

УДК 539.3

**О ВДАВЛИВАНИИ П-ОБРАЗНОГО ЖЁСТКОГО ШТАМПА В УПРУГУЮ
ПОЛУПЛОСКОСТЬ С УЧЕТОМ СИЛ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ И
СЦЕПЛЕНИЯ**

Амирджанян А.А., Саакян А.В.

Ключевые слова: контактная задача, сингулярное интегральное уравнение, трение, сцепление, численный метод, метод механических квадратур

Keywords: contact problem, singular integral equation, friction, adhesion, numerical method, mechanical quadrature method.

Ամիրջանյան Հ.Ա., Մահակյան Ա.Վ.

**Սիճի կոշտ դրոշմի մխրճումը առաձգական կիսահարթություն սահքի և հարակցման շփման ուժերի
հաշվառումով**

Դիտարկված է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիր Սիճի կոշտ դրոշմի և առաձգական կիսահարթության փոխազդեցության վերաբերյալ: Ենթադրվում է, որ դրոշմի և կիսահարթության եզրի միջև կոնտակտի տիրույթում գործում են և սահքի, և հարակցման շոշափող ուժեր: Խնդիրը լուծվել է մեխանիկական քառակուսացման եղանակով և գտնվել են կոնտակտային լարումների բաշխումը և սահքի գոտիների երկարությունները:

Amirjanyan H.A., Sahakyan A.V.

**About the indentation of a П-shaped rigid punch into half plane, taking into account both sliding and
adhesion friction forces**

The contact problem of elasticity theory about the indentation of a П-shaped rigid punch into elastic half plane is considered. It is supposed that a both sliding and adhesion friction forces acts in the contact zone. The problem was solved by the method of mechanical quadratures. The distribution of contact stresses and the length of sliding areas were found.

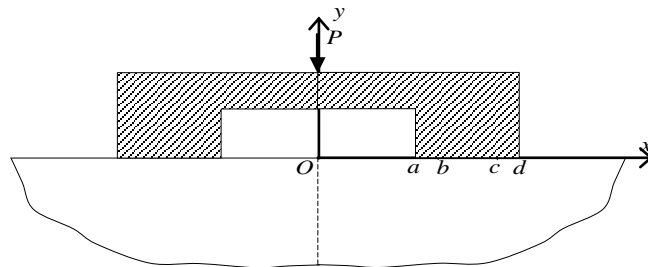
Рассмотрена контактная задача теории упругости о вдавливании П-образного жёсткого штампа в упругую полуплоскость. Основания ножек штампа полагаются плоскими. Предполагается, что в зонах контакта действуют силы трения как скольжения, так и сцепления. Задача решена методом механических квадратур. Найдены зависимости распределения контактных напряжений и длин участков скольжения и сцепления зоны контакта от расстояния между ножками штампа, коэффициента трения между штампом и полуплоскостью и коэффициента Пуассона материала полуплоскости.

Введение. Рассматривается контактная задача для упругой полуплоскости, в границу которой вдавливаются П-образный жёсткий штамп с плоским основанием. Относительно зон контакта принята постановка Л.А.Галина [1], т.е. предполагается, что во внутренней части каждой из зон контакта имеет место сцепление, а по краям действуют тангенциальные напряжения, подчиняющиеся закону Кулона. Задача Галина для штампа с плоским основанием, получившая приближённое решение в замкнутом виде в работе [1], неоднократно рассматривалась и другими авторами, применявшими разные методы для её решения. Среди них отметим работы [2,3,4]. В работе [5] задача Галина решена численным методом прямого интегрирования. Для решения поставленной задачи авторы настоящей работы использовали метод

механических квадратур, который в названии работы [5] упоминается как метод дискретных особенностей.

