ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, № 2, 2013 Механика

УДК 539.3

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ФЕРРОМАГНИТНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК*

Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярный, ферромагнитный, упругий, тонкий, оболочка, прикладная общая теория.
Key words: micropolar, ferromagnetic, elastic, thin, shell, applied general theory.

Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգական բարակ թաղանթների ընդհանուր տեսությունը

Աշխատանքում թաղանթի եռաչափ բարակ տիրույթում դիտարկվում են միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգականության տարածական խնդրի հավասարումներն ու եզրային պայմանները: Ընդունվում են ասիմպտոտիկ ճիշտ վարկածներ, որոնց հիման վրա կառուցվում է միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգական բարակ թաղանթի ընդհանուր կիրառական տեսությունը: Միկրոպոլյար ֆերոմագնիսական առաձգական բարակ սալերի ու ձողերի կիրառական տեսությունները ստացվում են որպես թաղանթների համար կառուցված տեսության մասնավոր դեպքեր:

Sargsyan S.H.
General theory of micropolar ferromagnetic elastic thin shells

In the present paper spatial equations and boundary conditions of micropolar ferromagnetic theory of elasticity are considered in three-dimensional thin domain of the shell. Asymptotically correct hypotheses are accepted and general applied theory of ferromagnetic elastic thin shells is constructed. Applied theories of micropolar ferromagnetic elastic thin plates and bars can be obtained as private cases of the theory of shells.

В работе в тонкой трёхмерной области оболочки рассматриваются пространственные уравнения и граничные условия микрополярной ферромагнитной теории упругости. Принимаются асимптотически точные гипотезы и в результате построена общая прикладная теория микрополярных упругих ферромагнитных тонких оболочек. Прикладные теории микрополярных ферромагнитных упругих тонких пластин и балок будут следовать как частные случаи теории оболочек.

Введение. Известно [1,2], что если диэлектрическое ферромагнитное тело находится в магнитном поле, то происходит её намагничивание и в ней возникают массовые распределённые объёмные силы и объёмные моменты. Из-за наличия объёмных распределённых моментов тензор механических напряжений обязательно будет несимметричным. Это означает, что задача об определении напряжённо-деформированного состояния (НДС) в ферромагнитном теле естественно (обоснованно) изучать на основе несимметричной (микрополярной, моментной) теории упругости [3-10].

Так как магнитоупругие эффекты весьма существенны в тонких телах, следовательно, актуально построение математических моделей микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек, пластин и балок.

К обзору по построению математических моделей микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок без учёта магнитоупругого взаимодействия посвящены работы [11-13]. В работах [14-18], на основе метода гипотез, который имеет асимптотическое обоснование, построены общие прикладные модели микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок. Этим же подходом в

* Работа доложена на 23-ем Конгрессе IUTAM , 19-24 Августа, 2012. Пекин, Китай.

работах [19-21] построены общие прикладные модели микрополярной термоупругости и магнитоупругости (для неферромагнитных материалов) тонких оболочек, пластин и балок.

В данной работе развивается этот подход и построена общая прикладная двумерная модель микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений (теории микрополярных ферромагнитных упругих тонких пластин и балок будут следовать как частные случаи теории оболочек).

Отметим, что в рамках классической теории упругости, к изучению задач о прочности, колебаниях и устойчивости ферромагнитных упругих тел, тонких оболочек, пластин и балок посвящены работы [22-28 и др.]. Особо следует отметить монографию [28], в котором изложены основные положения теории ферромагнитных упругих тонких пластин и оболочек на основе классического подхода.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное микрополярное диэлектрическое ферромагнитное (магнитно-мягкое) упругое тело. Пусть оболочка в недеформированном состоянии помещена в начально-заданном стационарном магнитном поле, для которого имеют место уравнения магнитостатики:

во внутренней области тела-оболочки

$$\mathrm{rot}\vec{H}_* = 0, \quad \mathrm{div}\vec{B}_* = 0, \quad \vec{B}_* = \mu_0\left(\vec{H}_* + \vec{M}_*\right), \quad \vec{M}_* = \chi\vec{H}_*; \tag{1.1}$$

во внешней от тела-оболочки области (которое из себя представляет всё трёхмерное пространство с исключением области трёхмерной оболочки; электродинамические свойства этой области отождествляются со свойствами вакуума):

$$\mathrm{rot}\vec{H}_*^{(e)} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{B}_*^{(e)} = 0, \quad \vec{B}_*^{(e)} = \mu_0\vec{H}_*^{(e)}, \quad \vec{M}_*^{(e)} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь, $\vec{H}_*, \vec{H}_*^{(e)};\ \vec{B}_*, \vec{B}_*^{(e)};\ \vec{M}_*, \vec{M}_*^{(e)}$ – соответственно векторы напряжённости, индукции и намагниченности заданного магнитного поля в теле-оболочке и в окружающем её бесконечном пространстве; μ_0 – магнитная постоянная $\left(\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\dfrac{H}{M^2}\right)$; χ – магнитная восприимчивость материала тела-оболочки.

На граничных поверхностях тела-оболочки (на лицевых поверхностях и на поверхности края Σ) должны иметь место условия непрерывности нормальной к поверхности компонента вектора индукции и касательных компонент вектора напряжённости магнитного поля. Следует иметь в виду также соответствующие условия на бесконечности для систем уравнений магнитостатики (1.2) во внешней от тела-оболочки области.

В дальнейшем будем считать, что краевая задача для систем уравнений начального магнитного поля (1.1), (1.2) решена и все отмеченные выше величины магнитного поля как внутри области тела-оболочки, так и в окружающем пространстве наперёд известны (несколько слов об этом будут сказаны также в конце 2-го пункта).

