

УДК 539.3

**ВЛИЯНИЕ СВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКА НА ХАРАКТЕР
АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ЗАВИСИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ
КОЛЕБАНИЙ ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ**

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Марзока П.

Ключевые слова: флаттер, амплитуда, частота, пластинка, устойчивость

Key words: flutter, amplitude, frequency, plate, stability

Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ., Մարզոկա Պ.

**Գերձայնային հոսանքի ազդեցությունը ճկուն սալի ոչ զծային տատանումների
ամպլիտուդա-հաճախություն կապի վրա**

Դիտարկված է գազի գերձայնային հոսանքով շրջնավոր օրթոտրոպ ուղղանկյուն սալի ոչ զծային տատանումների խնդիրը: Հետազոտությունը կատարված է երկու տիպի ոչզծայինությունների հաշվառմամբ. Աերոառաձգական (քառակուսային և խորանարդային) և երկրաչափական (խորանարդային): Հայտնի է [1], որ շրջնաող գազի բացակայության դեպքում սալի ոչ զծային տատանումների θ հաճախությունը A ամպլիտուդայից կախված ունի կոշտ բնույթ, այսինքն՝ տատանումների ամպլիտուդայի մեծացման հետ հաճախությունն աճում է: Ներկայացվող աշխատանքում ցույց է տրված, որ շրջնաող գազի առկայությունը բերում է նշված մոնոտոն աճող կապի ինչպես քանակական, այնպես էլ որակական փոփոխությանը: հիմնական արդյունքները, որոնք հետևանք են ամպլիտուդա-հաճախություն կապի վրա գազի շրջնաոման ազդեցության, հետևյալն են՝

- Երբ $U \in (0, U_{cr})$ (որտեղ U_{cr} - շրջնաոման U արագության մինիմալ արժեքն է, որի գերազանցումը բերում է փոքր գրգռումների նկատմամբ համակարգի անկայունությանը, այսինքն՝ U_{cr} - համապատասխան զծային խնդրից ստացված կրիտիկական արագությունն է [2,5]) և $(U / U_{cr})^2 \ll 1$, ապա դիտարկվող համակարգի տատանումների կոշտ բնույթը պահպանվում է և շրջնաոման արագության մեծացմանը զուգընթաց տատանումների ամպլիտուդան փոքրանում է (1 և 2 կորերը նկարի վրա);
- Կախված խնդրի ֆիզակամեխանիկական և երկրաչափական պարամետրերից գոյություն ունի շրջնաոման արագության որոշակի \bar{U} արժեք, որից սկսած

($U > \bar{U}$) խախտվում է ամպլիտուդա-հաճախություն կապի մոնոտոն բնույթը և այն դառնում է բազմարժեք ֆունկցիա (3 և 4 կորերը նկարի վրա): Այդ դեպքերում $\theta(A)$ ֆունկցիան ունի մինիմումի միակ կետ և գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող սալերի ոչ գծային տատանումների ամպլիտուդա-հաճախություն կապի ($A(\theta)$ ֆունկցիան կամ նրա հակադարձ $\theta(A)$ ֆունկցիան) բնույթը (ի շնորհիվ աերոադամական ոչգծայնության) նման է թաղանթների ոչ գծային սեփական տատանումների նշված կապի բնույթին:

- Երբ $U \geq U_{cr}$, ապա դիտարկվող համակարգի տատանումները չեն կարող ունենալ կոշտ բնույթ և ոչ գծային ֆլատերային տատանումները ունեն միայն «փափուկ» բնույթ $A(\theta)$ ֆունկցիայի գրաֆիկի վրա դեպի օրդինատների առանցք ձգվող հատվածի պատճառով:

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O., Marzocca P.
The Influence of Supersonic Stream on the Dependence “Amplitude-Frequency” of Nonlinear Vibrations of Flexible Plate