Постановка задачи. Введём правостороннюю декартовую систему координат, ось ординат которой направим по оси симметрии штампа, а ось абсцисс – по границе полуплоскости. Ввиду симметрии дальнейшие пояснения будут относиться к показанной на фиг.1 зоне контакта. Зона контакта $[a, d]$ разбивается на три отрезка, два крайних из них – (a, b) и (c, d) – являются зонами скольжения, а центральный – (b, c) – зоной сцепления. При этом точки раздела b и c подлежат определению в ходе решения задачи.

Целью задачи является определение функций распределения неизвестных контактных напряжений и длин зон скольжения и выявление их зависимости от расстояния между ножками штампа.



Фиг. 1

Вывод определяющей системы линейных алгебраических уравнений. Заменяя влияние штампа действием неизвестного контактного давления $\sigma(x)$ и положительно ориентированного, также неизвестного, контактного напряжения $\tau(x)$, компоненты $u(x)$ и $v(x)$ перемещения граничных точек полуплоскости в зоне контакта ($a < x < d$) представим формулами:

$$\frac{\pi\mu}{1-\nu} v(x) = \int_a^d \sigma(s) (\ln|s-x| + \ln(s+x)) ds - \pi\kappa \int_x^d \tau(s) ds + C_\nu \quad (1)$$

$$\frac{\pi\mu}{1-\nu} u(x) = -\int_a^d \tau(s) (\ln|s-x| - \ln(s+x)) ds + \pi\kappa \int_a^x \sigma(s) ds ; \quad \kappa = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \quad (2)$$

где μ, ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала полуплоскости, C_ν – неопределённая постоянная плоской задачи теории упругости.

Во всей зоне контакта имеем условие постоянства вертикальной компоненты перемещения, в зоне сцепления – условие постоянства горизонтальной компоненты перемещения, а в зонах скольжения выполняется закон Кулона сухого трения. Эти условия запишутся в виде

$$\begin{aligned}
\tau(x) &= \theta\sigma(x) \quad (x \in (a, b)); \quad \frac{du(x)}{dx} = 0 \quad (x \in (b, c)); \\
\tau(x) &= -\theta\sigma(x) \quad (x \in (c, d)); \quad \frac{dv(x)}{dx} = 0 \quad (x \in (a, d))
\end{aligned} \tag{3}$$

где θ – коэффициент трения.

Удовлетворяя условиям (3), придём к системе из четырёх уравнений, определенных на разных участках зоны контакта

$$\begin{aligned}
&\left[\theta \int_a^b \sigma(s) + \int_b^c \tau(s) - \theta \int_c^d \sigma(s) \right] \left(\frac{1}{s-x} + \frac{1}{x+s} \right) ds + \pi k \sigma(x) = 0 \quad b < x < c \\
&\left[\int_a^b \sigma(s) + \int_b^c \sigma(s) + \int_c^d \sigma(s) \right] \left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{x+s} \right) ds - \pi k \theta \sigma(x) = 0 \quad a < x < b \\
&\left[\int_a^b \sigma(s) + \int_b^c \sigma(s) + \int_c^d \sigma(s) \right] \left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{x+s} \right) ds - \pi k \tau(x) = 0 \quad b < x < c \\
&\left[\int_a^b \sigma(s) + \int_b^c \sigma(s) + \int_c^d \sigma(s) \right] \left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{x+s} \right) ds + \pi k \theta \sigma(x) = 0 \quad c < x < d
\end{aligned} \tag{4}$$

Каждый из отрезков $[a, b]$, $[b, c]$ и $[c, d]$ сведём к отрезку $[-1, 1]$ и используем обозначения:

$$\begin{aligned}
s^{ab} &= \frac{b^* - a^*}{2} \xi + \frac{b^* + a^*}{2}; \quad s^{bc} = \frac{c^* - b^*}{2} \xi + \frac{c^* + b^*}{2}; \quad s^{cd} = \frac{d^* - c^*}{2} \xi + \frac{d^* + c^*}{2}; \\
a^* &= \frac{a}{d-a}, \quad b^* = \frac{b}{d-a}, \quad c^* = \frac{c}{d-a}, \quad d^* = \frac{d}{d-a} = a^* + 1
\end{aligned} \tag{5}$$