Допустим, что в этом состоянии начинают на тело действовать также внешние поверхностные усилия и оно деформируется. Для изучения НДС трёхмерной оболочки будем исходить из основных уравнений и граничных условий пространственной статической задачи линеаризованной микрополярной теории ферромагнитоупругости (для диэлектрического материала) с независимыми полями перемещений и вращений. Это – уравнения и граничные условия механики деформируемого твёрдого тела и магнитостатики для возмущённого магнитного поля вследствие деформации (последние имеют место как внутри области тела-оболочки, так и во внешней от нее области); условия сопряжения на граничных поверхностях тела-оболочки и условия на бесконечности:

1) Уравнения и граничные условия механики деформируемого микрополярного упругого тела с учётом объёмных сил и объёмных моментов магнитного происхождения [8, 29]:

Уравнения равновесия:

$$\nabla_m \sigma^{mk} + \rho_0 F^k = 0, \qquad \nabla_m \mu^{mk} + \varepsilon^{nmk}\sigma_{nm} + \rho_0 C^k = 0. \tag{1.3}$$

Физические соотношения упругости:

$$\begin{cases} \sigma_{mn} = (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm} \\ \mu_{mn} = (\gamma+\varepsilon)\kappa_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{nm} + \beta\kappa_{kk}\delta_{nm} \end{cases} \tag{1.4}$$

Геометрические соотношения:

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn}\omega^k, \quad \chi_{mn} = \nabla_m \omega_n. \tag{1.5}$$

Здесь индексы m, n, k принимают значения 1,2,3; $\hat{\sigma}, \hat{\mu} -$ тензоры силовых и моментных напряжений; $\hat{\gamma}, \hat{\chi} -$ тензоры деформаций и изгибов-кручений; $\vec{V}, \vec{\omega} -$ векторы перемещения и независимого поворота; $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon -$ упругие постоянные микрополярного материала оболочки; $\rho_0 -$ плотность материала оболочки; $\rho_0 \vec{F}$, $\rho_0 \vec{C}$ – соответственно, интенсивности массовых распределённых сил и моментов магнитного происхождения [23, 27, 28]:

$$\rho_0 F^k = \mu_0 M_*^n \nabla_n H_*^k + \mu_0 M_*^n \nabla_n h^k + \mu_0 m^n \nabla_n H_*^k, \tag{1.6}$$

$$\rho_0 C^k = \varepsilon^{nmk}\mu_0 \left(M_{*n} H_{*m} + M_{*n} h_m + m_n H_{*m}\right). \tag{1.7}$$

Отметим, что $\vec{h}, \vec{b}, \vec{m} -$ соответственно, векторы напряжённости, индукции и намагниченности возбуждённого в трёхмерной оболочке магнитного поля.

В дальнейшем будем использовать криволинейные ортогональные координаты $\alpha_k\ (k = 1,2,3)$, принятые в теории оболочек [30], но для физических компонент вектора перемещения, вектора независимого поворота, компонентов силовых и моментных тензоров напряжений оставим уже принятые выше обозначения.

Механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$ будут выражаться так [23, 28]:

$$\sigma_{3i} = \pm q_i^{\pm} + \left[\sigma_{3i}^M\right], \quad \sigma_{33} = \pm q_3^{\pm} + \left[\sigma_{33}^M\right], \tag{1.8}$$

$$\mu_{3i} = \pm m_i^{\pm}, \quad \mu_{33} = \pm m_3^{\pm}, \quad i = 1,2, \tag{1.9}$$

где символ $[A]$ означает скачок величины A на поверхностях $\alpha_3 = \pm =$ оболочки; $\sigma_{3i}^M, \sigma_{33}^M, \sigma_{3i}^{M,e}, \sigma_{33}^{M,e} -$ компоненты магнитного тензора максвелловских напряжений, соответственно, со стороны тела и со стороны вакуума на указанных поверхностях [1, 23, 28]:

$$\sigma_{mn}^M = \mu_1 H_{*m} H_{*n} - \frac{1}{2}\mu_0 H_{*k}\delta_{mn} + \mu_1\left(H_{*m} h_n + h_m H_{*n}\right) - \mu_0 H_{*n} h_k \delta_{mn}, \tag{1.10}$$

$$\sigma_{mn}^{M,e}=\mu_0 H_{*m}^{(e)}H_{*n}^{(e)}-\frac{1}{2}\mu_0 H_{*k}^{(e)}H_{*k}^{(e)}\delta_{mn}+\mu_0\left(H_{*m}^{(e)}h_n^{(e)}+h_m^{(e)}H_{*n}^{(e)}\right)-\mu_0 H_{*n}^{(e)}h_k^{(e)}\delta_{mn}. \tag{1.11}$$

На поверхности края оболочки Σ, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, механические граничные условия записываются либо в силовых и моментных напряжениях (аналогично (1.8), (1.9)), либо в перемещениях и поворотах, либо в смешанном виде.

2)Уравнения магнитостатики для возмущённого в теле-оболочке магнитного поля [23, 28]:

$$\mathrm{rot}\vec{h}=0,\quad \mathrm{div}\vec{b}=0,\quad \vec{b}=\mu_0\left(\vec{h}+\vec{m}\right),\quad \vec{m}=\chi\vec{h}. \tag{1.12}$$

3) Уравнения магнитостатики для возмущённого магнитного поля во внешней от тела-оболочки области (в вакууме) [23, 28]:

$$\mathrm{rot}\vec{h}^{(e)}=0,\quad \mathrm{div}\vec{b}^{(e)}=0,\quad \vec{b}^{(e)}=\mu_0\vec{h}^{(e)},\quad \vec{m}^{(e)}=0. \tag{1.13}$$

Здесь $\vec{h}^{(e)},\vec{b}^{(e)},\vec{m}^{(e)}$ – соответственно векторы напряжённости, индукции и намагниченности возбуждённого магнитного поля в окружающем оболочку бесконечном пространстве (вакууме).

Граничные условия сопряжения магнитостатической части задачи имеют вид [23, 28]:

$$e_{nmk}\left\{n_m^0\left[h_k\right]-n_p^0 V_{p,m}\left[H_{*k}\right]\right\}=0, \tag{1.14}$$

$$n_m^0\left[b_m\right]-n_p^0 V_{p,m}\left[B_{*m}\right]=0, \tag{1.15}$$

где n_m^0 – компоненты единичного вектора нормали к граничной поверхности ($\alpha_3=\pm h$ или Σ) тела-оболочки до деформации.

Для задачи магнитостатики в области вне тела-оболочки (уравнения (1.13)) необходимо ставить ещё условия затухания на бесконечности:

$$\vec{h}^{(e)}\to 0,\ \text{когда}\ r\to\infty. \tag{1.16}$$

2. Основные гипотезы теории магнитоупругости микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек.

Будем считать, что толщина оболочки мала по сравнению с характерными радиусами кривизны срединной поверхности. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае магнитоупругое явление в тонком трёхмерном теле, образующего оболочку, состоит из внутреннего состояния, охватывающего всю оболочку и окружающего её трёхмерное пространство, и пограничных слоев, локализирующего вблизи поверхности края оболочки Σ (с обеих сторон). Построение общей прикладной двумерной модели магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек тесно связано с построением внутренней задачи (охватывающая и область тела-оболочки, и окружающее её бесконечное трёхмерное пространство).

