

УДК 539.374

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПОЛУПЛОСКОСТИ ИЗ
ВЯЗКОУПРУГОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ВИБРАЦИИ ЖЁСТКОГО ШТАМПА
НА ГРАНИЦЕ**
Вермишян Г. Б.

Ключевые слова: комплексный модуль, комплексная податливость, диссипативная сила, линейная и экспоненциальная аппроксимации.

Keyword: complex modules, complex compliant, dissipative forces, linear und exponential approximation.

Վերաբերյալի Գ. Բ.

Ջերմության բաշխումը առաձգա-մածուցիկ կիսահարթությունում, երբ նրա եզրի վրա կիրառված կոշտ դրոշմի վրա ազդում է վիբրացիոն ուժ

Աշխատանքում դիտարկված է ջերմության բաշխումը առաձգա-մածուցիկ կիսահարթությունում, երբ նրա եզրի մի մասի վրա ազդում է բաշխված ուժ, որը իրենից ներկայացնում է հաստատուն ամպլիտուդայով հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող բեռ: Աշխատանքում դիտարկված է նաև այն դեպքը, երբ եզրի մի մասի վրա կիրառված է կոշտ դրոշմ, իսկ մնացած մասը ազատ է արտաքին բեռից: Խնդիրը լուծված է այն պայմանով, երբ բաշխված բեռի դեպքում ջերմաստիճանը կիսահարթության եզրի վրա հավասար է արտաքին միջավայրի ջերմաստիճանին, իսկ կոշտ դրոշմի կիրառման դեպքում, այն մասը որտեղ կիրառված է այն ջերմամեկուսացված է, իսկ մնացած մասում տեղի ունի ջերմափոխակալություն արտաքին միջավայրի հետ: Բերված են հաշվումներ կոշտ դրոշմի կիրառման դեպքում:

Vermishyan G.B.

The definition of the temperature in the semi-plane made from the visko-elastic material under the vibration of hard stamp on the border

The definition of the temperature in the semi-plane the visco-elastic material, when on the part of its is acting the load, that is varying harmonically by the constant amplitude is considered. The case, when on the part of the bound is applied hard stamp, and the other part is free from exterior loads is considered also. The problem is solved, when the temperature for the case of hard load, on the bound of the semi-plane is equal to the temperature of the environment, and when there is acting the stamp, the part of the bound, where the stamp is considered thermo-isolated and outside there is a loose heat to the environment. Calculation is made for the case of hard stamp.

В работе рассматривается определение температуры в полуплоскости из вязкоупругого материала, когда на часть границы действует распределённая нагрузка, которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой. В работе также рассмотрен случай, когда на часть границы приложен жёсткий штамп под действием вибрационной нагрузки, а остальная часть свободна от внешних нагрузок. Задача решена при условии, когда температура для случая распределённой нагрузки на границе полуплоскости равна температуре окружающей среды, а при действии жёсткого штампа часть границы, где приложен штамп, считается теплоизолированной, а вне её имеет место свободная теплоотдача в окружающую среду. Проведены вычисления в случае действия жёсткого штампа.

Рассматривается определение температуры в полуплоскости из вязкоупругого материала, когда на часть границы действует распределённая нагрузка, меняющаяся по гармоническому закону, амплитуда интенсивности которой постоянна. Кроме того, рассмотрен случай, когда на часть границы приложен жёсткий штамп, на который действует вибрационная нагрузка с постоянной амплитудой, а остальная часть свободна от внешних нагрузок. Температура на границе полуплоскости для

случая распределённой нагрузки принимается неизменной и равной температуре окружающей среды, а при действии жёсткого штампа участок границы полуплоскости, где приложен штамп, считается теплоизолированным, а вне штампа имеет место свободная теплоотдача в окружающую среду.

1. Пусть на границе полуплоскости $y = 0, x \geq 0$ из вязкоупругого материала действует распределённая нагрузка, меняющаяся по гармоническому закону, амплитуда интенсивности которой равна p_0 . Задача решена при условии, что температура на границе полуплоскости равна температуре окружающей среды.