Кроме того, рассматривая контактное давление на каждом из указанных отрезков как самостоятельную функцию, перейдём к новым, уже безразмерным, искомым функциям:

$$\begin{aligned}
X(\xi) &= \frac{d-a}{P} \sigma((d-a)s^{ab}(\xi)); \quad Y(\xi) = \frac{d-a}{P} \sigma((d-a)s^{bc}(\xi)); \\
Z(\xi) &= \frac{d-a}{P} \sigma((d-a)s^{cd}(\xi)); \quad T(\xi) = \frac{d-a}{P} \tau((d-a)s^{bc}(\xi)).
\end{aligned} \tag{6}$$

В результате система (4) трансформируется в систему из четырёх уравнений относительно четырёх неизвестных функций, определённых на интервале $(-1, 1)$.

Используя известные результаты Н.И. Мусхелишвили [6] о поведении сингулярного интеграла в окрестности концов отрезка интегрирования, выделим особенности поведения искомым функций. В результате получаем представления:

$$\begin{aligned}
X(\xi) &= A(1+\xi)^{1-\alpha} + X^*(\xi)(1-\xi)^\alpha (1+\xi)^{-\alpha} \\
Y(\xi) &= 2^{1-2\alpha} A(1-\xi)^\alpha + 2^{1-2\alpha} B(1+\xi)^\alpha + Y^*(\xi)(1-\xi^2)^\alpha
\end{aligned} \tag{7}$$

$$Z(\xi) = B(1-\xi)^{1-\alpha} + Z^*(\xi)(1-\xi)^{-\alpha}(1+\xi)^\alpha$$

$$T(\xi) = 2^{1-2\alpha}\theta A(1-\xi)^\alpha - 2^{1-2\alpha}\theta B(1+\xi)^\alpha + T^*(\xi)(1-\xi^2)^\alpha$$

где константы A, B и функции со звездочками, которые являются гладкими и ограниченными на отрезке $[-1, 1]$ функциями, подлежат определению, а показатель особенности определяется формулой

$$\alpha = \frac{1}{\pi} \operatorname{arccot} \kappa\theta. \quad (8)$$

Подставляя представления (7) в уравнения (4) и используя квадратурные формулы для сингулярных интегралов [7]

$$\int_{-1}^1 \frac{\varphi(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}{x-z} dx = \sum_{j=1}^n \frac{w_j^{(\alpha,\beta)} \varphi(\xi_j^{(\alpha,\beta)})}{\xi_j^{(\alpha,\beta)} - z} \left[1 - \frac{R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(z)}{R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(\xi_j^{(\alpha,\beta)})} \right] \quad (z \neq \pm 1), \quad (9)$$

где $\xi_i^{(\alpha,\beta)} (i = \overline{1, n})$ – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$,

$$w_i^{(\alpha,\beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+3}}{1 - (\xi_i^{(\alpha,\beta)})^2} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)} \left[\frac{1}{(\alpha+\beta+n+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\xi_i^{(\alpha,\beta)})} \right]^2,$$

$$R_m^{(\alpha,\beta)}(z) = - \left(\frac{2}{z+1} \right)^m \frac{B(m+\alpha, m+\beta)}{2^{\alpha+\beta}} F \left[m, m+\beta; 2m+\alpha+\beta; \frac{2}{1+z} \right],$$

придём к системе функциональных уравнений.

