ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №3, 2013 Механика

УДК 539.3

ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ВОЛНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Мкртчян М.Г.

Ключевые слова: управление волны, одномерное волновое уравнение, пьезоэлектрическая среда
Keywords: the controlling of wave, one-dimensional wave equation, piezoelectric medium

Մկրտչյան Մ.Հ.
Պյեզոէլեկտրիկ միջավայրում ալիքի ղեկավարման խնդիր էլեկտրական պոտենցիալի միջոցով

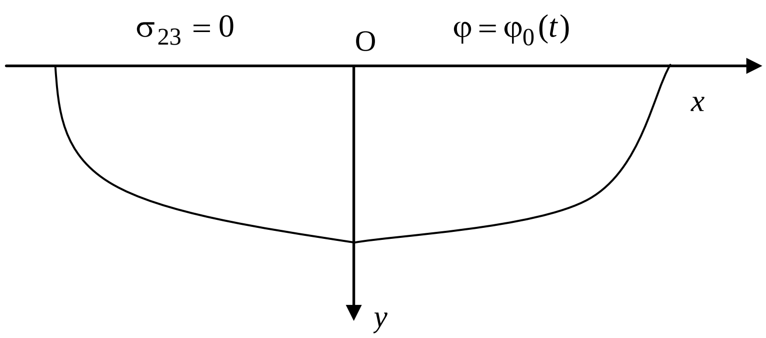
Աշխատանքում ուսումնասիրվում է 6mm դասի պյեզոէլեկտրիկ միջավայրում տարածվող միաչափ ալիքի տեղափոխության ղեկավարումն ըստ նրա խորության: Ալիքային հավասարման և պյեզոէլեկտրիկ միջավայրի բնութագրիչ հավասարումների լուծումները ներկայացված են Դալամբերի լուծման տեսքով: Այնուհետև եզրային, սկզբնական և վերջնական պայմաններին բավարարելուց հետո որոշվում է ղեկավարող ազդեցությունը:

Mkrtchyan M.H.
The problem of controlling wave by electric potential in the piezoelectric medium

In the article the controlling of displacement of one-dimensional wave according to a depth in the piezoelectric medium of 6mm class is considered. Solutions of wave equation and characteristic equation of piezoelectric medium are presented in the form of Dalamber solution. After satisfying boundary, initial and final conditions, the controlling action is determining.

В работе рассматривается задача управления перемещения одномерной волны в 6мм пьезоэлектрической среде по глубине. Решения волнового уравнения и характеристического уравнения пьезоэлектрической среды представлены в форме решения Даламбера. После удовлетворения граничным, начальным и финальным условиям определяется управляющее воздействие.

Постановка задачи. В пьезоэлектрической среде [1,2] волна распространяется в области $\{0 \le y < \infty\ ;\ \ 0 \le t \le T\ \}$. Предполагается, что конец $y = 0$ свободен от напряжений. Также предполагается, что по оси $y = 0$ электрический потенциал равен $\varphi_0(t)$, который будет называться управляющей функцией (фиг. 1):



Фиг.1

Одномерное волновое уравнение в пьезоэлектрической среде имеет вид [1]:

$$a^2\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 W}{\partial t^2};\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}. \tag{1.1}$$

Даны следующие начальные условия:

$$W(y,0)=\Phi(y),\ W_t(y,0)=\Psi(y) \tag{1.2}$$

и граничные условия:

$$\varphi(0,t)=\varphi_0(t),\ \sigma_{23}\big|_{y=0}=c_{44}\frac{\partial W}{\partial y}+e_{15}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\bigg|_{y=0}=0,\ W(0,t)=\alpha\varphi_0(t) \tag{1.3}$$

Здесь $W(y,t)$ – упругое перемещение по оси *Z*, $\varphi(y,t)$ – потенциал электрического поля, σ_{23} – составляющая тензора напряжений, e_{15} – составляющая тензора пьезоэлектрических постоянных, c_{44} – составляющая тензора упругих постоянных, ε_{11} – составляющая тензора диэлектрических постоянных, y – пространственная координата, t – время, a – скорость волны.

Требуется найти такую управляющую функцию $\varphi_0(t)$ в пространстве $C^2[0,T]$, чтобы для решения $W(y,t)$ уравнения (1.1) с заданными начальными (1.2) и краевыми (1.3) условиями в момент времени $t=T$ выполнилось финальное условие:

$$W(y,T)=\Phi_1(y). \tag{1.4}$$

Такое решение может быть использовано в задачах поверхностных волн для изменения интенсивности волны с помощью управляющего поверхностного электрического потенциала.

