

**УСТОЙЧИВОСТЬ УДЛИНЁННОЙ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНКИ,
ОБТЕКАЕМОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА**

Микаелян А.О.

Ключевые слова: удлинённая составная пластинка, статическая устойчивость, сверхзвуковое обтекание, критическая скорость.

Key words: a long compound plate, static stability, supersonic gas flow, critical velocity.

Միջառնակ շ.շ.

Երկար բաղադրյալ սալի կայունության խնդիրը գերձայնային զազի հոսքում

Դիտարկված է գերձայնային զազի հոսքում երկար բաղադրյալ սալի ստատիկ կայունության խնդիրը: Հոսքն ուղղված է երկար բաղադրյալ սալի ազատ եզրից դեպի հակադիր հողակապորեն ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու եզրերին: Բաղադրյալ սալը բաղկացած է երկու մասից: Բաղադրյալ սալի տարբեր մասերի միացման տեղում դրված է հենարան: Որոշված է հոսքի կրիտիկական արագությունը, որի դեպքում բաղադրյալ սալը կորցնում է ստատիկ կայունությունը:

Mikaelyan H.H.

The stability of the long compound plate streamlined by a supersonic gas flow

The problem of the static stability of a long compound plate in a supersonic gas flow is investigated. The flow is directed from the free edge to the contrary hinged edge and is parallel to the other two edges. The compound plate consists of two parts. The support is putted in the place of connection of different parts of the plate. The critical velocity of flow is determined in which compound plate loses static stability.

Рассматривается задача устойчивости удлинённой составной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Скорость потока направлена от свободного края составной пластинки к противоположному шарнирно закреплённому краю параллельно остальным двум краям. Составная пластинка состоит из двух частей. На месте соединения частей составной пластинки имеется опора – подвижное шарнирное соединение. Найдена критическая скорость потока, при которой составная пластинка теряет статическую устойчивость.

В предлагаемой работе исследуется задача устойчивости удлинённой составной пластинки, состоящей из двух частей, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. Скорость потока направлена от свободного края пластинки к противоположному, шарнирно закреплённому краю параллельно остальным двум краям. На месте соединения частей составной пластинки имеется опора – подвижное шарнирное соединение.

Найдена критическая скорость потока газа, в зависимости от параметров пластинки, приводящая к статической неустойчивости.

Установлено, что с увеличением ширины второй части пластинки критическая скорость возрастает.

1. Рассмотрим удлинённую составную пластинку, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \leq x \leq a_1 + a_2$, $0 \leq y \leq b$, $-h \leq z \leq h$. Пластинка в направлении оси Ox обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью V . Считается, что в направлении оси Oy пластинка достаточно длинная, поэтому можно считать, что колебания пластинки имеют форму цилиндрической поверхности, т.е. не зависят от координаты y .

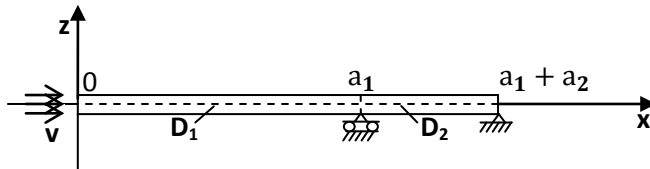
Дифференциальные уравнения изгиба удлинённой составной пластинки описываются соотношениями [1]:

$$\frac{d^4 W_1}{dx^4} + s_1^3 \frac{dW_1}{dx} = 0, \quad (0 \leq x \leq a_1) \quad (1)$$

$$\frac{d^4 W_2}{dx^4} + s_2^3 \frac{dW_2}{dx} = 0, \quad (a_1 \leq x \leq a_1 + a_2) \quad (2)$$

где k – постоянная; V – скорость потока газа; $s_1 = \sqrt[3]{\frac{kV}{D_1}}$, $s_2 = \sqrt[3]{\frac{kV}{D_2}}$

представляют собой величины, зависящие от параметров пластинки и скорости потока V ; D_1 и D_2 – жёсткости составной пластинки (фиг. 1).