Учитывая, что в корнях соответствующих функций второго рода указанные квадратурные формулы являются формулами наивысшей алгебраической точности [8], в качестве точек коллокации для полученной системы функциональных уравнений выберем именно эти корни. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left[w_j^{(\alpha,\alpha)} m_{j,k}^{1T} T_j^* + \theta w_j^{(\alpha,-\alpha)} m_{j,k}^{1X} X_j^* + \pi \kappa \omega_k^{(\alpha,\alpha)} q_{j,k}^{(\alpha,\alpha)} Y_j^* - \theta w_j^{(-\alpha,\alpha)} m_{j,k}^{1Z} Z_j^* \right] + \\ & + m_k^{1A} A + m_k^{1B} B = 0 \quad (k = \overline{1, n+1}) \\ & \sum_{j=1}^n \left[\left(w_j^{(\alpha,-\alpha)} m_{j,k}^{2X} - \pi \kappa \theta \omega_k^{(\alpha,-\alpha)} q_{j,k}^{(\alpha,-\alpha)} \right) X_j^* + w_j^{(\alpha,\alpha)} m_{j,k}^{2Y} Y_j^* + w_j^{(-\alpha,\alpha)} m_{j,k}^{2Z} Z_j^* \right] + \\ & + m_k^{2A} A + m_k^{2B} B = 0 \quad (k = \overline{1, n}) \\ & \sum_{j=1}^n \left[-\pi \kappa \omega_k^{(\alpha,\alpha)} q_{j,k}^{(\alpha,\alpha)} T_j^* + w_j^{(\alpha,-\alpha)} m_{j,k}^{3X} X_j^* + w_j^{(\alpha,\alpha)} m_{j,k}^{3Y} Y_j^* + w_j^{(-\alpha,\alpha)} m_{j,k}^{3Z} Z_j^* \right] + \\ & + m_k^{3A} A + m_k^{3B} B = 0 \quad (k = \overline{1, n+1}) \\ & \sum_{j=1}^n \left[w_j^{(\alpha,-\alpha)} m_{j,k}^{4X} X_j^* + w_j^{(\alpha,\alpha)} m_{j,k}^{4Y} Y_j^* + \left(w_j^{(-\alpha,\alpha)} m_{j,k}^{4Z} + \pi \kappa \theta \omega_k^{(-\alpha,\alpha)} q_{j,k}^{(-\alpha,\alpha)} \right) Z_j^* \right] + \end{aligned} \quad (10)$$

$$+m_k^{4A}A+m_k^{4B}B=0 \quad (k=\overline{1,n})$$

где $\zeta_k^{(\alpha,\beta)}$ – корни функции второго рода $R_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x)$,

$$q_{j,k}^{(\alpha,\beta)} = \frac{2P_n^{(\alpha,\beta)}(\zeta_k^{(\alpha,\beta)})}{(\zeta_k^{(\alpha,\beta)} - \zeta_j^{(\alpha,\beta)})(\alpha + \beta + n + 1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(\zeta_j^{(\alpha,\beta)})};$$

$$\omega_k^{(\alpha,\beta)} = (1 - \zeta_k^{(\alpha,\beta)})^\alpha (1 + \zeta_k^{(\alpha,\beta)})^\beta.$$

При этом число корней $\zeta_k^{(-\alpha,\alpha)}$ и $\zeta_k^{(\alpha,-\alpha)}$ равно порядку аппроксимации n , а корней $\zeta_k^{(\alpha,\alpha)}$ – на единицу больше.

Коэффициенты $m_{j,k}$ и m_k имеют простую структуру и, при необходимости, легко могут быть восстановлены, но здесь не приводятся ввиду их объёмности. Следует отметить, что в эти коэффициенты входят две из основных неизвестных задачи: b^* и c^* .

Для определения этих неизвестных используем условие равновесия штампа

$$\int_a^d \sigma(s) ds = \frac{P}{2} \quad (11)$$

и условие цельности П-образного штампа, выражаемого равенством нулю тангенциального перемещения какой-либо точки из зоны сцепления (b, c)

$$u(x_0) = 0 \quad (b < x_0 < c) \quad (12)$$

После перехода к новым переменным (7) и соответствующей дискретизации, условие (11) примет вид

$$(b^* - a^*) \sum_j^n w_j^{(\alpha,-\alpha)} X_j^* + (c^* - b^*) \sum_j^n w_j^{(\alpha,\alpha)} Y_j^* + (d^* - c^*) \sum_j^n w_j^{(-\alpha,\alpha)} Z_j^* + 2^{2-\alpha} \left[\frac{b^* - a^*}{2-\alpha} + \frac{c^* - b^*}{1+\alpha} \right] A + 2^{2-\alpha} \left[\frac{c^* - b^*}{1+\alpha} + \frac{d^* - c^*}{2-\alpha} \right] B = 1 \quad (13)$$

