ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №4, 2013 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ КОЛОНН

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: вязкоупругий стержень, медленное и ударное нагружения, потеря устойчивости, критические моменты.
Keywords: viscoelastic beam, slow and impact loading, instability, critical moment.

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Առաձգամածուցիկ սյունի կայունության մասին

Դիտարկվում է առաձգամածուցիկ (տիպիկ նյութ) ձողի կայունությունը դանդաղ բեռնավորման և հարվածի դեպքերում: Առաջին դեպքում կառուցված է ճկվածքների փոփոխության կորերը, իսկ երկրորդ դեպքում՝ որոշվում են կայունությունը կորցնելու ակնթարթային և երկարատև ժամանակները:

Movsisyan L.A. , Nersisyan G.G.
About stability of viscoelastic columns

The problem of stability beems as slow and impact loading is studed. In the first case the curves increase deflection and the second case instants nd long moments of instability are difined.

В настоящей статье изучается задача устойчивости вязкоупругого (типичный материал) стержня как при медленном, так и быстром (ударном) нагружении.

В первом случае построены кривые возрастания прогибов, во втором определяются мгновенные и длительные моменты потери устойчивости.

Работа [1] является основополагающей в области динамической устойчивости упругих стержней. В дальнейшем в этом же духе рассматривались многочисленные задачи как для стержней, так и для цилиндрических оболочек [2,3 и др.]. В [1] нагружение предполагается медленным, в связи с чем сжимающая сила принимается однородной относительно пространственной координаты. Однако при быстрых нагружениях или при ударе процесс распространения продольных волн должен быть учтён, как в [4,5].

В качестве заглавия настоящей статьи взято перефразированное из [1].

1. Уравнение продольного движения

$$\tilde{E}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Уравнение возмущённого движения (устойчивости)

$$\tilde{E}J\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\rho F\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=EJ\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} \tag{1.2}$$

Все обозначения обычные, только заметим, что w – полный прогиб, а w_0 – начальная неправильность.

Осевая сила при этом определяется как

$$P=\tilde{E}F\frac{\partial u}{\partial x} \tag{1.3}$$

Как уже было отмечено, материал стержня – вязкоупругий

$$\tilde{E}u = E\left(1-\Gamma^*\right)u = E\left(u - \gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}udt\right) . \qquad (1.4)$$

Для возмущённого движения на концах балки принимаются условия свободного опирания:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l . \qquad (1.5)$$

При нулевых начальных условиях рассмотрим два случая продольного нагружения, когда оно совершается медленно и быстро в виде удара.

2. При медленном нагружении инерционным членом в (1.1) можно пренебречь [1]. Условия на концах такие:

$$u = 0 \quad \text{при} \quad x = 0; \quad u = -ct \quad \text{при} \quad x = l , \qquad (2.1)$$

что соответствует тому, что один конец стержня неподвижен, а второй конец движется в сторону первого с постоянной скоростью. Кстати, эта задача адекватна случаю, когда на конце стержня производится удар с бесконечной массой со скоростью c [5].

Тогда продольная сила из (1.1), (1.3) и (2.1) будет

$$P = -\tilde{E}F\frac{ct}{l} , \qquad (2.2)$$

которая на основании (1.4) –

$$P(t) = -EF\frac{c}{l}\left[t - \frac{\gamma}{\alpha^2}\left(e^{-\alpha t} + \alpha t - 1\right)\right] \qquad (2.3)$$

Для прогибов, в соответствии с (1.5), взяв

$$w = f_m^{(t)}\sin\lambda_m x,\ w_0 = f_m^{(0)}\sin\lambda_m x\ ,\ \lambda_m\frac{m\pi}{l}, \qquad (2.4)$$

будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{d^2 f_m}{dt^2} + \omega_m^2\left(1 - \frac{P(t)}{P_m}\right)f - \omega_m^2\gamma\int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)}f_m(\tau)d\tau = \\ = \omega_m^2 f_m^{(0)}\left[1 - \frac{\gamma}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha t}\right)\right]\end{gathered} \qquad (2.5)$$