Будем полагать, что составляющая комплексной податливости $J''(T, \omega)$ мала по сравнению с $J'(T, \omega)$ [1,4].

Т.к. внешняя нагрузка меняется по гармоническому закону, то компоненты напряжения меняются по тому же закону, где в качестве амплитуды взяты компоненты напряжения упругой задачи [2,8]. В этом случае компоненты напряжения будут:

$$\sigma_x = \sigma_x^0 \cos \omega t, \quad \sigma_y = \sigma_y^0 \cos \omega t, \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}^0 \cos \omega t, \quad (1.1)$$

где

$$\sigma_x^0 = -p_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} - \frac{1}{\pi} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right),$$

$$\sigma_y^0 = -p_0 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + \frac{1}{\pi} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right), \quad (1.2)$$

$$\tau_{xy}^0 = \frac{p_0}{\pi} \frac{y^2}{x^2 + y^2}.$$

Связь между компонентами деформации и напряжения возьмём в виде [4]

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \sigma_x(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_y}{E} - \nu \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \sigma_y(\tau) d\tau,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} + \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \sigma_y(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_x}{E} - \nu \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \sigma_x(\tau) d\tau, \quad (1.3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu) \tau_{xy}}{E} + 2(1 + \nu) \int_{-\infty}^t K(T, t - \tau) \tau_{xy}(\tau) d\tau,$$

где E – модуль упругости, ν – коэффициент Пуассона. Используя из (1.1) значения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и вводя переменную $\zeta = t - \tau$, получим

$$\varepsilon_x = (\sigma_x^0 - \nu \sigma_y^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t - \left[\operatorname{Im} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\}$$

$$\varepsilon_y = (\sigma_y^0 - \nu \sigma_x^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t - \left[\operatorname{Im} \int_0^\infty K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\} \quad (1.4)$$

$$\gamma_{xy} = 2(1+\nu)\tau_{xy}^0 \left\{ \left[\frac{1}{E} + \operatorname{Re} \int_0^{\infty} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \cos \omega t - \left[\operatorname{Im} \int_0^{\infty} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta \right] \sin \omega t \right\}$$

Введём комплексную податливость

$$J^*(T, \omega) = \int_0^{\infty} K(T, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta = J'(T, \omega) - iJ''(T, \omega) = \quad (1.5)$$

$$= J(T, \omega) \cos \varphi_0 - iJ(T, \omega) \sin \varphi_0.$$

где φ_0 – сдвиг фаз между деформацией и напряжением. Учитывая (1.5), из (1.4) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x^0 - \nu\sigma_y^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + J'(T, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T, \omega) \sin \omega t \right\}, \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y^0 - \nu\sigma_x^0) \left\{ \left[\frac{1}{E} + J'(T, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T, \omega) \sin \omega t \right\}, \\ \gamma_{xy} &= 2(1+\nu)\tau_{xy}^0 \left\{ \left[\frac{1}{E} + J'(T, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T, \omega) \sin \omega t \right\}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Работа, совершаемая при вязкоупругой деформации, равна

$$W = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_x \frac{d\varepsilon_x}{dt} dt + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_y \frac{d\varepsilon_y}{dt} dt + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \tau_{xy} \frac{d\gamma_{xy}}{dt} dt \quad (1.7)$$

Из (1.1), (1.6) и (1.7) получим

$$W = \pi J''(T, \omega) \left[(\sigma_x^0)^2 - 2\nu\sigma_x^0\sigma_y^0 + (\sigma_y^0)^2 + 2(1+\nu)(\tau_{xy}^0)^2 \right]. \quad (1.8)$$