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить теорию микрополярной ферроупругости тонких оболочек на основе метода гипотез.

Со стороны механической части задачи, эти гипотезы идентичны тем гипотезам, которые были приняты в работах [16-18] для построения теории микрополярных упругих тонких оболочек. К этим гипотезам присоединим ещё некоторые, которые будут относиться к магнитостатической части задачи для возмущённого в теле-оболочке и в окружающем её пространстве магнитного поля.

Таким образом, в основу построения теории микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек будем ставить следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

1) В процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически запишем так:

$$V_{\mathbf{i}} = u_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\psi_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad V_3 = w\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$
$$\omega_i = \Omega_i\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \omega_{\mathbf{3}} = \Omega_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3\iota\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\quad \left(i=1,2\right). \tag{2.1}$$

Таким образом, нормально к срединной поверхности перемещение и тангенциальные независимые повороты являются постоянными функциями по толщине оболочки, а тангенциальные перемещения и нормальный независимый поворот меняются по линейному закону.

Отметим, что с точки зрения перемещений, гипотеза (2.1), по сути дела, представляет собой кинематическую гипотезу Тимошенко в классической теории упругих оболочек. Гипотезу (2.1), в целом, назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек;

2) В формулах для деформаций γ_{ii} обобщённого закона Гука (1.4), силовое напряжение σ_{33} можно пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{ii}; аналогично, в формулах изгибов-кручений χ_{i3} обобщённого закона Гука (1.4) моментное напряжение μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} $\left(i=1,2\right)$.

3) Пользуясь допущением о тонкостенности оболочки, примем

$$1+\frac{\alpha_3}{R_i}\approx 1 \qquad \left(i=1,2\right).$$

4) При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \left(i=\mathbf{1,2}\right)\qquad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right). \tag{2.2}$$

После вычисления указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим прибавлением к соответствующим значениям (2.2) слагаемые, получаемые интегрированием соответствующих уравнений равновесия из (1.3), для которых потребуем условие, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю.

5) Будем считать, что в области тонкой оболочки компоненты вектора возбуждённого магнитного поля $\vec{h}$ по толщине тонкой оболочки меняются линейным законом:

$$h_k = \overset{0}{h}_k\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_k\overset{1}{h}_k\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\qquad \left(k=1,2,3\right). \tag{2.3}$$

6) При определении возбуждённого магнитного поля в бесконечном пространстве, область тонкой оболочки можем заменить её срединной поверхностью [31, 32], по которой в данном случае будет течь поверхностный ток, компоненты

которого имеют выражения $\left(\left[h_1^{(e)}\right],\left[h_2^{(e)}\right],0\right)$ и на которой распределён поверхностный магнитный заряд $\left[h_3^{(e)}\right]$. Для сопряжения внешней и внутренней задач электродинамической части задачи в случае тонкой оболочки эта гипотеза асимптотическим методом обоснована в работе [32].

Отметим, что соответствующим образом сформулированные гипотезы 5) и 6) можно отнести также к граничной задаче (1.1), (1.2) для начального магнитного поля (в случае тонкой оболочки). Это замечание в дальнейшем будем иметь в виду.

3. Определение компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений в области тела-оболочки.

На основании обобщённой кинематической гипотезы Тимошенко (2.1), для компонентов тензоров деформаций, изгибов-кручений, из геометрических соотношений (1.5) получим:

$$\begin{gathered}\gamma_{ii}=\Gamma_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3K_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \gamma_{ij}=\Gamma_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3K_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\\ \gamma_{i3}=\Gamma_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \gamma_{3i}=\Gamma_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \gamma_{33}=0.\end{gathered}\tag{3.1}$$

$$\begin{gathered}\chi_{ii}=\kappa_{ii}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ \chi_{ij}=\kappa_{ij}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\ \chi_{i3}=\kappa_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\alpha_3 l_{i3}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\\ \chi_{33}=\kappa_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),\quad \chi_{3i}=0,\end{gathered}\tag{3.2}$$

где

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\quad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-(-1)^j\,\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\quad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-(-1)^j\,\iota,\tag{3.3}$$

$$\Gamma_{i3}=-\vartheta_i+(-1)^j\,\Omega_j,\quad \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\,\Omega_j,\quad \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},$$

$$\begin{gathered}\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},\qquad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,\\ \kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\qquad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}.\end{gathered}\tag{3.4}$$

Здесь и далее $i,j=1{,}2;\ \ i\neq j$.

Используя выражения (3.1), (3.2) для компонент тензора деформации, статическую гипотезу 2), 4), обобщённый закон Гука (1.4), уравнения равновесия (1.3) и граничные условия (1.8), (1.9) для силовых и моментных напряжений получим следующие определяющие формулы:

$$\begin{aligned}&\sigma_{ii}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right)+\alpha_3\frac{E}{1-\nu^2}\left(K_{ii}+\nu K_{jj}\right),\\ &\sigma_{ij}=\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right]+\alpha_3\left[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}\right],\\ &\sigma_{i3}=(\mu+\alpha)\Gamma_{i3}+(\mu-\alpha)\Gamma_{3i},\end{aligned}$$

$$\sigma_{33} = \overset{0}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) + \alpha_3\,\overset{1}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right),$$

$$\overset{0}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = \frac{q_3^+ - q_3^-}{2} + \frac{1}{2}\left[\left(\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^{M}\right)^+ - \left(\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^{M}\right)^-\right],$$

$$\overset{1}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) = -\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2\sigma_{13}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1\sigma_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right] + \frac{\overset{0}{\sigma}_{11}}{R_1} + \frac{\overset{0}{\sigma}_{22}}{R_2} - f_3^M =$$

$$= \frac{1}{2h}\left\{\left(q_3^+ + q_3^-\right) + \left[\left(\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^{M}\right)^+ + \left(\sigma_{33}^{M,e} - \sigma_{33}^{M}\right)^-\right]\right\},$$

$$\overset{0}{\sigma}_{3i} = \left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i} + \left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3}, \tag{3.5}$$