The problem of nonlinear vibrations of orthotropic rectangular plate in asupersonic gas flow is considered. Investigations were done taking into account both types of nonlinearity: the wind (quadratic and cubic) and geometric (cubic). It is known [1] that dependence of the frequency of nonlinear oscillations of the plate θ on the amplitude A in the absence of flowing stream has a hard character, i.e. with the increases amplitude the vibration frequencies increase. In this paper it is established that the presence of flowing stream can be a source of both quantitative and qualitative changes in the character of this monotonically increasing dependence. The main results which are the consequence impact of the flowing stream of gas on the dependence “amplitude-frequency” of nonlinear vibrations of the aeroelasticity system under consideration are as follows:

- If $U \in (0, U_{cr})$ (where U_{cr} - is the minimum speed U of the flowing stream, above which the system becomes unstable with respect to small perturbations, i.e. U_{cr} - is the critical speed of flowing speed obtained from the corresponding linear problem [2,5]) and $(U / U_{cr})^2 \ll 1$, then hard character of oscillations of the system persists and with the increasing flow speed the amplitude of the steady-state oscillation decreases (curves 1 and 2 in the figure);
- Depending on the physical-mechanical and geometrical parameters of the problem, there is a certain flow speed \bar{U} at which ($U > \bar{U}$) the monotonous nature of the amplitude-frequency dependence breaks, and it becomes a multi-valued function (curves 3 and 4 in the figure). In such cases the function $\theta(A)$ has a unique minimum point and the behaviour of the dependence "amplitude-frequency" (the function $A(\theta)$ or the inverse function $\theta(A)$) of nonlinear vibrations of the plate flowing by supersonic gas (due to the aerodynamic nonlinearity) analogous to the nature of this dependence in the case of nonlinear natural oscillations of shells;

- If $U \geq U_{cr}$, then oscillations of the system cannot have hard character and non-linear flutter type oscillations have only “soft” character due to the presence of tightening interval to the y-axis of the graph of the function $A(\theta)$.

Рассматривается задача нелинейных колебаний ортотропной прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Исследование проведено с учётом обоих типов нелинейности: аэродинамической (квадратичной и кубической) и геометрической (кубической). Известно [1], что зависимость частоты нелинейных колебаний пластинки θ от амплитуды A в отсутствии обтекающего потока носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частоты колебаний возрастают. В настоящей работе установлено, что присутствие обтекающего потока может стать источником как количественного, так и качественного изменения характера указанной монотонно возрастающей зависимости. Основные результаты, являющиеся следствием влияния набегающего потока газа на амплитудно-частотную зависимость нелинейных колебаний рассматриваемой аэроупругой системы, следующие:

- Если $U \in (0, U_{cr})$ (где U_{cr} – минимальное значение скорости U обтекающего потока, при превышении которого система становится неустойчивой по отношению к малым возмущениям, т.е. U_{cr} есть критическая скорость потока, определяемая на основе решения соответствующей линейной задачи [2,5]) и $(U / U_{cr})^2 \ll 1$, то жёсткий характер колебаний рассматриваемой системы сохраняется и с увеличением скорости обтекания амплитуда установившихся колебаний уменьшается (кривые 1 и 2, фиг.1);
- В зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи существует определённое значение \bar{U} скорости потока, начиная с которого ($U > \bar{U}$) нарушается монотонный характер амплитудно-частотной зависимости и она становится многозначной функцией (кривые 3 и 4, фиг.1). В таких случаях функция $\theta(A)$ имеет единственную точку минимума и характер “амплитудно-частотной” зависимости (функция $A(\theta)$ или обратная функция $\theta(A)$) нелинейных колебаний пластин, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа (благодаря аэродинамической нелинейности), идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек.
- Если $U \geq U_{cr}$, то колебания рассматриваемой системы не могут иметь жёсткий характер и нелинейные флаттерные колебания являются только “мягкими” из-за присутствия **затягивающего** к оси ординат участка на графике функции $A(\theta)$.