Решение задачи. Для решения системы уравнений воспользуемся методом Даламбера [3,4]. Сначала проинтегрируем второе уравнение системы (1.1), получим

$$\varphi(y,t)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}W(y,t)+A(t)y+B(t) \tag{1.5}$$

Если $\alpha=\varepsilon_{11}/e_{15}$, то получим $B(t)=0$, откуда, учитывая граничное условие (1.3), будет

$$W(0,t)=\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\varphi_0(t) \tag{1.6}$$

Далее, используя условия (1.2), (1.4) и (1.6), можем написать решение первого уравнения системы (1.1) в следующем виде [3]:

$$W(y,t)=\frac{\tilde\Phi(y-at)+\tilde\Phi(y+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{y-at}^{y+at}\tilde\Psi(z)dz+\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\tilde\varphi_0\left(t-\frac{y}{a}\right) \tag{1.7}$$

где $\tilde\Phi(y)$ и $\tilde\Psi(y)$ – нечётные продолжения функций $\Phi(y)$ и $\Psi(y)$ в области $(-\infty, 0)$, а функция $\tilde\varphi_0(t)=\varphi_0(t)$ на $[0, T]$ и $\tilde\varphi_0(t)\equiv 0$ при $t\le 0$. Для решения задачи управления требуется найти такую $\varphi_0(t)$-функцию, чтобы для решения уравнения (1.1) с (1.2) начальными условиями в момент $t=T$ выполнилось финальное условие (1.4). Удовлетворяя условию (1.4), получим

$$\Phi_1(y)=\frac{\tilde{\Phi}(y-aT)+\tilde{\Phi}(y+aT)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{y-aT}^{y+aT}\tilde{\Psi}(z)dz+\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\varphi_0\left(T-\frac{y}{a}\right)$$

В последнем уравнении сделаем замену $T-\dfrac{y}{a}=t$. Для $\varphi_0(t)$ получим выражение:

$$\varphi_0(t)=\left[\Phi_1(aT-at)-\frac{\tilde{\Phi}(-at)+\tilde{\Phi}(2aT-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int\limits_{-at}^{2aT-at}\tilde{\Psi}(z)dz\right]\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}$$

Отсюда видно, что управляющая функция $\varphi_0(t)$ определяется однозначно. Такое управление можно реализовать с помощью тонкого металлического слоя, нанесённого на поверхность пьезоэлектрической среды, через который передаются электрические возбуждения этой среде.

Теперь найдём решение $\varphi(y,t)$. Учитывая (1.5) и (1.7), получим

$$\varphi(y,t)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left[\frac{\tilde{\Phi}(y-at)+\tilde{\Phi}(y+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{y-at}^{y+at}\tilde{\Psi}(z)dz\right]+\varphi_0\left(t-\frac{y}{a}\right)+A(t)y$$

Удовлетворяя второму граничному условию в (1.3) и учитывая (1.5), получим

$$c_{44}\frac{\partial W}{\partial y}+\frac{e_{15}^2}{\varepsilon_{11}}\frac{\partial W}{\partial y}+e_{15}A(t)=0\,,$$

отсюда для $A(t)$ будем иметь:

$$A(t)=-\left(\frac{c_{44}}{e_{15}}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\right)\frac{\partial W}{\partial y}\bigg|_{y=0}$$

Положив значение $\dfrac{\partial W}{\partial y}$ при $y=0$, получим

$$A(t)=-\left(\frac{c_{44}}{e_{15}}+\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\right)\left[\frac{\tilde{\Phi}'(at)+\tilde{\Phi}'(-at)}{2}+\frac{\tilde{\Psi}(at)-\tilde{\Psi}(-at)}{2a}-\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\frac{\partial\tilde{\varphi}_0\left(t-y/a\right)}{\partial y}\bigg|_{y=0}\right]$$

Таким образом, определили $W(y,t)$, $\varphi(y,t)$ и управляющую функцию $\varphi_0(t)$, которая приводит $W(y,t)$ от начального состояния (1.2) в финальное состояние (1.4) на отрезке времени [0, T]. Ясно, что параметр *a* имеет физический смысл – скорость процесса.

Пример. Рассмотрим частный случай с начальными условиями

$$W(y,0)=Ce^{-y}\,,\ W_t(y,0)=De^{-y} \qquad (1.8)$$

и финальным условием:

$$W(y,1/a)=Ce^{-2y} \tag{1.9}$$

где принято $T=1/a$.

Граничные условия оставим неизменными.