Фиг. 1

Граничные условия принимаются в виде:

$$x = 0; \quad W_1''(0) = 0, \quad W_1'''(0) = 0; \quad (3)$$

$$x = a_1; \quad W_1(a_1) = 0, \quad W_2(a_1) = 0, \quad W_1'(a_1) = W_2'(a_1), \quad D_1 W_1''(a_1) = D_2 W_2''(a_1); \quad (4)$$

$$x = a_1 + a_2; \quad W_2(a_1 + a_2) = 0, \quad W_2''(a_1 + a_2) = 0. \quad (5)$$

Требуется определить значения параметра V , при которых возможны нетривиальные решения дифференциальных уравнений (1) и (2), удовлетворяющие граничным условиям (3), (4), (5).

Заметим, что устойчивость составной балки под действием следящей силы была исследована Г. Е. Lee and E. Reissner [2] и А. Микаелян [3].

2. Для нахождения решения задачи устойчивости пластинки сведём её к задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общие решения дифференциальных уравнений (1) и (2) имеют, соответственно, следующий вид [1]:

$$W_1 = A_1 + A_2 e^{-s_1 x} + e^{\frac{s_1 x}{2}} \left(A_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 x + A_4 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 x \right), \quad (6)$$

$$W_2 = B_1 + B_2 e^{-s_2 x} + e^{\frac{s_2 x}{2}} \left(B_3' \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 x + B_4' \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 x \right), \quad (7)$$

где

$$A_3' = i(A_3 - A_4); \quad A_4' = A_3 + A_4;$$

$$B_3' = i(B_3 - B_4); \quad B_4' = B_3 + B_4.$$

$A_1, A_2, A_3', A_4', B_1, B_2, B_3', B_4'$ – постоянные интегрирования, которые определяются из граничных условий.

Учитывая (3), (5), (6), (7), получим:

$$\begin{cases} A_4' = -A_2 \\ A_3' = -\sqrt{3}A_2 \\ B_2 = -\frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}s_2 b} \left((\sqrt{3} \cos \xi_2 - \sin \xi_2) B_3' - (\cos \xi_2 + \sqrt{3} \sin \xi_2) B_4' \right) \\ B_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{1}{2}s_2 b} \left((\cos \xi_2 - \sqrt{3} \sin \xi_2) B_3' - (\sqrt{3} \cos \xi_2 + \sin \xi_2) B_4' \right) \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{где } a_1 + a_2 = b; \quad \xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b.$$

Подставляя (8) в (6) и (7) и учитывая первое и второе условия из (4), получаем:

$$\begin{aligned} W_1 = & \left(e^{\frac{s_1 a_1}{2}} \left(\sqrt{3} \sin \xi_1 + \cos \xi_1 - e^{-\frac{3}{2}s_1 a_1} \right) + e^{-s_1 x} - \right. \\ & \left. - e^{\frac{s_1 x}{2}} \left(\sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 x + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 x \right) \right) A_2, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} W_2 = & \left(\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{s_2 b}{2}} \left((1 - \alpha\sqrt{3}) \cos \xi_2 - (\sqrt{3} + \alpha) \sin \xi_2 \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2}s_2 b} e^{-s_2 x} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \xi_2 - (1 + \alpha\sqrt{3}) \sin \xi_2 \right) + \right. \\ & \left. + e^{\frac{s_2 x}{2}} \left(\sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 x + \alpha \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 x \right) \right) B_3' \end{aligned} \quad (10)$$

где $\xi_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} s a_1$; $\xi_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} s a_1$;

$$\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{s_2 b a}{2}} (\cos \xi_2 - \sqrt{3} \sin \xi_2) - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2} s_2 b} e^{-s g_1} (\sqrt{3} \cos \xi_2 - \sin \xi_2) + e^{\frac{s_2}{2}} \sin \xi_{21}}{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{s_2 b a}{2}} (\sqrt{3} \cos \xi_2 + \sin \xi_2) - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2} s_2 b} e^{-s g_1} (\cos \xi_2 + \sqrt{3} \sin \xi_2) - e^{\frac{s_2}{2}} \cos \xi_{21}}$$