Здесь

$$\omega_m^2 = \frac{EJ}{\rho F}\lambda_m^4\ ,\ P_m = EJ\lambda_m^2 .$$

Если принять новые обозначения:

$$At = \xi,\ A = \frac{clF}{J\pi^2},\ \beta = \frac{\alpha}{A}\ ,\ \Omega^2\frac{\omega^2}{A^2},\ \frac{\gamma}{\alpha} = \chi\ , \qquad (2.6)$$

то систему (2.5) можно записать в виде (индексы опущены):

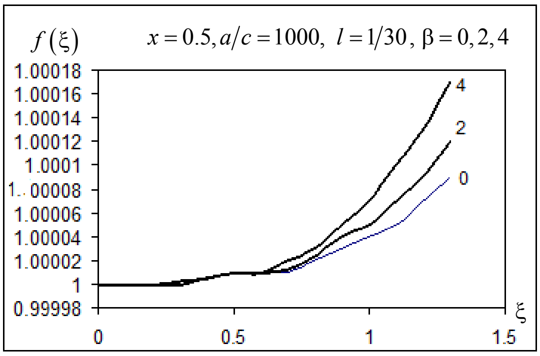
$$\begin{gathered}\frac{d^2 f}{d\xi^2} + \Omega^2(1-\xi)f - \Omega^2\beta\chi\int_0^\xi e^{-\beta(\xi-\eta)}fd\eta + \\ +\Omega^2\chi\frac{1}{\beta}\left(\beta\xi - 1 + e^{-\beta\xi}\right)f = \Omega^2 f^0\left[1 - \chi\left(1 - e^{-\beta\xi}\right)\right]\end{gathered} \qquad (2.7)$$

Для упругого случая решение выражается через функции Бесселя [1]. Здесь только возможно численное решение. Так как для стержня минимальная критическая сила получается при одной полуволне $(m=1)$, то численные данные также проводятся для этого случая с начальными условиями:

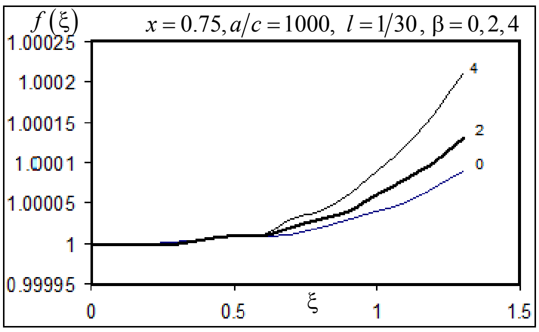
$$f_1(0)=f_1^{(0)}\ ,\ f_1^t(0)=0 \qquad (2.8)$$

Расчёты проводились методом Рунге-Кута для $a/c=10^4$, для стержня с поперечным сечением в виде прямоугольника – при различных соотношениях h/l.
Коэффициент χ характеризует отношение длительного модуля упругости к мгновенному, т.е.
при $\chi=0.5\rightarrow E_\infty=0.5E$ $\quad a-\chi=0.75\rightarrow E_\infty=0,25E$.
Коэффициент β характеризует „скорость" наступления E_∞ ($\beta=\alpha t_{np}$, где $t_{np}=\dfrac{J\pi^2}{lF}$ – время, когда сжимающая упругая сила достигает Эйлерова значения – $EJ\pi^2/l^2$). Значение $\beta=0$ соответствует упругому значению, а $\beta=2$, когда Эйлерова сила достигается раньше, чем предельное вязкоупругое состояние (E_∞), а $\beta=4$ –наоборот.

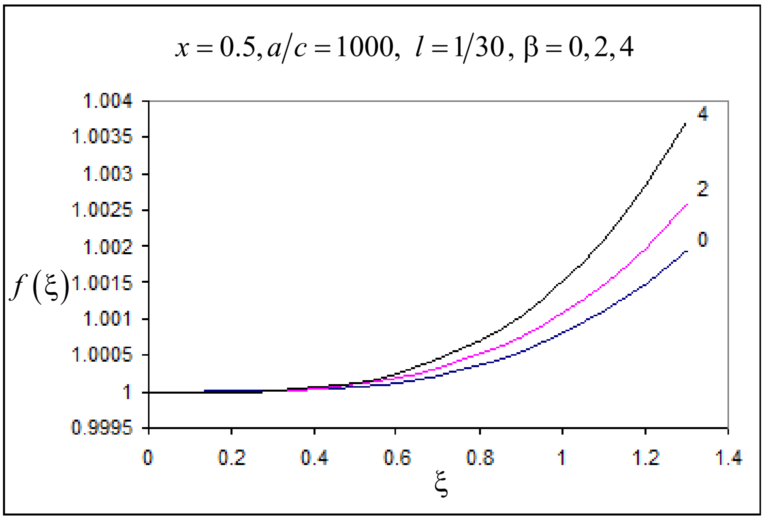
Соответствующие кривые возрастания амплитуд приведены на фиг.1–4.