Введение

Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти

в монографиях [1-3] и в обзорной статье [4]. Исследования проведены как в линейной, так и в нелинейной постановках. Решением линейных задач получены те наименьшие значения U_{cr} скорости обтекающего потока U , при котором рассматриваемая аэроупругая система теряет устойчивость. Линейные задачи были решены как точно, так и приближённо (в основном, используя метод Галёркина) [2]. Нелинейные задачи решены приближёнными методами и предметом исследований было изучение зависимости амплитуды колебаний от скорости обтекающего потока как при докритических, так и при послекритических скоростях. Эти вопросы в задачах флаттера пластин, когда аэродинамической нелинейностью можно пренебречь по сравнению с геометрической нелинейностью, детально исследованы в работе [2] и показано:

а) если пластинка достаточно толстая, то возможно только “мягкое” возбуждение флаттера, т.е. при $U \leq U_{cr}$ выполняется неравенство $\partial A / \partial U < 0$, а при $U > U_{cr}$ невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания;

б) если пластинка достаточно тонкая, то возбуждение флаттерных колебаний носит “жёсткий” характер, т.е. при $U < U_{cr}$ возбудить незатухающие флаттерные колебания невозможно, а при $U \leq U_{cr}$ выполняется неравенство $\partial A / \partial U > 0$.

В работах [5,6] показано, что учёт аэродинамической нелинейности (особенно её несимметричной квадратичной части) приводит к появлению новых типов зависимостей “амплитуда-скорость” как в докритической стадии, так и послекритических скоростях. В частности, установлена возможность существования следующей зависимости между амплитудой нелинейных флаттерных колебаний и величины скорости обтекающего потока: если постепенно увеличивать скорость потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до определённого значения скорости потока U^* , где колебания “сорвутся” и восстанавливается невозмущённое состояние пластинки. При снижении скорости невозмущённое состояние является устойчивой, пока $U > U_*$. При $U = U_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до определённого конечного значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает. В работах [5,6], U^* назван “верхней” критической скоростью флаттера в том смысле, что при $U > U^*$ невозможно возбудить незатухающие флаттерные колебания, а U_* – “нижняя” критическая скорость флаттера, найденная на основе линейной теории, т.е. $U_* = U_{cr}$. В работе [7] исследованы влияния геометрической нелинейности на зависимость “амплитуда-скорость” в случае цилиндрической панели. Показано, что зависимость амплитуды нелинейных флаттерных колебаний от величины скорости обтекающего потока может иметь многозначный характер.

При изучении задач нелинейных колебаний другим очень важным вопросом является исследование амплитудно-частотной зависимости. При $U = 0$ характер зависимости амплитуды от частоты нелинейных колебаний пластинки носит жёсткий характер [1], т.е. с увеличением амплитуды частота колебаний увеличивается. Настоящая работа посвящена исследованию амплитудно-частотной зависимости нелинейных колебаний тонкой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, т.е. изучению влияния скорости обтекающего потока на указанную зависимость. Установлено, что:

а) в присутствии обтекающего потока характер зависимости амплитуды от частоты нелинейных колебаний пластинок идентичен характеру указанной зависимости в случае нелинейных собственных колебаний оболочек;

б) если скорость обтекающего потока намного меньше критической, то жёсткий характер колебаний рассматриваемой системы сохраняется и с увеличением скорости обтекания амплитуда установившихся колебаний уменьшается;

в) в зависимости от физико-механических и геометрических параметров задачи, существует определённое значение скорости потока, начиная с которого нарушается монотонный характер амплитудно-частотной зависимости и она становится многозначной функцией;

г) при послекритических скоростях колебания рассматриваемой системы не могут иметь жёсткий характер и послекритические флаттерные колебания являются только “мягкими”.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкую ортотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h . Пусть материал пластинки подчиняется обобщённому закону Гука и в каждой точке имеет три плоскости упругой симметрии, главные направления которых совпадают с направлениями ортогональных координатных линий α, β, γ . Координатная плоскость α, β совпадает со срединной плоскостью пластинки.

Пусть, далее, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью U , направленной вдоль оси $O\alpha$. Принимаются следующие предположения:

а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [8];

б) основные предположения теории гибких пластин, считая, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки [1];

в) избыточное давление газа представляется по приближённой формуле “поршневой теории” [9,10].