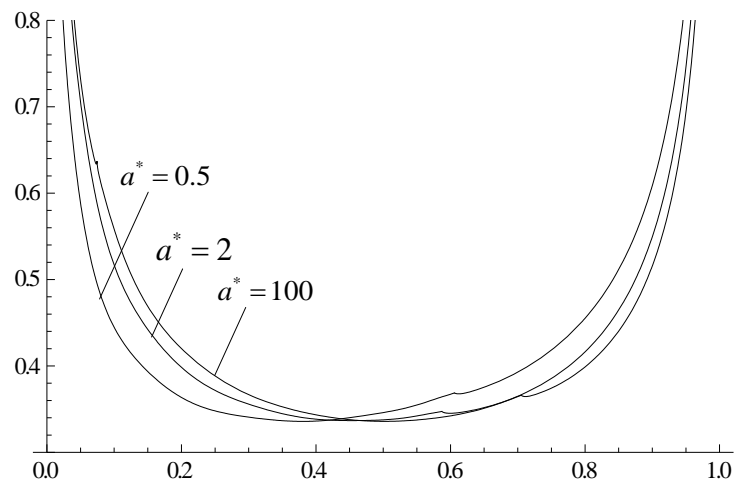
Система (10) состоит из $(4n + 2)$ уравнений относительно $(4n + 2)$ неизвестных, но является однородной системой и не может иметь единственного решения. Добавив в эту систему дополнительную неизвестную γ_0 и присоединив к ней уравнение (13), получим замкнутую неоднородную систему. Обращение нововведённой неизвестной γ_0 в ноль обеспечивает выполнение условия (11).

В итоге неизвестные b^* и c^* определяются из условия равенства нулю неизвестной γ_0 и условия (12), дискретизированный аналог которого не приводится ввиду объёмности.

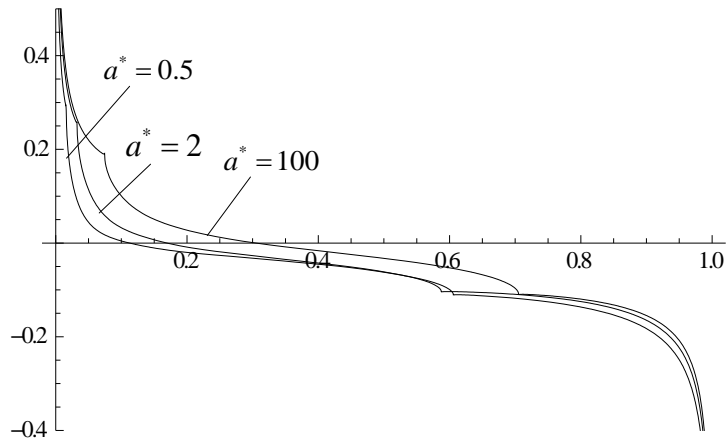
Численный анализ. Ввиду простоты структуры ядер интегралов системы (4) скорость сходимости решения полученной системы линейных алгебраических уравнений к решению системы сингулярных интегральных уравнений (4) достаточно высо-

ка. Действительно, результаты, полученные при $n = 7$, с точностью до 10^{-4} сохраняются и при больших порядках аппроксимации. Отметим, что основные вычисления проводились при $n = 10$.