Проинтегрируем второе уравнение в (1.1) и снова $\alpha=\dfrac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}$:

$$\varphi(y,t)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}W(y,t)+A(t)y \tag{1.10}$$

Для получения решения (1.1) построим нечётные продолжения функций Ce^{-y} и De^{-y} в области $(-\infty,0)$

$$\tilde{\Phi}(z)=\begin{cases}Ce^{-z} & \text{при } z>0\\ 0 & \text{при } z=0\\ -Ce^{z} & \text{при } z<0\end{cases}\qquad \tilde{\Psi}(z)\begin{cases}De^{-z} & \text{при } z>0\\ 0 & \text{при } z=0\\ -De^{z} & \text{при } z<0\end{cases} \tag{1.11}$$

Решение волнового уравнения (1.1) имеет вид:

$$W(y,t)=\frac{\tilde{\Phi}(y-at)+\tilde{\Phi}(y+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{y-at}^{y+at}\tilde{\Psi}(z)dz+\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\tilde{\varphi}_0\left(t-\frac{y}{a}\right)$$

где функция $\tilde{\varphi}_0(t)$ имеет вид:

$$\tilde{\varphi}_0(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t>T\\ \varphi_0(t) & \text{при } t\in(0,T]\\ 0 & \text{при } t<0\end{cases}$$

Удовлетворяя финальному условию (1.9) и учитывая, что $T=1/a$,

$$Ce^{-2y}=\frac{\tilde{\Phi}(y-1)+\tilde{\Phi}(y+1)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{y-1}^{y+1}\tilde{\Psi}(z)dz+\frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\varphi_0\left(\frac{1}{a}-\frac{y}{a}\right) \tag{1.12}$$

Поскольку управляющая функция определена на отрезке [0, *T*], то

$$0<\frac{1}{a}-\frac{y}{a}<\frac{1}{a}\Rightarrow 0\le y<1. \tag{1.13}$$

Учитывая (1.13), в выражении (1.12) обозначив $(1-y)/a=t$, найдём $\varphi_0(t)$:

$$\varphi_0(t)=\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left[Ce^{-2(1-at)}+C\frac{e^{2-at}-e^{at}}{2}+D\frac{e^{2-at}+e^{at}}{2a}\right] \tag{1.14}$$

Удовлетворив второму граничному условию (1.3), найдём $A(t)$:

$$A(t) = -\left(\frac{c_{44}}{e_{15}} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\right)\frac{\partial W}{\partial y}\bigg|_{y=0} \qquad (1.15)$$

Вычислим $\dfrac{\partial W}{\partial y}$:

$$\frac{\partial W}{\partial y} = C\frac{-e^{y+at} - e^{-y+at}}{2} + D\frac{-e^{y+at} + e^{-y+at}}{2a} + \frac{\varepsilon_{11}}{e_{15}}\frac{\partial\tilde{\varphi}_0\left(t - y/a\right)}{\partial y}$$

Теперь найдём значение $\dfrac{\partial\tilde{\varphi}_0\left(t - y/a\right)}{\partial y}$ в точке $y = 0$. В выражении (1.14) подставив параметр $\left(t - y/a\right)$ вместо t, получим:

$$\tilde{\varphi}_0\left(t - \frac{y}{a}\right) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\left[Ce^{-2(1-at+y)} + C\frac{e^{2-at+y} - e^{at-y}}{2} + D\frac{e^{2-at+y} + e^{at-y}}{2a}\right]$$

Проинтегрируя полученную функцию и подставляя в выражение $\dfrac{\partial W}{\partial y}$, получим:

$$\frac{\partial W}{\partial y}\bigg|_{y=0} = -Ce^{at} - 2Ce^{-2+2at} + C\frac{e^{2-at} + e^{at}}{2} + D\frac{e^{2-at} - e^{at}}{2a}$$

Подставляя полученное значение в (1.15), найдём $A\left(t\right)$:

$$A(t) = \left(\frac{c_{44}}{e_{15}} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}}\right)\left[C\left(e^{at} + 2e^{-2+2at}\right) - \left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2a}\right)e^{2-at} - \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{2a}\right)e^{at}\right]$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Аветисян А.С. К задаче распространения сдвиговых волн в пьезоэлектрической среде // Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1985. Т.38. №1. С.12-19.
2. Балакирев М.К., Гилинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982.
3. Знаменская Л.Н. Управление упругими колебаниями. М.: Наука, 2004.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнение математической физики. М.: Наука, 1977.

Сбедения об авторе:

Мкртчян Манук Грайрович – аспирант ГИУА
Тел: (099)549-333
E-mail: mkmanuk@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.05.2012