На основе принятых предположений аналогичным образом, как в [2], получается следующая система дифференциальных уравнений движения пластинки [7]:

$$a_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^4} + (a_{66} + 2a_{12}) \frac{\partial^4 F}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + a_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial \beta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \right)^2 = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial \beta^4} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \beta^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha^2} + \\ + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \beta} \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha \partial \beta} + \rho_0 h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho_0 h \varepsilon + \frac{\varkappa p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \varkappa p_\infty \left[M \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \right. \\ \left. + \frac{\varkappa + 1}{4} M^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{\varkappa + 1}{12} M^3 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^3 \right] = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$D_{ik} = B_{ik} \frac{h^3}{12}, \quad c_{ik} = B_{ik} h,$$

$$a_{11} = \frac{c_{11}}{\Omega}, \quad a_{22} = \frac{c_{22}}{\Omega}, \quad a_{12} = \frac{c_{12}}{\Omega}, \quad a_{66} = \frac{1}{c_{66}}, \quad \Omega = c_{11}c_{22} - c_{12}^2,$$

$$M = \frac{U}{a_\infty}, \quad a_\infty = \frac{\varkappa p_\infty}{\rho_\infty},$$

$w(\alpha, \beta, t)$ – прогиб пластинки, B_{ik} – коэффициенты упругости, M – число Маха, a_∞ – скорость звука для невозмущённого газа, \varkappa – показатель политропы, ρ_0 – плотность материала пластинки, p_∞ и ρ_∞ – давление и плотность газа в невозмущённом состоянии, ε – коэффициент линейного затухания, $F = F(\alpha, \beta, t)$ – функция напряжений.

При исследовании вопросов устойчивости к уравнениям (1) – (2) присоединяются также условия на контуре пластинки.

2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим шарнирно опёртую по всему контуру ортотропную прямоугольную пластинку ($0 \leq \alpha \leq a, 0 \leq \beta \leq b$), края которой свободно смещаются в плане. Тогда граничные условия имеют следующий вид [2,7]:

при $\alpha = 0, \alpha = a$

$$w = 0, \quad M_\alpha = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} = 0, \quad (3)$$

$$S^0 = 0, \quad T_\alpha^0 = -p_\alpha^0, \quad (4)$$

при $\beta = 0, \beta = b$

$$w = 0, \quad M_\beta = -D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial \beta^2} - D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} = 0, \quad (5)$$

$$S^0 = 0, \quad T_\beta^0 = -p_\beta^0, \quad (6)$$

где T_α^0, T_β^0, S – средние значения тангенциальных усилий на кромках пластинки.

Приближённое решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3) и (5), будем искать в виде [2]:

$$w(\alpha, \beta, t) = f_{11}(t) \sin \lambda_1 \alpha \cdot \sin \mu_1 \beta + f_{21}(t) \sin \lambda_2 \alpha \cdot \sin \mu_1 \beta, \quad (7)$$

$$\left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a}, \mu_k = \frac{k\pi}{b} \right).$$

Здесь $f_{ik}(t)$ – подлежащие определению функции времени t . Подставив (7) в (1), найдём функцию F , удовлетворяющую граничным условиям (4) и (6).

Для определения $f_{ik}(t)$ воспользуемся уравнением (2). Подставляя (7) и найденное выражение для F в (2) и применяя метод Бубнова-Галеркина для определения безразмерных неизвестных функций $x_1 = f_{11}(t)/h, x_2 = f_{21}(t)/h$, в случае ортотропной пластинки, получим следующую нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + x_1 K + \frac{2}{3} \nu K_2 + \nu^2 \chi [\alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \\ + \nu x_2 (\beta_{11} x_1^2 + \beta_{12} x_2^2)] + Q x_1 (\gamma_{11} x_1^2 + \gamma_{12} x_2^2) = 0 \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + \gamma^2 x_2 K + \frac{2}{3} \nu K_2 + \nu^2 \chi [\alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 + \\ + \nu x_1 (\beta_{21} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2)] + Q x_2 (\gamma_{21} x_1^2 + \gamma_{22} x_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь, наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$ введены обозначения:

$$\omega_i^2 = \frac{1}{\rho_0 h} \left[D_{11} \lambda_i^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda_i^2 \mu_1^2 + D_{22} \mu_1^4 - \lambda_i^2 p_\alpha^0 - \mu_1^2 p_\beta^0 \right] \quad (i=1,2),$$

$$K = \frac{4\alpha p_\infty}{\rho_0 \omega_1^2 h^2}, \quad Q = \frac{4}{16\rho_0 \omega_1^2}, \quad (9)$$

$$v = M \frac{h}{a}, \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{2}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{\rho_0 h a_\infty} \right),$$

$$\alpha_{11} = \frac{2}{9}(\alpha + 1), \quad \alpha_{12} = \frac{56}{45}(\alpha + 1), \quad \alpha_{21} = \frac{16}{45}(\alpha + 1), \quad (10)$$

$$\beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{40}(\alpha + 1), \quad \beta_{22} = \frac{11\pi^2}{70}(\alpha + 1), \quad \beta_{12} = -\frac{9\pi^2}{70}(\alpha + 1), \quad (11)$$

$$\gamma_{11} = \frac{\lambda_1^4}{a_{22}} + \frac{\mu_1^4}{a_{11}}, \quad \gamma_{12} = \gamma_{21} = 4\gamma_{11} + \frac{81\lambda_1^4 \mu_1^4}{\Delta_{12}} + \frac{\lambda_1^4 \mu_1^4}{\Delta_{32}}, \quad \gamma_{22} = \frac{\lambda_2^4}{a_{22}} + \frac{\mu_1^4}{a_{11}}, \quad (12)$$

$$\Delta_{\lambda_i \mu_2} = a_{11} \lambda_i^4 + (a_{66} - 2a_{12}) \lambda_i^2 \mu_2^2 + a_{22} \mu_2^4, \quad (i=1,3),$$

где ω_1 и ω_2 – частоты первой и второй формы малых собственных колебаний пластинки, v – приведённый параметр скорости.

Соответствующая (8) линейная система допускает решения в виде $x_i = y_i \exp(\lambda \tau)$. В случае малых значений v , все характеристические показатели λ лежат в левой полуплоскости комплексного переменного, и тривиальное решение $w \equiv 0$ асимптотически устойчиво по отношению к малым возмущениям. Значение параметра $v = v_{cr}$, при котором два из характеристических показателей становятся чисто мнимыми, а остальные, по-прежнему, лежат в левой полуплоскости, является критическим, соответствует критической скорости панельного флаттера в линейной постановке этой задачи и определяется формулой [7]

$$v_{cr} = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{k} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}}. \quad (13)$$

Отметим, что система нелинейных уравнений (8), описывающая поведение возмущений в ортотропной пластинке [7], внешне не отличается от аналогичной системы в случае изотропной пластинки, полученной в [2]. Сказанное относится и к формуле (13).

3. Исследование нелинейной задачи

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой нелинейной системой (8). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости гибких пластин, нагруженных консервативными силами, наличием членов с квадратичными нелинейностями. Указанные члены, имеющие аэродинамическое происхождение, характеризуют несимметричность нелинейности, присущую задачам устойчивости гибких оболочек. Поэтому, приближённое периодическое решение системы (8) будем искать в виде [7]:

$$\begin{aligned}x_1 &= A_1 \cos \theta\tau + B_1 \sin \theta\tau + C_1 + \dots, \\x_2 &= A_2 \cos \theta\tau + B_2 \sin \theta\tau + C_2 + \dots\end{aligned}\tag{14}$$

Здесь A_i , B_i , C_i и θ ($i=1,2$) – неизвестные постоянные; точками обозначены члены, содержащие гармоники. Структура решения (14) отличается от существующих [1,2] наличием свободных членов $C_i \neq 0$, присутствие которых характерно задачам с квадратичной нелинейностью.