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) +$$

$$+\alpha_3\left\{-\frac{1}{A_iA_j}\left[\frac{\partial\left(A_j\,\overset{0}{\sigma}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial\left(A_i\,\overset{0}{\sigma}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}\right] + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{0}{\sigma}_{jj} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{0}{\sigma}_{ij} - \frac{\sigma_{i3}}{R_i} - f_i^M\right\} +$$

$$+\left(\frac{\alpha_3^2}{2} - \frac{h^2}{6}\right)\left\{-\frac{1}{A_iA_j}\left[\frac{\partial\left(A_j\,\overset{1}{\sigma}_{ii}\right)}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial\left(A_i\,\overset{1}{\sigma}_{ji}\right)}{\partial\alpha_j}\right] + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\overset{1}{\sigma}_{jj} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\overset{1}{\sigma}_{ij} - c_i^M\right\},$$

$$\mu_{ii} = \left(\beta+2\gamma\right)k_{ii} + \beta\left(k_{jj} + \iota\right), \quad \overset{0}{\mu}_{33} = \left(\beta+2\gamma\right)\iota + \beta\left(k_{11} + k_{22}\right),$$

$$\mu_{ij} = \left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij} + \left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji},$$

$$\mu_{3i} = \overset{0}{\mu}_{3i}\left(\alpha_1+\alpha_2\right) + \alpha_3\,\overset{1}{\mu}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2\right), \quad \overset{0}{\mu}_{3i} = \frac{m_i^+ - m_i^-}{2},$$

$$\overset{1}{\mu}_{3i} = -\left\{\frac{1}{A_i}\frac{\partial\mu_{ii}}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(\mu_{ii} - \mu_{jj}\right) + \frac{1}{A_j}\frac{\partial\mu_{ji}}{\partial\alpha_j} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(\mu_{ji} + \mu_{ij}\right) +\right.$$

$$\left. + \frac{\overset{0}{\mu}_{i3}}{R_i} + \left(\sigma_{j3} - \overset{0}{\sigma}_{3j}\right) + m_i^M\right\} = \frac{m_i^+ + m_i^-}{2h}, \tag{3.6}$$

$$\mu_{i3} = \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3} + \alpha_3\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3},$$

$$\mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right) +$$

$$+\alpha_3\left\{-\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial\left(A_2\,\overset{0}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1\,\overset{0}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right) + \left(\frac{\mu_{11}}{R_1} + \frac{\mu_{22}}{R_2}\right) - \left(\overset{0}{\sigma}_{12} - \overset{0}{\sigma}_{21}\right) - m_3^M\right\} +$$

$$+\left(\frac{\alpha_3^2}{2}-\frac{h^2}{6}\right)\times\left\{-\frac{1}{A_1A_2}\left(\frac{\partial\left(A_2\overset{1}{\mu}_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right)-\left(\overset{1}{\sigma}_{12}-\overset{1}{\sigma}_{21}\right)-\Lambda_3^M\right\}.$$

Здесь $\overset{0}{\sigma}_{ii}, \overset{0}{\sigma}_{ij}, \overset{0}{\mu}_{i3}, \overset{1}{\sigma}_{ii}, \overset{1}{\sigma}_{ij}, \overset{1}{\mu}_{i3}$ представляют собой, соответственно, постоянную и линейную по α_3 части силовых напряжений σ_{ii},σ_{ij} и моментных напряжений μ_{i3}, а f_k^M $(k=1,2,3)$, c_i^M $(i=1,2)$, m_k^M $(k=1,2,3)$, Λ_3^M выражаются
та

$$\begin{aligned}
f_1^M=\mu_0\Bigg\langle\Bigg\{&\overset{0}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*1}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{H}_{*2}\right)+\overset{0}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*1}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{H}_{*2}\right)+\\
&+\frac{\overset{0}{H}_{*1}\overset{0}{M}_{*3}+\overset{0}{H}_{*3}\overset{0}{M}_{*1}}{R_1}+\overset{0}{M}_{*3}\overset{1}{H}_{*1}\Bigg\}+\left\{\overset{0}{m}_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*1}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{H}_{*2}\right)+\right.\\
&+\overset{0}{m}_2\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*1}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{H}_{*2}\right)+\left.\frac{\overset{0}{H}_{*1}\overset{0}{m}_3+\overset{0}{H}_{*3}\overset{0}{m}_1}{R_1}+\overset{0}{m}_3\overset{1}{H}_{*1}\right\}+\left\{\overset{0}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{h}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{h}_2\right)+\right.\\
&+\overset{0}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{h}_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{h}_2\right)+\frac{\overset{0}{h}_1\overset{0}{M}_{*3}+\overset{0}{h}_3\overset{0}{M}_{*1}}{R_1}+\overset{0}{M}_{*3}\overset{1}{h}_1\Bigg\}\Bigg\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2^M=\mu_0\Bigg\langle\Bigg\{&\overset{0}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*2}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{H}_{*1}\right)+\overset{0}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*2}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{H}_{*1}\right)+\\
&+\overset{0}{M}_{*3}\overset{1}{H}_{*2}+\frac{\overset{0}{H}_{*2}\overset{0}{M}_{*3}+\overset{0}{H}_{*3}\overset{0}{M}_{*2}}{R_2}\Bigg\}+\left\{\overset{0}{m}_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*2}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{H}_{*1}\right)+\right.\\
&+\overset{0}{m}_2\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*2}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{H}_{*1}\right)+\left.\overset{0}{m}_3\overset{1}{H}_{*2}+\frac{\overset{0}{H}_{*2}\overset{0}{m}_3+\overset{0}{H}_{*3}\overset{0}{m}_2}{R_2}\right\}+\left\{\overset{0}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{h}_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{h}_1\right)+\right.\\
&+\overset{0}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{h}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{h}_1\right)+\overset{0}{M}_{*3}\overset{1}{h}_2+\frac{\overset{0}{h}_2\overset{0}{M}_{*3}+\overset{0}{h}_3\overset{0}{M}_{*2}}{R_2}\Bigg\}\Bigg\rangle, \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

$$f_3^M=\mu_0\left\{\overset{0}{M}_{*1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*3}}{\partial\alpha_1}+\overset{0}{M}_{*2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*3}}{\partial\alpha_2}+\overset{0}{M}_{*1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{h}_3}{\partial\alpha_1}+\overset{0}{M}_{*2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{h}_3}{\partial\alpha_2}+\overset{0}{m}_1\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*3}}{\partial\alpha_1}+\right.$$

$$+\overset{0}{m}_2\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*3}}{\partial\alpha_2}-\frac{\overset{0}{M}_{*1}\overset{0}{H}_{*1}+\overset{0}{m}_1\overset{0}{H}_{*1}+\overset{0}{M}_{*1}\overset{0}{h}_1}{R_1}-\frac{\overset{0}{M}_{*2}\overset{0}{H}_{*2}+\overset{0}{m}_2\overset{0}{H}_{*2}+\overset{0}{M}_{*2}\overset{0}{h}_2}{R_2}\Bigg\},$$