В соответствии с (4), (9), (10) имеем:

$$\left\{ \begin{aligned} & \left(s_1 e^{-s a_1} a + 2 s_1 e^{\frac{s a_1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 a_1 \right) A_2 + \\ & + \left(\frac{s_2}{2} e^{\frac{3}{2} s_2 b} e^{-s g_1} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b - (1 + \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b \right) + \right. \\ & \left. + \frac{s_2}{2} e^{\frac{s g_1}{2}} \left((1 - \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_1 + (\sqrt{3} + \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_1 \right) \right) A_3 = 0 \\ & D_1 \left(s_1^2 a \left(e^{-s a_1} e^{\frac{s a_1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 a_1 + \sqrt{3} e^{\frac{s a_1}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 a_1 \right) \right) A_2 + \\ & + D_2 \left(\frac{s_2^2}{2} e^{\frac{3}{2} s_2 b} e^{-s g_1} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b - (1 + \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b \right) - \right. \\ & \left. - \frac{s_2^2}{2} e^{\frac{s g_1}{2}} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_1 - (1 + \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_1 \right) \right) A_3 = 0 \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Приравняв нулю определитель системы уравнений (11), получаем следующее уравнение:

$$\begin{aligned} & D_2 s_2 \left(e^{-s a_1} a + 2 e^{\frac{s a_1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 a_1 \right) \left(\frac{3}{2} s_2 b e^{-s g_1} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b - \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b \right) + e^{\frac{s g_1}{2}} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_1 - (1 + \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_1 \right) \right) - \\ & - D_1 s_1 \left(a^{-s a_1} - e^{\frac{s a_1}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 a_1 + \sqrt{3} e^{\frac{s a_1}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 a_1 \right) \left(\frac{3}{2} s_2 b e^{-s g_1} \left((\sqrt{3} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b - (1 + \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 b \right) + e^{\frac{s g_1}{2}} \left((1 - \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_1 + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+\left(\sqrt{3} + \alpha\right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s a_1 \Big) = 0, \quad (12)$$

откуда определяется критическая скорость, приводящая к статической неустойчивости.

3. Рассмотрим частные случаи.

3.1. Пусть $D_1 = D_2$, $a_1 = a = \text{const}$.

Ясно, что при $D_1 = D_2$ имеем $S_1 = S_2 = S$. При этом уравнение (12) запишется в виде:

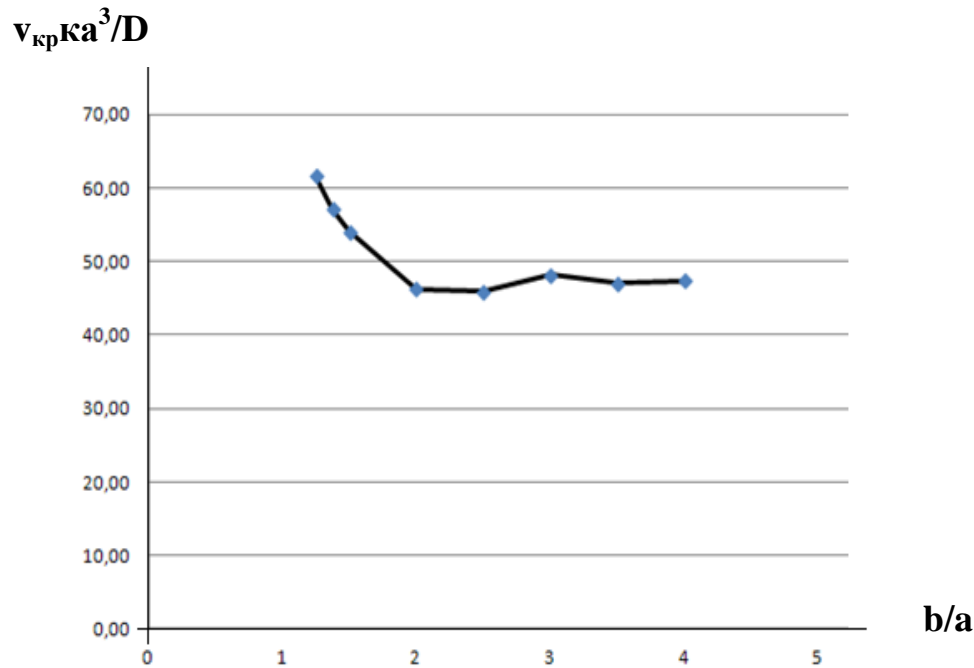
$$\begin{aligned} & \left(e^{-sa} a + 2e^{\frac{sa}{2}} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s \right) \left(\frac{3}{2} sb^{-sa} \left((s\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + \alpha\sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \right. \\ & \left. - e^{\frac{sa}{2}} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s + (1 + \alpha\sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \left(-sa - \frac{sa}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} + \right. \\ & \left. + \sqrt{3} e^{\frac{sa}{2}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{3}{2} sb^{-sa} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + \alpha\sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \right. \\ & \left. + e^{\frac{sa}{2}} \left((1 - \alpha\sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s + (\sqrt{3} + \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

