим

$$\mathrm{tgkh}\sqrt{\theta\eta-1} = \frac{\gamma\sqrt{1-\eta}}{\sqrt{\theta\eta-1}}.$$

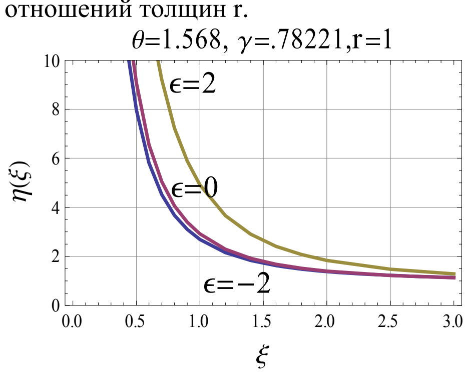
Ниже приведены результаты численных расчётов.



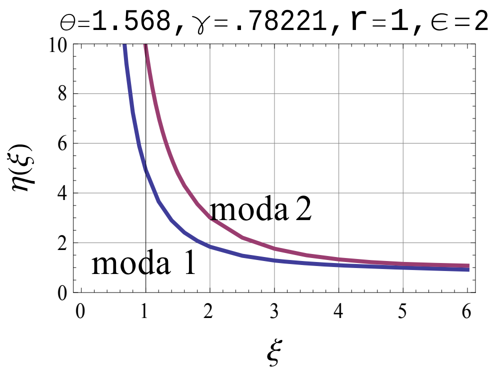

Фиг.2. Зависимость $\eta(\xi)$ для однородных слоёв при разных значениях отношений толщин r.




Фиг. 3. Моды $\eta(\xi)$ для однородных слоёв




Фиг.4. Зависимости $\eta(\xi)$, когда один слой неоднородный для разных $\varepsilon$.




Фиг.5. Моды зависимостей $\eta = \eta(\xi)$ в неоднородном случае

Значения $\eta(\xi)$ на фиг. 2 при увеличении $\xi$ уменьшаются и становятся меньше единицы.

Таким образом, распространение волн в двухслойных средах, когда первый слой неоднородный, а второй однородный, имеет следующие особенности:

1) число волн бесконечно, если скорость распространения сдвиговой волны больше скорости объёмной волны первого слоя, умноженной на $\sqrt{1+\alpha^2/k^2}$, и больше скорости объёмной волны второго слоя;

2) существует конечное число волн, если скорость распространения сдвиговой волны больше скорости объёмной волны первого слоя, умноженной на $\sqrt{1+\alpha^2/k^2}$, и меньше скорости распространения объёмной волны второго слоя;

3) не существует сдвиговых волн, распространяющихся со скоростью меньшей минимума скорости объёмной волны первого слоя, умноженной на $\sqrt{1+\alpha^2/k^2}$, и меньше скорости объёмной волны второго слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jones J.P. Wave Propagationin a Two-Layered Medium.//Journal of Applied Mechanics. 1964. June. Pp.213-222.
2. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342с.
3. Даноян З.Н., Даноян Н.З., Манукян Г.А. Поверхностные электроупругие волны Лява для двух слоёв на пьезоэлектрической подложке.// Изв. НАН Армении. Механика. 2001. Т.54. № 4. С.22-25.
4. Мхитарян А.М., Погосян Н.Д., Терзян С.А. Поверхностная волна типа Лява для слоя с эспоненциальной неоднородностью по толщине.// Изв. НАН Армении. Механика. 2006. Т.59. № 4. С.39-43.
5. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир,1975. 872с.

**Сведения об авторах:**

**Погосян Норик Джанибекович –** науч. сотр. Института механики НАН Армении.
**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б.
**Тел.:** (37410) 233598. **E-mail:** poghosian.norik@mail.ru

**Саноян Юрий Геворкович –** ст. науч. сотр. Института механики НАН Армении.
**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б.
**Тел.:** (37410) 541319. **E-mail:** yuriisanoyan@mail.ru

**Терзян Саркис Арутюнович –**науч. сотр. Института механики НАН Армении.
**Адрес:** 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24б.
**Тел.:** 340432. **E-mail:** sat_and_@yahoo.com

Поступила в редакцию 27.08. 2013