Подставим решение (14) в систему (8) и приравняем нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos \theta\tau$ и $\sin \theta\tau$ (члены, содержащие гармоники, пренебрегаются). Полученная при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённого решения этой системы предполагается, что [7]:

а) затухание достаточно мало ($\chi|B_i| \ll |A_i|$, $|B_i| \ll |A_i|$; ($i=1,2$)), и

б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебательное движение с конечной амплитудой вокруг состояния бесконечно мало отличающегося от невозмущённого ($|A_i| \gg |C_j|$; $j=1,2$). Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведения величин B_1 , B_2 , C_1 и C_2 , уравнения нелинейной системы представятся следующими подсистемами:

– уравнениями, полученными приравнением нулю свободных членов:

$$\begin{aligned}
& C_1 - \frac{2}{3}kvC_2 + \frac{1}{2}kv^2(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2) + kv^3A_2(\beta_{11}A_1C_1 + \beta_{12}A_2C_2) + \\
& \quad + \frac{1}{2}kv^3C_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + QA_1(\gamma_{11}A_1C_1 + \gamma_{12}A_2C_2) + \\
& \quad + \frac{1}{2}QC_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0, \\
& \gamma^2C_2 + \frac{2}{3}kvC_1 + \frac{3}{4}kv^2\alpha_{21}A_1A_2 + kv^3A_1(\beta_{21}A_1C_1 + \beta_{22}A_2C_2) + \\
& \quad + \frac{1}{2}kv^3C_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + QA_2(\gamma_{21}A_1C_1 + \gamma_{22}A_2C_2) + \\
& \quad + \frac{1}{2}QC_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0;
\end{aligned}$$

– уравнениями, полученными приравнением нулю коэффициентов при $\cos \theta\tau$:

$$\begin{aligned}
& (1 - \theta^2)A_1 + \chi\theta B_1 - \frac{2}{3}kvA_2 + 2kv^2(\alpha_{11}A_1C_1 + \alpha_{12}A_2C_2) + \\
& \quad + \frac{3}{4}kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0, \\
& (\gamma^2 - \theta^2)A_2 + \chi\theta B_2 + \frac{2}{3}kvA_1 + \alpha_{21}kv^2(A_1C_1 + A_2C_2) + \\
& \quad + \frac{3}{4}kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0;
\end{aligned}$$

– уравнениями, полученными приравнением нулю коэффициентов при $\sin \theta\tau$:

$$\begin{aligned}
& (1 - \theta^2)B_1 - \frac{2}{3}kvB_2 - \chi\theta A_1 + \frac{1}{2}kv^3\beta_{11}A_1A_2B_1 + \frac{1}{4}kv^3(\beta_{11}A_1^2 + 3\beta_{12}A_2^2)B_2 + \\
& \quad + \frac{1}{4}Q(3\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2)B_1 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_1A_2B_2 = 0, \\
& (1 - \theta^2)B_2 - \chi\theta A_2 + \frac{2}{3}kvB_1 + \frac{1}{4}kv^3(3\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2)B_1 + \frac{1}{2}kv^3\beta_{22}A_1A_2B_2 + \\
& \quad + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1A_2B_1 + \frac{1}{4}Q(\gamma_{21}A_1^2 + 3\gamma_{22}A_2^2)B_1 = 0
\end{aligned}$$

Третья подсистема учитывает эффект демпфирования. Согласно принятому предположению о малости затухания, указанная подсистема имеет следующее приближённое решение:

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0 \quad \text{при } \chi = 0 \quad (15)$$