$$c_1^M=\mu_0\Bigg\langle\Bigg\{\overset{1}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*1}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{H}_{*2}\right)+\overset{1}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*1}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{H}_{*2}\right)+$$

$$+\overset{0}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{1}{H}_{*1}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{H}_{*2}\right)+\overset{0}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{1}{H}_{*1}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{H}_{*2}\right)+$$

$$+\overset{1}{M}_{*3}\overset{1}{H}_{*1}+\frac{\overset{1}{H}_{*1}\overset{0}{M}_{*3}+\overset{0}{H}_{*1}\overset{1}{M}_{*3}+\overset{1}{H}_{*3}\overset{0}{M}_{*1}+\overset{0}{H}_{*3}\overset{1}{M}_{*1}}{R_1}\Bigg\}+\Bigg\{\overset{1}{m}_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*1}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{H}_{*2}\right)+$$

$$+\overset{1}{m}_2\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*1}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{H}_{*2}\right)+\overset{0}{m}_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{1}{H}_{*1}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{H}_{*2}\right)+$$

$$+\overset{0}{m}_2\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{1}{H}_{*1}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{H}_{*2}\right)+\overset{1}{m}_3\overset{1}{H}_{*1}+\frac{\overset{1}{H}_{*1}\overset{0}{m}_3+\overset{0}{H}_{*1}\overset{1}{m}_3+\overset{1}{H}_3\overset{0}{m}_1+\overset{0}{H}_{*3}\overset{1}{m}_1}{R_1}\Bigg\}+$$

$$+\Bigg\{\overset{1}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{h}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{h}_2\right)+\overset{1}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{h}_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{h}_2\right)+$$

$$+\overset{0}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{1}{h}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{h}_2\right)+\overset{0}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{1}{h}_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{h}_2\right)+$$

$$+\overset{1}{M}_{*3}\overset{1}{h}_1+\frac{\overset{1}{h}_1\overset{0}{M}_{*3}+\overset{0}{h}_1\overset{1}{M}_{*3}+\overset{1}{h}_3\overset{0}{M}_{*1}+\overset{0}{h}_3\overset{1}{M}_{*1}}{R_1}\Bigg\}\Bigg\rangle,\qquad(3.8)$$

$$c_2^M=\mu_0\Bigg\langle\Bigg\{\overset{0}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{1}{H}_{*2}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{H}_{*1}\right)+\overset{0}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{1}{H}_{*2}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{H}_{*1}\right)+$$

$$+\overset{1}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*2}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{H}_{*1}\right)+\overset{1}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*2}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{H}_{*1}\right)+$$

$$+\Bigg\{\overset{0}{m}_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{1}{H}_{*2}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{H}_{*1}\right)+\overset{1}{M}_{*3}\overset{1}{H}_{*2}+\frac{\overset{0}{H}_{*2}\overset{1}{M}_{*3}+\overset{1}{H}_{*2}\overset{0}{M}_{*3}+\overset{0}{H}_{*3}\overset{1}{M}_{*2}+\overset{1}{H}_{*3}\overset{0}{M}_{*2}}{R_2}\Bigg\}+$$

$$+\overset{0}{m}_2\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{1}{H}_{*2}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{H}_{*1}\right)+\overset{1}{m}_1\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*2}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{H}_{*1}\right)+$$

$$+\overset{1}{m}_2\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{H}_{*2}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_1}\overset{0}{H}_{*1}\right)+\overset{1}{m}_3\overset{1}{H}_{*2}+\frac{\overset{0}{H}_{*2}\overset{1}{m}_3+\overset{1}{H}_{*2}\overset{0}{m}_3+\overset{0}{H}_{*3}\overset{1}{m}_2+\overset{1}{H}_{*3}\overset{0}{m}_2}{R_2}\Bigg\}+$$

$$+\Bigg\{\overset{0}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{1}{h}_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{h}_1\right)+\overset{0}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{1}{h}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{h}_1\right)+$$

$$+\overset{1}{M}_{*1}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{h}_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{h}_1\right)+\overset{1}{M}_{*2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{h}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{h}_1\right)+$$

$$+\overset{1}{M}_{*3}\overset{1}{h}_2+\frac{\overset{0}{h}_2\overset{1}{M}_{*3}+\overset{1}{h}_2\overset{0}{M}_{*3}+\overset{0}{h}_3\overset{1}{M}_{*2}+\overset{1}{h}_3\overset{0}{M}_{*2}}{R_2}\Bigg\}\Bigg\rangle,$$

$$m_1^M=\mu_0\left(\overset{0}{M}_{*2}\overset{0}{H}_{*3}-\overset{0}{M}_{*3}\overset{0}{H}_{*2}+\overset{0}{m}_2\overset{0}{H}_{*3}-\overset{0}{m}_3\overset{0}{H}_{*2}+\overset{0}{M}_{*2}\overset{0}{h}_3-\overset{0}{M}_{*3}\overset{0}{h}_2\right),$$

$$m_2^M=\mu_0\left(\overset{0}{M}_{*3}\overset{0}{H}_{*1}-\overset{0}{M}_{*1}\overset{0}{H}_{*3}+\overset{0}{m}_3\overset{0}{H}_{*1}-\overset{0}{m}_1\overset{0}{H}_{*3}+\overset{0}{M}_{*3}\overset{0}{h}_1-\overset{0}{M}_{*1}\overset{0}{h}_3\right),\qquad(3.9)$$

$$m_3^M=\mu_0\left(\overset{0}{M}_{*1}\overset{0}{H}_{*2}-\overset{0}{M}_{*2}\overset{0}{H}_{*1}+\overset{0}{m}_1\overset{0}{H}_{*2}-\overset{0}{m}_2\overset{0}{H}_{*1}+\overset{0}{M}_{*1}\overset{0}{h}_2-\overset{0}{M}_{*2}\overset{0}{h}_1\right),$$

$$\Lambda_3^M=\mu_0\left(\overset{1}{M}_{*1}\overset{0}{H}_{*2}-\overset{1}{M}_{*2}\overset{0}{H}_{*1}+\overset{0}{M}_{*1}\overset{1}{H}_{*2}-\overset{0}{M}_{*2}\overset{1}{H}_{*1}+\overset{1}{m}_1\overset{0}{H}_{*2}-\overset{1}{m}_2\overset{0}{H}_{*1}+\overset{0}{M}_{*1}\overset{1}{h}_2-\overset{0}{M}_{*2}\overset{1}{h}_1\right).$$