С помощью численных методов найдены значения критической скорости $v_{кр}$ для различных значений b (табл. 1).

Таблица 1

b/a	$v_{кр} \kappa a^3 / D$
1,25	61,63
1,375	57,06
1,5	54,01
2	46,27
2,5	45,88
3	48,23
3,5	47,04
4	47,44

Анализ численных результатов показал, что на интервалах изменения $b \in [1, 25a; 2, 5a]$ и $b \in [3a; 3, 5a]$ с возрастанием b критическая скорость $v_{кр}$ уменьшается. А на интервале $b \in [2, 5a; 3a]$ и $b \in [3, 5a; 4a]$, наоборот, с возрастанием b критическая скорость $v_{кр}$ увеличивается (фиг. 2).



Фиг.2

3.2. Рассмотрим случай, в котором $a_2 \rightarrow 0$.

При этом $\xi_2 = \xi_{21} = \frac{\sqrt{3}}{2} s a_1$ и $\alpha = -\frac{\sin \xi_{21} - \sqrt{3} \cos \xi_{21}}{\cos \xi_{21} + \sqrt{3} \sin \xi_{21}}$.

Тогда уравнение (12) приводится к виду:

$$-e^{-\frac{3}{2} s a_1} + \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 a_1 - \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_1 a_1 = 0 \quad (14)$$

Отсюда очевидно, что уравнение (14) имеет тривиальное решение $s a_1 = 0$. Это означает, что $v_{кр} = 0$, т.е. пластинка изначально неустойчива.

Заметим, что этот случай соответствует задаче, в которой пластинка шарнирно опёрта вдоль одной из длинных кромок и свободна вдоль другой и на эту свободную кромку набегаёт поток газа.

3.3. Теперь рассмотрим случай, в котором $a_1 \rightarrow 0$.

При этом $\xi_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2$ и

$$\alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{3}{2} s_2 a_2} \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 - \alpha \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 \right) - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2} s_2 a_2} s_2 \left(\alpha \sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 - \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 \right)}{\frac{\sqrt{3}}{2} e^{\frac{3}{2} s_2 a_2} \left(\sqrt{3} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 + \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 \right) - \frac{1}{2} e^{\frac{3}{2} s_2 a_2} s_2 \left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 + \sqrt{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 \right) - 1}$$

Тогда уравнение (12) приводится к виду:

$$e^{\frac{3}{2} s_2 a_2} \left((\sqrt{3} - \alpha) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 - (1 + \alpha \sqrt{3}) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} s_2 a_2 \right) - (\sqrt{3} - \alpha) = 0 \quad (15)$$

корни которого с наибольшей действительной частью являются комплексно-сопряженными числами с отрицательной действительной частью:

$$(s_2 a_2)_{1,2} = -4,53 \pm 2,61 i. \quad (16)$$

Из уравнения (16) очевидно, что пластинка при обтекании не теряет своё устойчивое состояние.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Уч.-изд. Физ, 1964. С.34-38.
2. G.E. Lee and E. Reissner Note on a problem of beam buckling. //Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP). Vol. 26. 1975. P.839-841.
3. Микаелян А.О. Задачи устойчивости составной балки со сосредоточенной массой. Актуальные проблемы механики сплошной среды. //Труды международной конференции, посвящённой 100-летию академика НАН Армении Н.Х.Арутюняна. 2012. Т.2. 08–12 октября. Цахкадзор, Армения. С.34-38.

Сведения об авторе:

Микаелян Асмик Овиковна – аспирант кафедры механики ЕГУ, факультет математики и механики, (+374 77) 03 63 49, (+374 96) 03 63 49.

E-mail: hasomik@mail.ru

Поступила в редакцию 06.03.2013