Пользуясь первой подсистемой, выразим C_1 и C_2 через A_1 и A_2 (см. (17)). Тогда, вторая подсистема, определяющая характеристики A_1 и A_2 амплитуды колебаний рассматриваемой аэроупругой системы, в зависимости от параметров θ и v , принимает вид:

$$\begin{aligned} A_1(1 - \theta^2) - \frac{2}{3}KvA_2 + 2Kv^2\alpha_{11}A_1C_1 + 2Kv^2\alpha_{12}A_2C_2 + \\ + \frac{3}{4}Kv^3A_2(\beta_{11}A_1^2 + \beta_{12}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_1(\gamma_{11}A_1^2 + \gamma_{12}A_2^2) = 0, \\ A_2(\gamma^2 - \theta^2) + \frac{2}{3}KvA_1 + Kv^2\alpha_{21}(A_1C_2 + A_2C_1) + \\ + \frac{3}{4}Kv^3A_1(\beta_{21}A_1^2 + \beta_{22}A_2^2) + \frac{3}{4}QA_2(\gamma_{21}A_1^2 + \gamma_{22}A_2^2) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} C_1 = -\frac{Kv^2}{2\Delta} \left[(\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_2 - \alpha_{21}A_1A_2\Delta_4 \right] \\ C_2 = -\frac{Kv^2}{2\Delta} \left[\alpha_{21}A_1A_2\Delta_1 - (\alpha_{11}A_1^2 + \alpha_{12}A_2^2)\Delta_3 \right] \end{aligned} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 1 + \frac{3}{2}Q\gamma_{11}A_1^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{12}A_2^2 + Kv^3\beta_{11}A_1A_2 \\ \Delta_2 &= \gamma^2 + Kv^3\beta_{22}A_1A_2 + \frac{3}{2}Q\gamma_{22}A_2^2 + \frac{1}{2}Q\gamma_{21}A_1^2 \\ \Delta_3 &= \frac{2}{3}Kv + \frac{3}{2}Kv^3\beta_{21}A_1^2 + \frac{1}{2}Kv^3\beta_{22}A_2^2 + Q\gamma_{21}A_1A_2 \\ \Delta_4 &= -\frac{2}{3}Kv + \frac{3}{2}Kv^3\beta_{12}A_2^2 + \frac{1}{2}Kv^3\beta_{11}A_1^2 + Q\gamma_{12}A_1A_2 \\ \Delta &= \Delta_1\Delta_2 - \Delta_3\Delta_4. \end{aligned}$$

4. Численное исследование и основные результаты

Полученная система (16) решена численно при следующих исходных данных: $E = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$; $\mu = 0.34$; $\rho_0 = 2.79 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ (дюралюминий), $\alpha = 1.4$; $\rho_\infty = 1.29 \text{ kg/m}^3$, $a_\infty = 340.29 \text{ m/s}$ (воздух). На основе этого исследована зависимость амплитуды (в точке $(a/2, b/2, 0)$ пластинки) установившихся флаттерных колебаний A (в рассматриваемом случае $A = A_1$) от параметров θ и v для разных значений h/a и a/b . Результаты численного анализа показывают следующее:

- Если $v = 0$, как и следовало ожидать [1], амплитудно-частотная зависимость носит жёсткий характер, т.е. с увеличением амплитуды частота возрастает.
- При $0 < v < v_{cr}$, если v достаточно мало, то жёсткий характер рассматриваемой аэроупругой системы сохраняется и с увеличением скорости обтекания амплитуда установившихся колебаний уменьшается (кривые 1 и 2 на фиг.1, которые построены при $h = 10^{-2} a$ и $b = a$).
- В зависимости от геометрических параметров (ha^{-1} и ab^{-1}) задачи, существует определённое значение \bar{v} , превышение которого ($v > \bar{v}$) приводит к нарушению монотонной зависимости амплитуды A от частоты θ (функция $A(\theta)$ становится многозначной функцией). Для выбранных значений параметров ha^{-1} и ab^{-1} (на основе которых построены графики зависимостей на фиг.1) функция $A(\theta)$ при $v > v_{cr}$ является многозначной. Кривая 3 на этой фигуре соответствует случаю $v = v_{cr}$. Точка N является точкой бифуркации (для этой точки $\theta = \theta^*$, где θ^* – значение частоты колебания на границе области устойчивости, определяемой по линейной теории), а M – предельной точкой. Здесь на графике функции $A(\theta)$ (амплитудно-частотная зависимость) присутствует начальный участок, затянутый к оси ординат (т.е. существует определённое значение амплитуды A , при котором частота колебаний принимает минимальное значение θ_*) и поэтому указанная зависимость не является жёсткой. Её условно назовём “мягкой”. Если теперь постепенно увеличивать частоту колебаний, то можно наблюдать следующую картину (кривая 3):
 - а) при значениях θ , принадлежащих интервалу $(0, \theta_*)$, возбуждение установившихся колебаний невозможно;
 - б) если при $\theta \in (\theta_*, \theta^*)$ пластинке сообщить достаточно большое возмущение, то она может не вернуться к первоначальному положению, совершая