(3.10)

$$\sigma_{3i}^{M,e}(\alpha_3=\pm h)-\sigma_{3i}^{M}(\alpha_3=\pm h),\quad \sigma_{33}^{M,e}(\alpha_3=\pm h)-\sigma_{33}^{M}(\alpha_3=\pm h)$$

выражаются следующим образом:

$$\sigma_{31}^{M,e}(\alpha_3=\pm h)-\sigma_{31}^{M}(\alpha_3=\pm h)=\frac{\mu_0\chi}{\mu_r}\vartheta_1\left[H_{*3}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\right]^2+\mu_0\chi\vartheta_1\left[H_{*1}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\right]^2+$$

$$+\mu_0\chi\vartheta_2H_{*1}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)=$$

$$=\left\{\frac{\mu_0\chi}{\mu_r}\left[H_{*3}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\right]^2+\mu_0\chi\left[H_{*1}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\right]^2\right\}\vartheta_1+$$

$$+\mu_0\chi H_{*1}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\cdot\vartheta_2,$$

$$\sigma_{32}^{M,e}(\alpha_3=\pm h)-\sigma_{32}^{M}(\alpha_3=\pm h)=\frac{\mu_0\chi}{\mu_r}\vartheta_2\left[H_{*3}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\right]^2+$$

$$+\mu_0\chi\vartheta_2\left[H_{*1}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\right]^2+\mu_0\chi\vartheta_1H_{*1}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)=\qquad(3.11)$$

$$=\mu_0\chi H_{*1}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\cdot H_{*2}^{(e)}(\alpha_3=\pm h)\vartheta_1+$$

$$+\left\{\frac{\mu_0\chi}{\mu_r}\left[H_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)\right]^2+\mu_0\chi\left[H_{*2}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)\right]^2\right\}\vartheta_2,$$

$$\sigma_{33}^{M,e}-\sigma_{33}^{M}=\frac{\mu_0\chi^2}{\mu_r}H_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)\cdot H_{*1}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)\cdot\vartheta_1+$$

$$+\frac{\mu_0\chi^2}{\mu_r}H_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)\cdot H_{*2}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)\cdot\vartheta_2+$$

$$+\frac{\mu_0\chi^2}{2\mu_r^2}\left(H_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)\right)+\frac{\mu_0\chi^2}{\mu_r}H_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)\cdot h_3,$$

$$H_{*k}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)=\frac{1}{\mu_0}B_{*k}^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right),\qquad k=1,2,3.$$

4. Основные уравнения магнитоупругости (механической части задачи) микрополярных ферромагнитных тонких оболочек.

С целью приведения трёхмерной системы уравнений (1.3)-(1.7) микрополярной теории магнитоупругости к двумерной (для механической части в составе общей задачи магнитоупругости), что уже выполнено для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, будем вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводить статически эквивалентные им интегральные характеристики [15-17]: усилия $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{31}$, моменты $M_{ii}, H_{ij}, L_{ii}, L_{ij}, L_{i3}, L_{33}$ и гипермоменты Λ_{i3}, которые с учётом предположения 3) выражаются следующим образом:

$$T_{ii}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ii}d\alpha_3,\quad S_{ij}=\int_{-h}^{h}\sigma_{ij}d\alpha_3,\quad N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}d\alpha_3,\quad N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}d\alpha_3,$$

$$M_{ii}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\sigma_{ii}d\alpha_3,\ H_{ij}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\sigma_{ij}d\alpha_3,\ L_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}d\alpha_3,\ L_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}d\alpha_3,\quad(4.1)$$

$$L_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}d\alpha_3,\quad L_{i3}=\int_{-h}^{h}\mu_{i3}d\alpha_3,\quad \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}\alpha_3\mu_{i3}d\alpha_3.$$

Используя выражения (3.5), (3.6) для силовых и моментных напряжений, на основании формул (4.1) получим:

соотношения упругости:

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-v^2}\left[\Gamma_{ii}+v\Gamma_{jj}\right],\qquad S_{ij}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{ji}\right],$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-v^2\right)}\left[K_{ii}+vK_{jj}\right],\qquad H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right],\quad(4.2)$$

$$N_{i3}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{i3}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{3i}\right],\ N_{3i}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3}\right],$$

$$L_{ii}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)k_{ii}+\beta\left(k_{jj}+\iota\right)\right],\ L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],$$

$$L_{33}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)\iota+\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\right],\ L_{i3}=2h\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3},\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}.\quad(4.3)$$

Теперь, используя формулы из (3.5), (3.6) для $\sigma_{3i}, \sigma_{33}, \mu_{3i}, \mu_{33}$ и удовлетворяя граничным условиям (1.8), (1.9) на лицевых поверхностях оболочки $\alpha_3 = \pm h$, приходим к следующим уравнениям равновесия магнитоупругости для ферромагнитных оболочек:

уравнения равновесия:

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(T_{11} - T_{22}\right) + \frac{1}{A_2}\frac{\partial S_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left(S_{21} + S_{12}\right) +$$

$$+\frac{N_{13}}{R_1} + 2hf_1^M = -\left(q_1^+ + q_1^-\right) - P_1^M;$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial S_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial T_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left(T_{22} - T_{11}\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(S_{12} + S_{21}\right) +$$

$$+\frac{N_{23}}{R_2} + 2hf_2^M = -\left(q_2^+ + q_2^-\right) - P_2^M,$$

$$\frac{T_{11}}{R_1} + \frac{T_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 N_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 N_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] - 2hf_3^M = \left(q_3^+ + q_3^-\right) + P_3^M,$$

$$N_{31} - \left[\frac{1}{A_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(M_{11} - M_{22}\right) + \frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left(H_{21} + H_{12}\right) + \frac{2h^3}{3}c_1^M\right] =$$

$$= h\left(q_1^+ - q_1^-\right) + hq_1^M,$$

(4.4)

$$N_{32} - \left[\frac{1}{A_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left(M_{22} - M_{11}\right) + \frac{1}{A_1}\frac{\partial H_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(H_{12} + H_{21}\right) + \frac{2h^3}{3}c_2^M\right] =$$

$$= h\left(q_2^+ - q_2^-\right) + hq_2^M,$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial L_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(L_{11} - L_{22}\right) + \frac{1}{A_2}\frac{\partial L_{21}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left(L_{21} + L_{12}\right) +$$

$$+\frac{L_{13}}{R_1} + \left(N_{23} - N_{32}\right) + 2hm_1^M = -\left(m_1^+ + m_1^-\right),$$

$$\frac{1}{A_1}\frac{\partial L_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial L_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\left(L_{22} - L_{11}\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\left(L_{12} + L_{21}\right) +$$