Интенсивность выделения тепла за один цикл при деформации вязкоупругого тела будет

$$q = \frac{\lambda\omega k}{2\pi} W. \quad (1.9)$$

Здесь k – величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ – коэффициент, равный доле механической работы, переходящей в тепло. С целью установления максимального нагрева будем полагать этот коэффициент постоянным и равным единице. Для стационарного случая уравнение теплопроводности принимает следующий вид [4]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + f(x, y) J''(T, \omega) = \alpha(T - T_0), \quad (1.10)$$

$$f(x, y) = \mu \left[(1-\nu) \left(1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \right)^2 + \frac{1+\nu}{\pi^2} \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right], \quad (1.11)$$

$$\mu = \frac{\lambda \omega k p_0^2}{a_1 c_1},$$

a_1 – коэффициент температуропроводности, α – коэффициент теплопередачи, c_1 – теплоёмкость. Граничные условия для $T(x, y)$ примем в форме $T = T_0$ при $y = 0$, т.е. температура на границе полуплоскости равна температуре окружающей среды, а на бесконечности температура ограничена.

Известно [1,4], что компоненты комплексной податливости и комплексного модуля связаны соотношением

$$J'(T, \omega) = \frac{E'(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2}, \quad J''(T, \omega) = \frac{E''(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2} \quad (1.12)$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для $E'(T, \omega)$ и $E''(T, \omega)$ можно воспользоваться линейной аппроксимацией, при этом модуль $E'(T, \omega)$ будем считать постоянным

$$E'(T, \omega) = A, \quad E''(T, \omega) = B + CT, \quad (1.13)$$

где A, B, C – физические постоянные. Поскольку $E''(T, \omega) \ll E'(T, \omega)$, то величиной $E''(T, \omega)$ по сравнению с $E'(T, \omega)$ можно пренебречь. Тогда соотношение (1.12) примет вид

$$J'(T, \omega) = 1/A, \quad J''(T, \omega) = (B + CT)/A^2. \quad (1.14)$$

Подставляя (1.14) в (1.10) и вводя новую неизвестную функцию, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \delta^2 u = -\frac{C}{A^2} u f(x, y) - \frac{B + CT_0}{A^2 T_0} f(x, y), \quad (1.15)$$

$$(T - T_0)/T_0 = u(x, y), \quad \delta = \sqrt{\alpha}.$$

Запишем граничные условия для $u(x, y)$, $u = 0$ при $y = 0$, на бесконечности $u(x, y)$ ограничена.

Решение уравнения (1.15) при заданном граничном условии на $y = 0$ можно свести к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода [2], которое после перехода в полярную систему координат имеет вид:

$$u(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi(\rho_0, \vartheta_0) + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^\infty K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) u(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta, \quad (1.16)$$

$$K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{C}{A^2} f(\rho, \vartheta) G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta),$$

$$\Phi(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{B+CT}{A^2 T_0} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) f(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta,$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \rho_0 < \infty.$$

$$f(\rho, \vartheta) = \mu \left[(1-\nu) \left(\frac{3}{2} - \frac{\vartheta}{\pi} \right)^2 + \frac{1+\nu}{\pi^2} \sin^2 \vartheta \right]$$

G^* – функция Грина уравнения (1.15) для полуплоскости, которая удовлетворяет условию излучения на бесконечности [6].

Используя теорему сложения для цилиндрических функций [7], G^* можно представить в виде

$$G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\rho_0, \rho) \sin \left[n \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right] \sin \left[n \left(\vartheta - \frac{\pi}{2} \right) \right], \quad (1.17)$$

$$W_n(\rho_0, \rho) = \begin{cases} I_n(\delta\rho) K_n(\delta\rho_0), & \rho < \rho_0 \\ I_n(\delta\rho_0) K_n(\delta\rho), & \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (1.18)$$

где $I_n(z)$ – функция Бесселя мнимого аргумента, а $K_n(z)$ – функция Макдональда.