Численный анализ, в основном, был ориентирован на выяснение влияния расстояния между ножками штампа, определяемого безразмерным параметром a^* , на распределение контактных напряжений, определяемых безразмерными функциями (6), и длины зон скольжения $(b^* - a^*)$ и $(d^* - c^*)$. На фиг.2 и 3 представлены графики распределения контактного давления и тангенциальных контактных напряжений по всей зоне контакта при $\nu = 0.3$, $\theta = 0.3$ и различных значениях параметра a^* . На графиках чётко просматриваются изломы, которые объективно имеют место в точках раздела зон сцепления и скольжения. Подобные графики для разных значений коэффициента трения θ и коэффициента Пуассона ν здесь не приводятся, поскольку качественно они подобны приведённым. С другой стороны, зависимость распределения контактных напряжений от указанных параметров достаточно хорошо представлена в работе [5], где рассмотрена задача о взаимодействии одиночного штампа с плоским основанием с упругой полуплоскостью при наличии трения и сцепления, известной в литературе как задача Л.А.Галина.

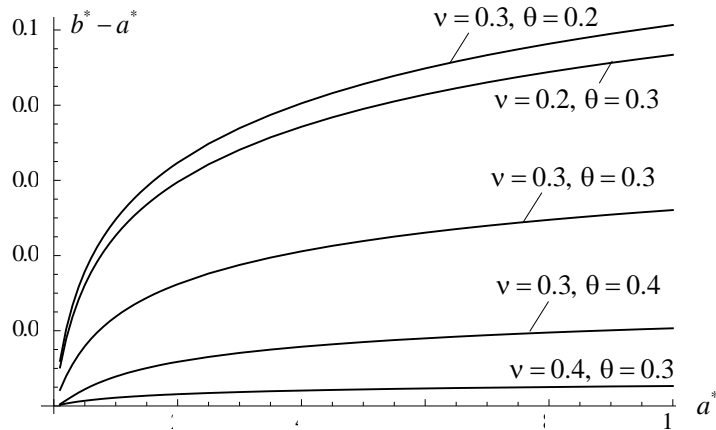


Фиг.2 Распределение контактного давления при $\nu = 0.3$, $\theta = 0.3$

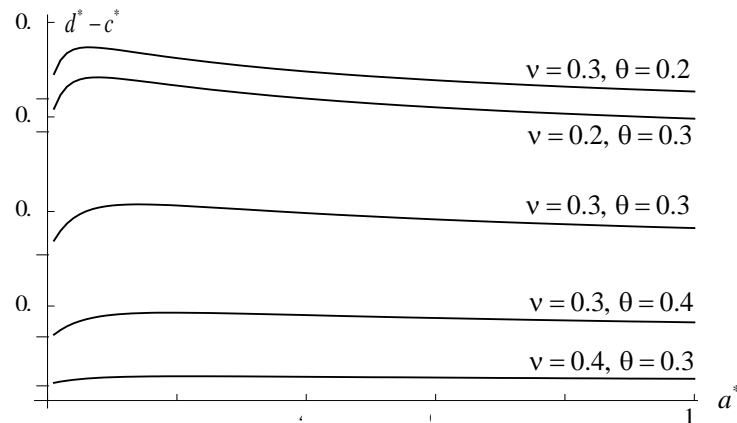


Фиг.3 Распределение тангенциальных контактных напряжений при $\nu = 0.3, \theta = 0.3$

На фиг.4 и 5 показаны графики зависимости длин зон скольжения от расстояния между ножками штампа, определяемого безразмерным параметром a^* , при различных значениях коэффициента трения θ и коэффициента Пуассона ν . Для наглядности здесь представлены графики лишь для относительно небольших значений a^* . Как видно из фиг.4, при $a^* \rightarrow 0$ все кривые стремятся к нулю, т.е. зона скольжения с внутренней стороны ножки штампа исчезает. Это следовало ожидать, поскольку при стремлении $a^* \rightarrow 0$ рассматриваемый П-образный штамп преобразуется в цельный штамп, для которого в центральной части зоны контакта имеет место сцепление.



Фиг.4 Зависимость длины левой (внутренней) зоны скольжения от расстояния между ножками штампа.



Фиг.5 Зависимость длины правой (внешней) зоны скольжения от расстояния между ножками штампа.