(4.5)

$$+\frac{L_{23}}{R_2} + \left(N_{31} - N_{13}\right) + 2hm_2^M = -\left(m_2^+ + m_2^-\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1} + \frac{L_{22}}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 L_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 L_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] - \left(S_{12} - S_{21}\right) - 2hm_3^M = \left(m_3^+ + m_3^-\right),$$

$$L_{33} - \frac{1}{A_1 A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2 \Lambda_{13}\right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial\left(A_1 \Lambda_{23}\right)}{\partial \alpha_2}\right] - \left(H_{12} - H_{21}\right) - \frac{2h^3}{3}\Lambda_3^M = h\left(m_3^+ - m_3^-\right).$$

Здесь P_1^M, P_2^M, P_3^M определяются через разности компонент максвеловского тензора напряжений на граничных поверхностях $\alpha_3 = \pm h$:

$$P_1^M = \left(\sigma_{31}^{M,e} - \sigma_{31}^M\right)^+ + \left(\sigma_{31}^{M,e} - \sigma_{31}^M\right)^-, \; P_2^M = \left(\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M\right)^+ + \left(\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M\right)^-,$$

$$P_3^M = \left(\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M\right)^+ + \left(\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M\right)^-, \; q_1^M = \left(\sigma_{31}^{M,e} - \sigma_{31}^M\right)^+ - \left(\sigma_{31}^{M,e} - \sigma_{31}^M\right)^-, \quad (4.6)$$

$$q_2^M = \left(\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M\right)^+ - \left(\sigma_{32}^{M,e} - \sigma_{32}^M\right)^-.$$

5. Основные интегро-дифференциальные уравнения магнитоупругости (магнитостатическая часть задачи в целом) микрополярных ферромагнитных тонких оболочек.

Обращаемся сначала к магнитостатической части задачи для возмущённого магнитного поля в области тела-оболочки (уравнения (1.12)). Будем придерживаться гипотезы 5). Чтобы определить выражения для $\overset{1}{h}_1(\alpha_1, \alpha_2)$, $\overset{1}{h}_2(\alpha_1, \alpha_2)$, сначала для h_3 примем: $h_3 = \overset{0}{h}_3(\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда, используя первые два компонентных уравнения векторного уравнения $\mathbf{rot}\vec{h} = 0$, из системы (1.12) получим

$$\overset{1}{h}_i(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{A_i} \frac{\partial \overset{0}{h}_3(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_i}. \quad (5.1)$$

Далее, выражения для h_1 и h_2 из (2.3) подставим в скалярное уравнение $\mathbf{div}\vec{b} = 0 \left(\mathbf{div}\vec{h} = 0\right)$ и после интегрирования по α_3, удерживая только линейные члены, для $\overset{1}{h}_3(\alpha_1, \alpha_2)$ получим:

$$\overset{1}{h}_3(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{A_1 A_2} \left[\frac{\partial \left(\overset{0}{h}_1 A_2 \right)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial \left(\overset{0}{h}_2 A_1 \right)}{\partial \alpha_2} \right]. \quad (5.2)$$

Таким образом, в области тела-оболочки для компонент напряжённости возбуждённого магнитного поля имеем формулы (2.3), где необходимо учитывать выражения (5.1) и (5.2).

Рассмотрим теперь магнитостатическую часть задачи для возбуждённого магнитного поля вне тела-оболочки области (уравнения (1.13)).

Принимая гипотезу 6), для внутренней задачи магнитостатики возмущённого магнитного поля (система уравнений (1.13)) во внешней от тела-оболочки области (которая представляет собой всё трёхмерное пространство с исключением области тонкой оболочки) существенно упрощается геометрия области интегрирования. Теперь эту область можем считать полным пространством с разрезом по срединной поверхности оболочки, по которой будет течь поверхностный ток, кроме того, на этой поверхности будет присутствовать магнитный распределённый заряд.

Допущение 6) даёт возможность, зная тензоры Грина для внешней задачи магнитостатики (1.13) всего бесконечного пространства, взаимосвязанную магнитостатическую задачу (1.12), (1.13) привести к интегродифференциальным уравнениям в области срединной поверхности оболочки Ω (первая задача, когда имеются по разрезу только поверхностный ток-вектор с компонентами $\left[h_1^e\right], \left[h_2^e\right], 0$, и вторая задача, когда на разрезе имеется только магнитный распределённый заряд интенсивности $\left[h_3^e\right]$).

Сформулируем задачи о тензоре функций Грина для внешней задачи магнитостатики (система уравнений (1.13)) возмущённого магнитного поля, когда область интегрирования является полным пространством, а в точке $\left(\alpha_1^0,\alpha_2^0\right)\in\Omega$ имеем сосредоточенный фактор (либо ток, либо магнитный заряд):

I) $\mathbf{rot}\vec{h}^{(e)}=\vec{I},\quad \mathbf{div}\vec{h}^{(e)}=0,\quad \vec{I}=\left\{\delta\left(\alpha_1^0,\alpha_2^0\right),\delta\left(\alpha_1^0,\alpha_2^0\right),0\right\}$ (5.3)

II) $\mathbf{rot}\vec{h}^{(e)}=0,\quad \mathbf{div}\vec{h}^{(e)}=\delta\left(\alpha_1^0,\alpha_2^0\right),$ (5.4)

Здесь $\delta\left(\alpha_1^0,\alpha_2^0\right)$ – дельта-функция Дирака; $\left(\alpha_1^0,\alpha_2^0\right)\in\Omega,\quad \left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\in R^3.$

Пусть имеем тензор функций Грина для I) задачи, тогда для нормальной компоненты возбуждённого магнитного поля, когда по срединной поверхности оболочки Ω будет течь поверхностный ток с компонентами $\left(h_1^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-h_1^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right)$, $\left(h_2^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-h_2^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right)$, получим:

$$h_3^{(e)}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)=\iint\limits_{\Omega}K_{13}\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)\left[h_1^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-h_1^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right]d\Omega+$$
$$+\iint\limits_{\Omega}K_{23}\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)\left[h_2^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-h_2^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right]d\Omega,$$
$$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\in R^3,\quad \left(\alpha_1^0,\alpha_2^0\right)\in\Omega. \tag{5.5}$$

Здесь $K_{13}\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)$ и $K_{23}\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)$ – компоненты тензора функций Грина задачи I).