Для решения интегрального уравнения (1.16) заменим его ядро вырожденным. Разложим ядро в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функций:

$$\varphi_k(\rho_0, \vartheta_0) = \sqrt{\frac{4k}{\pi}} e^{-k\rho_0} \sin \left[k \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right]$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \rho_0 < \infty, k = 1, 2, \dots$$

$$\varphi_m(\rho, \vartheta) = \sqrt{\frac{4m}{\pi}} e^{-m\rho} \sin \left[m \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \right] \quad (1.19)$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, 0 < \rho < \infty, m = 1, 2, \dots$$

Будем иметь:

$$K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} A_{km} \varphi_m(\rho, \vartheta) \right\} \varphi_k(\rho_0, \vartheta_0), \quad (1.20)$$

$$A_{km}^* = \frac{4\sqrt{km}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \sin \left[k \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right] e^{-k\rho_0} \rho_0 d\rho_0 d\vartheta_0 \right\} \times \\ \times \sin \left[m \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \right] e^{-m\rho} \rho d\rho d\vartheta =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{4\sqrt{km}}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} G^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \sin \left[k \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right] e^{-k\rho_0} \rho_0 d\rho_0 d\vartheta_0 \right\} \times \\
&\quad \times \sin \left[m \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta \right) \right] e^{-m\rho} f(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta. \quad (1.21)
\end{aligned}$$

$f(\rho, \vartheta)$ даётся по (1.16). После некоторых вычислений получим

$$\begin{aligned}
A_{km}^* &= \frac{32\mu C(1-\nu)(mk)^{3/2}}{(\pi k)^2(m^2-k^2)^2} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} W_m(\rho_0, \rho) e^{-k\rho} \rho d\rho \right\} e^{-m\rho_0} \rho_0 d\rho_0, \quad m \neq k, \\
&= \frac{2k\mu C(1-\nu)}{\pi A^2} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{\pi k^2} \right) \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} W_k(\rho_0, \rho) e^{-k\rho} \rho d\rho \right\} e^{-k\rho_0} \rho_0 d\rho_0, \quad m = k. \quad (1.22)
\end{aligned}$$

При вычислении A_{km}^* интегралы

$$\int_0^{\infty} W_m(\rho_0, \rho) e^{-k\rho} \rho d\rho = K_m(\delta\rho_0) \int_0^{\rho_0} I_m(\delta\rho) e^{-k\rho} \rho d\rho + I_m(\delta\rho_0) \int_{\rho_0}^{\infty} K_m(\delta\rho) e^{-k\rho} \rho d\rho$$

можно вычислить численно.

Выражения для ядра (1.20) представим в виде

$$\begin{aligned}
K^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) &= \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^N A_{km} \varphi_m(\rho, \vartheta) \right\} \varphi_k(\rho_0, \vartheta_0) + \\
&+ \sum_{k=N+1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=N+1}^{\infty} A_{km} \varphi_m(\rho, \vartheta) \right\} \varphi_k(\rho_0, \vartheta_0). \quad (1.23)
\end{aligned}$$

Число N можно взять столь большим, что остатком ряда (1.23) можно пренебречь, тогда интегральное уравнение (1.16) примет вид

$$u(\rho_0, \vartheta_0) - \sum_{k=1}^N \left\{ \sum_{m=1}^N A_{km} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} u(\rho, \vartheta) \varphi_m(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \right\} \varphi_k(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi(\rho_0, \vartheta_0). \quad (1.24)$$

Как известно, решение интегрального уравнения с вырожденным ядром можно свести к линейной системе алгебраических уравнений. После некоторых вычислений получим решение интегрального уравнения в виде [4]

$$\begin{aligned}
u(\rho_0, \vartheta_0) &= \Phi(\rho_0, \vartheta_0) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^N \sqrt{k} Y_k e^{-k\rho_0} \sin \left[k \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right], \\
-\frac{\pi}{2} &\leq \vartheta_0 \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 < \rho_0 < \infty, \quad (1.25)
\end{aligned}$$

$$Y_k = \sum_{m=1}^N X_m A_{km}^*,$$

$$\Phi(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{2\mu(B + CT_0)}{\pi A^2 T_0} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \left[n \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta_0 \right) \right] \int_0^{\infty} W_n(\rho_0, \rho) \rho d\rho, \quad (1.26)$$

$$b_{2p} = \frac{\nu-1}{2p}, b_{2p-1} = \frac{\nu-1}{2p-1} + \frac{2}{\pi^2(2p-1)} \left[\frac{1-\nu}{(2p-1)^2} - \frac{(1-\nu)(2p-1)^2 - 2}{(2p-1)^2 - 4} \right],$$