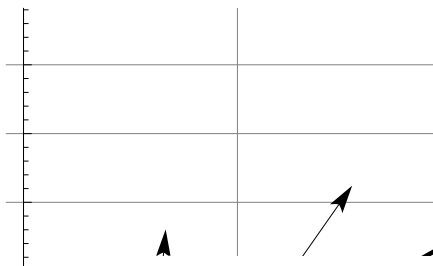
установившиеся колебания с конечной амплитудой (хотя указанное положение устойчиво по отношению к весьма малым возмущениям);

в) при переходе частоты θ через значение θ^* , амплитуда скачкообразно изменяется от нуля до конечного значения и затем будет монотонно увеличиваться вместе с увеличением θ . Если теперь уменьшить θ от значений, больших θ^* , то режим установившихся колебаний (с монотонно убывающей амплитудой) сохраняется вплоть до $\theta = \theta_*$, где колебания “сорвутся” и вновь восстанавливается первоначальное невозмущённое состояние пластинки.

- Если $v \geq v_{cr}$ (кривая 4 на фиг.1, где $v = 1.5v_{cr}$), то:
 - а) колебания рассматриваемой системы не могут иметь жёсткий характер и послекритические флаттерные колебания возможны только при $\theta \geq \theta_{**} > \theta^*$ (здесь θ_{**} – абсцисса предельной точки М, которая зависит от выбранного значения v),

б) амплитудно-частотная зависимость является только “мягкой” (согласно вышесказанному определению), у которого предельная точка, в отличие от предыдущего случая (случай докритических флаттерных колебаний), может оказаться достаточно удалённой от точки $\theta = 1$. На фигуре устойчивые ветви обозначены жирными линиями, а неустойчивые – тонкими линиями.

Отметим, что переход из одного типа зависимости к другому можно регулировать соответствующим образом выбирая геометрические и физические параметры рассматриваемой аэроупругой системы.



Амплитудно-частотная зависимость при $a = 100h$, $b = a$ и различных значениях скорости обтекающего потока

Отметим также, что указанные новые явления связаны с присутствием обтекающего потока при нелинейных колебаниях (в особенности, с учётом квадратичной аэродинамической нелинейности).

Исследование выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 13-2C243.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
3. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
4. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твёрдых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С.67-122.
5. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Нелинейный флаттер ортотропной прямоугольной пластинки. /В сб. научных трудов международной конференции “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. 2010. Т.1. С.118-123.
6. Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A. & Marzocca P. On the Stability of Flexible Orthotropic Rectangular Plate in Supersonic Flow: Amplitude-Speed Dependency in Pre- and Post- Critical Flight Conditions. Journal of Aerospace Engineering, 10.1061/(ASCE)AS.1943-5525.0000246 (Jul. 19, 2012), ISSN: 0893-1321, 2012.
7. Багдасарян Г.Е. Об устойчивости ортотропных пологих оболочек, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа. //Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. Т.1. N1. С.92-98.
8. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука, 1974. 446с.
9. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. //Journ. Aeronaut. Sci. 23. N6. 1956.
10. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики

Тел.: (010) 552964; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф.-м.н., доцент, Институт механики НАН Армении

Тел.: (010) 726957; **E-mail:** mikilyan@rau.am

Сагоян Рафаэль Оникович – внештатный работник Института механики НАН Армении

Тел.: (093) 248226; **E-mail:** rafael1984@mail.ru

Марзока Пьер – доцент, Университет Кларксона, США

Поступила в редакцию 18.06.2013