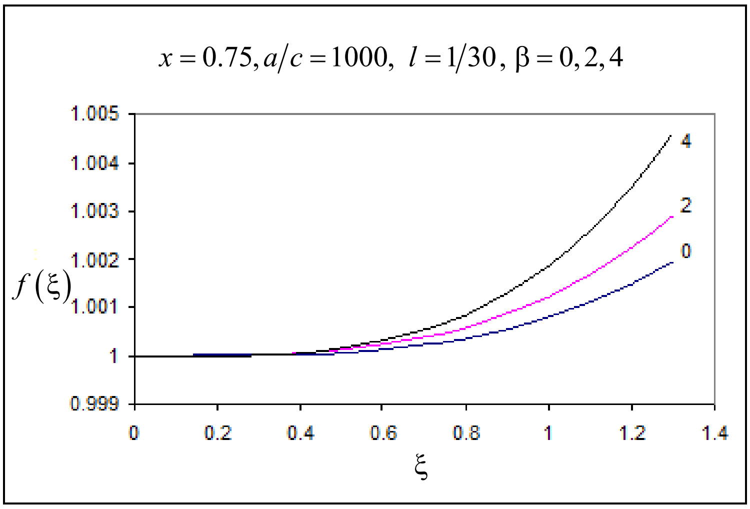
Фиг.1.



Фиг.2.



Фиг.3.



Фиг.4.

По оси абсцисс отложена безразмерная ξ (при $\xi = 1$ сжимающая сила достигает Эйлерова значения).

В общем, ничего неожиданного нет. При $\xi = 1$, во-первых, амплитуды – конечные величины и чем меньше длительный модуль упругости, тем больше они по сравнению с упругим случаем. Нужно отметить также следующее: при сравнительно длинном стержне $(l = 50h)$ возрастание амплитуд сопровождается заметным колебательным процессом.

3. При быстрых нагружениях (при ударе) решение уравнения (1.1) должно быть точным. Если применять преобразование Лапласа, то для изображения $\bar{u}$ будем иметь

$$\overline{u}=c_1e^{-p_1x}+c_2e^{-p_1x}\ ,\ p_1=\frac{p}{a}\sqrt{1+\frac{\gamma}{p+\alpha-\gamma}}\ . \tag{3.1}$$

Удовлетворяя преобразованным условиям (2.1), для силы P при первом прохождении волны (для малых моментов времени) приближённо будем иметь (до момента времени, когда сжимающая волна достигнет другого конца.):

$$P=-EF\frac{c}{a}e^{-\frac{\gamma}{2a}x}\ ,\ 0\le x\le at \tag{3.2}$$

В частном случае, для упругого случая $(\gamma=0)$ получим [4,5].

Изучая задачи устойчивости для определения критического момента времени, будем исходить из однородной части уравнения (1.2), отбрасывая также инерционный член, так как по определению критическое время – это время, когда движение системы перестаёт быть колебательным [5]. Нужно отметить, что помимо вязкоупругого случая должно быть добавлено ещё дополнительное условие. Ведь и при статике для вязкоупругого случая существуют мгновенная и длительная критические силы.