где $W_n(\rho_0, \rho)$ даётся формулой (1.18) (явные выражения для $\Phi(\rho_0, \vartheta_0)$ не приводятся). Постоянные X_m определяются из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m - \sum_{k=1}^N X_k A_{km}^* = \Phi_m, \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (1.27)$$

$$\Phi_m = \frac{4\mu C b_m \sqrt{m}}{\sqrt{\pi A^2}} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^{\infty} W_m(\rho_0, \rho) \rho d\rho \right\} e^{-m\rho_0} \rho_0 d\rho_0.$$

Решение задачи в этом случае следует из (1.25).

2. Рассмотрим случай, когда нагружен участок $-a \leq x \leq a$ границы полуплоскости $y = 0$. Компоненты напряжения даются формулами (1.1), где

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= -\frac{p_0}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} + \frac{2ay(y^2 - x^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - (2ax)^2} \right], \\ \sigma_y^0 &= -\frac{p_0}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} - \frac{2ay(y^2 - x^2 + a^2)}{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - (2ax)^2} \right], \\ \tau_{xy}^0 &= \frac{p_0}{\pi} \frac{4axy^2}{(x^2 + y^2 + a^2)^2 - (2ax)^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение теплопроводности имеет вид (1.10) лишь с той разницей, что в этом случае функция $f(x, y)$ даётся в виде

$$f(x, y) = \frac{2\mu}{\pi^2} \left[(1-\nu) \left(\operatorname{arctg} \frac{a+x}{y} + \operatorname{arctg} \frac{a-x}{y} \right)^2 + \frac{16(1+\nu)a^2 x^2 y^4}{[(x^2 + y^2 + a^2)^2 - (2ax)^2]^2} \right] \quad (2.2)$$

Решение рассмотренного случая ищется методом, изложенным в п.1. Окончательное решение для этого случая даётся по формуле (1.25). Коэффициенты Фурье A_{km}^* и $\Phi(\rho_0, \vartheta_0)$, входящие в решение задачи, вычисляются на основании формул (1.21) и (2.2).

3. Рассмотрим деформацию полуплоскости из вязкоупругого материала, когда на границе приложен жёсткий штамп, на который действует вибрационная нагрузка с

постоянной амплитудой, равной p_0 . Основание штампа имеет вид дуги окружности радиуса R , симметрично расположенной относительно оси ou . Будем считать R весьма большим, тогда дугу окружности можно заменить дугой параболы $f_0(x) = x^2/2R$, имеющей ту же кривизну в вершине. Для того, чтобы вдавить штамп до полного соприкосновения с отрезками границы полуплоскости шириной, равной $2a$ (отрезок границы $-a \leq x \leq a$), необходимо, чтобы амплитуда p_0 и полуширина отрезка были связаны соотношением [8]

$$a = \sqrt{\frac{4Rp_0(1-\nu^2)}{\pi E}}. \quad (3.1)$$

Остальная часть границы свободна от внешних нагрузок. Из постановки задачи следует, что ширина области контакта меняется по гармоническому закону $2a^* = 2a \cos \omega t$, где a дается по формуле (3.1). Произведём оценку температуры для этого случая, несколько изменив условия теплоотдачи, имея в виду, что полуплоскость более интенсивно нагревается под штампом. При приведённых ниже предположениях мы получим верхнюю оценку для этой температуры. Будем полагать, что под штампом имеется теплоизоляция, а на остальной части границы происходит свободная теплоотдача по направлению нормали к полуплоскости. Предполагается, что интенсивность выделения тепла не зависит от текущих координат и равна своему максимальному значению, которое принимает в начале координат. При изложенных допущениях можно принять, что температура зависит только от r , т.е. от расстояния переменной точки до начала координат. Ввиду наличия теплоизоляции под штампом вблизи последнего среда нагревается более интенсивно, что позволяет разделить область распределения температуры на две части: $0 \leq r < a$ и $a < r < \infty$ и представить функцию температуры в виде:

$$T = \begin{cases} T_1, & 0 \leq r < a \\ T_2, & a < r < \infty \end{cases}$$

Функции T_1 и T_2 сшиваются на линии раздела $r = a$. При этих предположениях уравнения теплопроводности для стационарного случая принимают вид:

$$\frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} + 2HJ''(T_1, \omega) = 0, \quad 0 < r < a, \quad (3.2)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_2}{dr} - \alpha(T_2 - T_0) + 2HJ''(T_2, \omega) = 0, \quad a < r < \infty, \quad (3.3)$$

$$H = \frac{9k\lambda\omega p_0}{8\pi^2 a_1 c_1 R(1-\nu^2)}. \quad (3.4)$$

В первой области воспользуемся экспоненциальной аппроксимацией для компонент комплексного модуля ввиду сравнительно высокой температуры, а во второй – линейной. Так как температура под штампом сильно отличается от температуры вне штампа, то в уравнении (3.2) для компонент комплексного модуля воспользуемся экспоненциальной аппроксимацией

$$E'(T_1, \omega) = A_0 e^{-B_0 T_1}, \quad E''(T_1, \omega) = C_0 e^{D_0 T_1}. \quad (3.5)$$

В уравнении (3.3) воспользуемся линейной аппроксимацией вида

$$E'(T_2, \omega) = A^*, \quad E''(T_2, \omega) = C^* + D^* T_2, \quad (3.6)$$

$$A^* = A_0 e^{-B_0 T_*}, \quad C^* = C_0 e^{D_0 T_*} (1 - D_0 T_*), \quad D^* = C_0 D_0 e^{D_0 T_*}, \quad (3.7)$$

где T_* – температура при $r = a$. Согласно формулам (3.5)-(3.7), уравнения (3.2) и (3.3) преобразуются к виду:

$$\frac{d^2 T_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_1}{dr} + \frac{2HC_0}{A_0^2} e^{\gamma T_1} = 0, \quad 0 < r < a, \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2 T_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_2}{dr} - \alpha (T_2 - T_0) + \frac{2HC_0}{A_0^2} e^{\gamma T_2} (1 - D_0 T_2 + D_0 T_0) = 0, \quad a < r < \infty. \quad (3.9)$$

Граничные условия для температур T_1 и T_2 таковы:

$$T_1 = T_2 = T_*, \quad \frac{dT_1}{dr} = \frac{dT_2}{dr} \quad \text{при } r = a, \quad (3.10)$$

$$T_1|_{r=0} < \infty, \quad T_2|_{r \rightarrow \infty} < \infty.$$

В работе [9] рассматриваются критические условия теплового взрыва при сложном теплообмене с окружающей средой. Для стационарного случая уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{d^2 T}{dr^2} + \frac{m}{r} \frac{dT}{dr} + \chi e^T = 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что при $m = 0$ общий интеграл этого уравнения приведён Д.А. Франк-Каменецким [10], а для $m = 1$ общий интеграл найден Н. Лемке [11]. Уравнение (3.11) может не иметь решения. Это обстоятельство означает, что стационарный режим невозможен. Может быть также одно или несколько решений. В рассматриваемых случаях при $m = 1$ оказывается, что полученное уравнение имеет два решения. Одно из них соответствует высокой температуре, при которой невозможно реализовать устойчиво установившийся режим.