Из графиков на фиг.5 видно, что при $a^* \rightarrow 0$ каждая из кривых стремится к определённому пределу, который, очевидно, должен совпадать с длиной зоны скольжения для цельного штампа. Используемый подход к решению задачи не позволяет получить результаты для $a^* = 0$ и подтвердить истинность последнего утверждения. Для наглядности на оси ординат проставлены риски, соответствующие этим значениям, и они, хоть и приблизительно, но дают возможность удостовериться в верности высказанного выше утверждения.

Перейдём к случаю, когда $a^* \rightarrow \infty$. В табл.1 приведены значения длин зон скольжения $(b^* - a^*)$ и $(d^* - c^*)$ для больших значений a^* при $\nu = 0.3, \theta = 0.3$.

Таблица 1

a^*	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	3×10^7	4×10^7	Цельный штамп
$b^* - a^*$	0.0899	0.1006	0.1084	0.1142	0.1188	0.1207	0.1211	0.1554
$d^* - c^*$	0.2550	0.2322	0.2178	0.2079	0.2006	0.1979	0.1972	0.1554

Судя по данным табл. 1, можно сделать вывод, что при $a^* \rightarrow \infty$ длины внешней и внутренней зон скольжения уравниваются, стремясь к значению для цельного штампа. Следует отметить, что в данном случае стремление к указанному пределу не является асимптотическим и нет такого конечного значения a^* , при котором можно пренебречь влиянием второй ножки штампа. Такая ситуация объясняется тем, что в плоской задаче теории упругости о вдавливании штампа в упругую полуплоскость под действием симметричной относительно оси штампа нагрузки тангенциальная компонента перемещения граничных точек полуплоскости на бесконечности имеет поведение сигнум-функции. Вследствие этого, влияние одной ножки на другую всегда сказывается, независимо от их удалённости.

Заключение. Показана возможность решения задачи о вдавливании П-образного жесткого штампа с плоским основанием в упругую полуплоскость, когда зона

контакта разбивается на зоны скольжения и сцепления методом механических квадратур. Выявлено, что при увеличении расстояния между ножками штампа зона скольжения с внутренней стороны монотонно возрастает от нуля до величины зоны скольжения под одним штампом, в то время как зона скольжения с внешней стороны сначала возрастает, начиная с величины зоны скольжения под одним штампом двойной ширины, и далее монотонно убывает до уравнивания с внутренней зоной на бесконечности. Отметим, что в этом случае взаимовлиянием штампов никак нельзя пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 302с.
2. Моссаковский В.И., Бискуп А.Г. Вдавливание штампа при наличии трения и сцепления. //ДАН СССР. 1972. Т.206. №5. С.1068-1070.
3. Антипов Ю.А., Арутюнян Н.Х. Контактные задачи теории упругости при наличии трения и сцепления. //ПММ. 1991. Т.55. Вып.6. С.1005-1017.
4. Острик В.И., Улитко А.Ф. Метод Винера-Хопфа в контактных задачах теории упругости. Киев: Наукова Думка, 2006. 328с.
5. Саакян А.В. Решение контактной задачи с зонами трения и сцепления (задача Галина) методом дискретных особенностей. //Труды межд. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посв. 100-летию академика НАН РА Н.Х.Арутюняна, Ереван, 2012, сс.166-170
6. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 510с.
7. Саакян А.В. Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов. //В сб.: «Проблемы механики тонких деформируемых тел», посв. 80-летию акад. С.А.Амбарцумяна. Ереван, 2002, с.259-265.
8. Саакян А.В. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической точности для интеграла типа Коши, когда показатели весовой функции Якоби комплексные. //Изв.РАН. МТТ. 2012. №6. С.116-121.

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович –

Доктор физ.-мат. наук, зам.директора Института механики НАН Армении,

Тел.: (37410) 568188, (37494)579348

E-mail: avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович –

Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (37410) 27-62-23

E-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 14.03.2013