Итак, решение уравнения

$$\tilde{E}J\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right)=0 \tag{3.3}$$

будем искать, как и в (2.4), в виде

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}f_m\left(t\right)\sin\lambda_m x \tag{3.4}$$

при этом, $P\left(x,t\right)$ представим как

$$P=-EF\frac{c}{a}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(t\right)\cos\lambda_n x$$

$$a_0=\frac{1}{r}\left(1-e^{-ry}\right),\ r=\frac{\gamma l}{2a},\ y=\frac{at}{l} \tag{3.5}$$

$$a_m=\frac{2}{r^2+m^2\pi^2}\left[e^{-ry}\left(m\pi\sin m\pi y-r\cos m\pi y\right)+r\right]$$

С учётом (3.4) и (3.5) для неизвестных f_m получим систему

$$2n^3\left(1-\Gamma^*\right)f_n=\lambda\left[\left(2a_0-a_{2n}\right)nf_n+\sum_{\substack{q=1\\ q\ne n}}^{\infty}q\left(a_{n-q}-a_{n+q}\right)f_q\right] \tag{3.6}$$

Здесь

$$\lambda=\frac{EF\frac{c}{a}}{P_э}\ ,\ P_э=\frac{EJ\pi^2}{l^2}$$

Интегральную систему можно привести к дифференциальной. Если (3.6) дифференцировать по t, а затем из обоих систем исключить интегральные члены, то получится система дифференциальных уравнений первой степени относительно f_n.

Теперь проведём аналог с обычной задачей устойчивости стержня (напр., [6]). Там равенство нулю коэффициента перед f_n^i даёт мгновенную критическую силу, а перед f_n – длительную. Такую же идеологию будем проводить относительно полученной системы. Итак, мгновенная критическая сила определится из условия

$$\det\left\|d_{mn}^0\right\| = 0$$

$$d_{mn}^0 = \frac{2m^3}{\lambda} - \left(2a_0 - a_{2m}\right)m, \; m = n \tag{3.7}$$

$$\left(a_{m+n} - a_{m-n}\right)n \;, \; m \neq n$$

И соответственно для длительной силы будем иметь условие

$$\det\left\|d_{mn}^{(t)}\right\| = 0 \tag{3.8}$$

$$d_{mn}^{(1)} = \begin{cases} \dfrac{2em^3}{\lambda} - \left(2a_0 - a_{2m}\right)m - \dfrac{1}{2r}\left(1-e\right)\left(2b_0 - b_{2m}\right)m, \; m = n \\ \left(a_{m+n} - a_{m-n}\right)n + \dfrac{1}{2r}\left(1-e\right)\left(b_{m+n} - b_{m-n}\right)n, \;\; m \neq n \end{cases} \tag{3.9}$$

Здесь

$$b_0 = e^{-ry}, \; b_m = 2e^{-ry}\cos m\pi y, \; e = E_\infty / E$$

В таблице приведены значения λ в зависимости от y и e, т.е. какова должна быть сила, чтобы потеря устойчивости произошла в такой длине y (то же самое в такой момент времени).

Таблица

y \ e	1	0,5	0,25
0.2	7.455	4.107	2.748
0.3	3.664	2.052	1.368
0.4	2.303	1.317	0.874
0.5	1.668	0.980	0.646
0.6	1.330	0.811	0.529
0.7	1.144	0.731	0.470
0.8	1.046	0.719	0.445
0.9	1.006	0.716	0.436
1	1	0.709	0.424

ЛИТЕРАТУРА

1. Гоф Н. Динамика устойчивости упругих колонн. //Механика (сб.пер.): ИИЛ. 1952. №3. С.117-129.
2. Мовсисян Л.А. Об одной динамической задаче цилиндрической оболочки. //Докл.АН Арм.ССР. 1961. Т.32. №5. С.225-230.
3. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ГИФМА, 1963. 879с.
4. Коппа А. О механизме выпучивания круговой цилиндрической оболочки при продольном ударе.//Механика. (сб.пер.) 1961. №6. С.145-164.

5. Мовсисян Л.А. Об устойчивости упругой балки при продольном ударе. //Докл.АН Арм.ССР. 1969. Т.49. №3. С.124-130.
6. Потапов В.А. Устойчивость вязкоупругих элементов конструкций. М.: Стройиздат, 1986. 312с.

<u>Сведения об авторе:</u>

Мовсисян Лаврентий Александрович – доктор техн.наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН Армении.
0019, Ереван, Армения, пр.Маршала Баграмяна 24[б].

Нерсисян Гриша Геворкович – кандидат физ-мат наук, доцент, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении.
Тел.: 20-68-79.

Поступила в редакцию 12.06.2013