В уравнение (3.8) введём новые переменные:

$$\gamma T_1 + 2\rho = \tau, \quad r = e^\rho, \quad (3.12)$$

получаем

$$\frac{d^2 \tau}{d\rho^2} + a_0^2 e^\tau = 0, \quad a_0^2 = \frac{2\gamma HC_0}{A_0^2}. \quad (3.13)$$

Общее решение уравнения (3.13) будет

$$e^\tau = \frac{4c_1^2 c_2^2 e^{-\sqrt{2}c_1 \rho}}{\left(1 + a_0^2 c_2^2 e^{-\sqrt{2}c_1 \rho}\right)^2}. \quad (3.14)$$

Переходя к первоначальным переменным, получаем

$$T_1 = \frac{1}{\gamma} \ln \frac{4c_1^2 c_2^2 r^{-(\sqrt{2}c_1 + 2)}}{\left(1 + a_0^2 c_2^2 r^{-\sqrt{2}c_1}\right)^2}. \quad (3.15)$$

Чтобы температура при $r = 0$ была конечной, возьмём $\sqrt{2}c_1 + 2 = 0$, т.е. $c_1 = -\sqrt{2}$, после чего из (3.15) получаем

$$T_1 = \frac{2}{\gamma} \ln \frac{2\sqrt{2}c_2}{1+a_0^2 c_2^2 r^2}, \quad 0 \leq r < a. \quad (3.16)$$

Уравнение (3.9) приведём к виду

$$\frac{d^2 u}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du}{d\rho} - \varepsilon^2 u = -\alpha_2, \quad u = \frac{T_2 - T_0}{T_0}, \quad \frac{r}{a} = \rho, \quad (3.17)$$

где

$$\varepsilon^2 = \alpha a^2 - \frac{2a^2 H C_0 D_0 e^{\gamma T_*}}{A_0^2}, \quad \alpha_2 = \frac{2a^2 H C_0 e^{\gamma T_*}}{T_0 A_0^2}.$$

Общее решение уравнения (3.17) будет

$$u = A_1 I_0(\varepsilon \rho) + B_1 K_0(\varepsilon \rho) + \alpha_2 / \varepsilon^2, \quad (3.18)$$

откуда

$$T_2 = T_0 + T_0 \left(A_1 I_0 \left(\frac{\varepsilon r}{a} \right) + B_1 K_0 \left(\frac{\varepsilon r}{a} \right) \right) + \alpha_2 T_0 / \varepsilon^2, \quad a < r < \infty. \quad (3.19)$$

Чтобы при $r \rightarrow \infty$ T_2 было ограничено, возьмём $A_1 = 0$, тогда

$$T_2 = T_0 + T_0 \left(B_1 K_0 \left(\frac{\varepsilon r}{a} \right) + \alpha_2 / \varepsilon^2 \right), \quad a < r < \infty. \quad (3.20)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.10), находим c_2 и B_1 . Решение уравнений (3.13) и (3.17) при граничных условиях (3.10), соответственно, даётся в виде

$$T_1 = \frac{2}{\gamma} \ln \frac{2\sqrt{2}ax}{c_0(a^2 + x^2 r^2)}, \quad 0 \leq r < a, \quad (3.21)$$

$$T_2 = T_0 + \frac{4x^2}{y\gamma(1+x^2)} \frac{K_0\left(\frac{yr}{a}\right)}{K_1(y)} + \frac{2a^2 H C_0 e^{\gamma T_*}}{\varepsilon^2 A_0^2} (1 - D_0 T_* + D_0 T_0), \quad a < r < \infty, \quad (3.22)$$

$$T_* = \frac{2}{\gamma} \ln \frac{2\sqrt{2}x}{aa_0(1+x^2)}, \quad (3.23)$$

где H даётся по (3.4), a – по (3.1), а x и y определяются из систем трансцендентных уравнений

$$\frac{2x^2}{(1+x^2)} \frac{K_0(y)}{yK_1(y)} = \ln \frac{2\sqrt{2}x}{a_0 a (1+x^2)} - \frac{8x^2}{y^2(1+x^2)^2} - 0.3, \quad (3.24)$$

$$y^2 = \alpha a^2 - \frac{8x^2}{3(1+x^2)^2}.$$

Приведены вычисления для случая вибрации жёсткого штампа. Материал является полиэтиленом. При вычислении использованы следующие данные [2,4]:

$$A_0 = 3,4 \cdot 10^4 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad B_0 = D_0 = 0,01 \quad ^{-1}, \quad c_0 = 3,87 \cdot 10^2 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2},$$

$$a_1 c_1 = 0,28 \text{ ккал/м.час.град}, k = 0,00234 \text{ ккал/к2м}, \omega = 100 \text{ Гц},$$

$$\nu = 1/3, T_0 = 20^\circ \text{C}, \alpha = 0,71 \text{ п}^{-2}, \rho_0 = 10^4 \text{ кг/м}^3, \rho = 10^4 \text{ кг/м}^3, \tau_n = 10^4 \text{ с}.$$

Введём безразмерные координаты

$$p_* = p_0 / p_n, \tau_0 = T_1(0) / T_n, \tau_* = T_* / T_n, \tau_1 = T_1 / T_n, \tau_2 = T_2 / T_n,$$

$$\tau_3 = a / a_n, a_n = 10, \rho = r / a, T_n = 4T_0, \quad (3.25)$$

$$\tau = \begin{cases} \tau_1, & 0 < r \leq a \\ \tau_2, & a < r < \infty \end{cases}$$

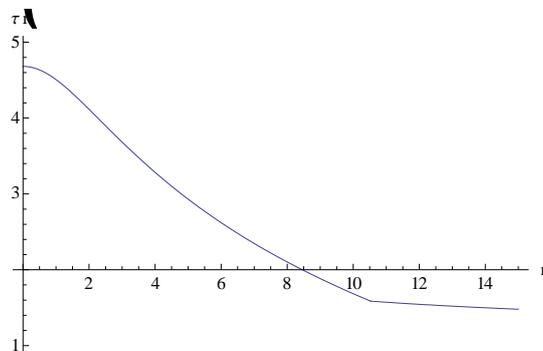
где T_* – температура при $r = a$, T_0 – температура окружающей среды, p_n – начальная нагрузка, $T_1(0)$ – температура при $r = 0$, $T_n = 4T_0$.

В табл. 1 приведены значения τ_0 , τ_* и τ_3 в зависимости от p_* .

Таблица 1

p_*	1	2	3	4	5
τ_0	4.2118	3.9448	3.7895	3.6798	3.595
τ_*	3.9663	3.6621	3.4828	3.3548	3.255
τ_3	1.0527	1.4888	1.8234	2.1054	2.3539

Из табл. 1 видно, что при увеличении нагрузки увеличивается область контакта $-a \leq x \leq a$, а температура при $r = 0$ и $r = a$ уменьшается. На основании полученных результатов построены графики.



Фиг.1. График изменения $\tau(r)$ в зависимости от r при $p_0 = 10^4 \text{ кг}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд. ИЛ, 1963. 535с.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье. М.: ИЛ, 1955.
3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Второе издание. М.: 1963. 62с.
4. Вермишян Г.Б. Действие вибрационной нагрузки на пластинку с круговым отверстием из вязкоупругого материала. //Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №3. С.86-93.

5. Галин Л.А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. // Изв. АН СССР. Механика. 1965. №6.
6. Положий Г.Н. Уравнения математической физики. М.: Изд. «Высшая школа», 1964. 559с.
7. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функция Бесселя, функция параболического цилиндра. Ортогональные многочлены. М.: Наука, 1966. 295с.
8. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707с.
9. Берзикин В.В., Мержанов А.Г. Краевая задача в теории теплового взрыва. //Докл. АН СССР. 1958. Т.120. № 6. С.1271-1273.
10. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Изд. АН СССР, 1947. 491с.
11. Lemke H. Uber die Differentialgleichungen, Welche den Gleichgewichtszustand eines gesformigen Himmelskorpers bestimmen, dessen Teile gegeneinander nach dem Newtonschen Gesetze gravitieren. J. f. Math. 1913, 142, 118 pp.

Сведения об авторе:

Вермишян Гарник Бахшоевич – канд. физ-мат. наук, доцент каф. высшей математики ЕГУ Архитектуры и Строительства

Адрес: Ереван, Арабкир, 39-ая ул., д.2

Тел.: дом.:(25-06-71), моб.: (095)456 265

Поступила в редакцию 03.04.2013