Для определения разности $h_k^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-h_k^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\quad k=1,2,3,$ используем граничные условия сопряжения (1.14), (1.15). Имея в виду выражения для перемещений $V_k\left(k=1,2,3\right)$ из формул (2.1), получим:

$$h_i-h_i^{(e)}=\vartheta_i\left(H_{*3}-H_{*3}^{(e)}\right)\quad \text{при}\quad \alpha_3=\pm h,\quad i=1,2,$$
$$\mu_r h_3-h_3^{(e)}=-\vartheta_1\left(B_{*1}-B_{*1}^{(e)}\right)-\vartheta_2\left(B_{*2}-B_{*2}^{(e)}\right)\quad \text{при}\quad \alpha_3=\pm h, \tag{5.6}$$

где ϑ_i имеет вид по соответствующей формуле из (3.4).

Из формул (5.3) для определения разностей $h_k^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-h_k^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)$ $\left(k=1,2,3\right)$ будем иметь:

$$h_1^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-h_1^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)=$$
$$=2h\frac{1}{A_1}\frac{\partial \overset{0}{h}_3\left(\alpha_1,\alpha_2\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\chi}{\mu_1}\vartheta_1\left[B_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-B_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right],$$

$$h_2^{(e)}(\alpha_3=+h)-h_2^{(e)}(\alpha_3=-h)=$$
$$=2h\frac{1}{A_2}\frac{\partial \overset{0}{h}_3(\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_2}+\frac{\chi}{\mu_1}\vartheta_2\left[B_{*3}^{(e)}(\alpha_3=+h)-B_{*3}^{(e)}(\alpha_3=-h)\right], \tag{5.7}$$
$$h_3^{(e)}(\alpha_3=+h)-h_3^{(e)}(\alpha_3=-h)=-2h\mu_r\left\{\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(\overset{0}{h}_1A_2\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(\overset{0}{h}_2A_1\right)}{\partial\alpha_2}\right\}+$$
$$+\frac{\chi}{\mu_0}\left[B_{*1}^{(e)}(\alpha_3=+h)-B_{*1}^{(e)}(\alpha_3=-h)\right]\vartheta_1+$$
$$+\frac{\chi}{\mu_0}\left[B_{*2}^{(e)}(\alpha_3=+h)-B_{*2}^{(e)}(\alpha_3=-h)\right]\vartheta_2.$$

Теперь, применяя следующую формулу [33]:

$$h_3^{(e)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\Big|_{\alpha_3=0}=\frac{h_3^{(e)}(z=+h)+h_3^{(e)}(z=-h)}{2}, \tag{5.8}$$

с учётом выражений (5.3) для $h_3^{(e)}$ при $z=\pm h,$ где $(\alpha_1,\alpha_2)\in\Omega,$ а также с учётом интегрального выражения (5.7) и формул (5.4) приходим к следующему интегродиференциальному уравнению в области срединной поверхности оболочки $\Omega\big((\alpha_1,\alpha_2)\in\Omega\big)$:

$$\mu_r\overset{0}{h}_3(\alpha_1,\alpha_2)+\frac{\chi}{\mu_0}\vartheta_1\frac{B_{*1}^{(e)}(\alpha_3=+h)+B_{*1}^{(e)}(\alpha_3=-h)}{2}+$$
$$+\frac{\chi}{\mu_0}\vartheta_2\frac{B_{*2}^{(e)}(\alpha_3=+h)+B_{*2}^{(e)}(\alpha_3=-h)}{2}= \tag{5.9}$$
$$=\iint_\Omega K_{13}\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)\left[2h\frac{1}{A_1}\frac{\partial\overset{0}{h}_3(\alpha_1^0,\alpha_2^0)}{\partial\alpha_1}+\frac{\chi}{\mu_1}\vartheta_1\left(B_{*3}^{(e)}(\alpha_3=+h)-B_{*3}^{(e)}(\alpha_3=-h)\right)\right]d\Omega+$$
$$+\iint_\Omega K_{23}\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)\left[2h\frac{1}{A_2}\frac{\partial\overset{0}{h}_3(\alpha_1^0,\alpha_2^0)}{\partial\alpha_2}+\frac{\chi}{\mu_1}\vartheta_2\left(B_{*3}^{(e)}(\alpha_3=+h)-B_{*3}^{(e)}(\alpha_3=-h)\right)\right]d\Omega.$$

Аналогичным образом, если имеем тензор функций Грина для задачи II) (5.4), то для $h_1^{(e)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ и $h_2^{(e)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ будем иметь:

$$h_1^{(e)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\iint_\Omega P_1\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)\left[h_3^{(e)}\right]d\Omega, \tag{5.10}$$
$$h_2^{(e)}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\iint_\Omega P_2\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)\left[h_3^{(e)}\right]d\Omega, \tag{5.11}$$

где $P_1\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right),$ $P_2\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)-$ компоненты тензора Грина для задачи II). Здесь также $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in R^3,$ $\left(\alpha_1^0,\alpha_2^0\right)\in\Omega.$

Применяя следующие выражения [33]:

$$h_1^{(e)}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\Big|_{\alpha_3=0}=\frac{h_1^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)+h_1^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)}{2},$$
$$h_2^{(e)}\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\Big|_{\alpha_3=0}=\frac{h_2^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)+h_2^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)}{2} \qquad (5.12)$$

с учётом формул (5.3) для $h_1^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)$, $h_2^{(e)}\left(\alpha_3=\pm h\right)$, интегральных выражений (5.10), (5.11) и формулы (5.4), приходим к следующей системе интегродифференциальных уравнений в области срединной поверхности оболочки $\Omega\left(\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\in\Omega\right)$:

$$\overset{0}{h}_1\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\frac{\chi}{\mu_1}\vartheta_1\frac{B_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)+B_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)}{2}=\iint\limits_{\Omega}P_1\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)\times$$
$$\times\left\{-2\mu_r h\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(\overset{0}{h}_1A_2\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(\overset{0}{h}_2A_1\right)}{\partial\alpha_2}\right]+\right. \qquad (5.13)$$
$$\left.+\frac{\chi}{\mu_0}\left(B_{*1}^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-B_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right)\vartheta_1+\frac{\chi}{\mu_0}\left(B_{*2}^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-B_{*2}^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right)\vartheta_2\right\}d\Omega,$$

$$\overset{0}{h}_2\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\frac{\chi}{\mu_1}\vartheta_2\frac{B_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)+B_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)}{2}=$$
$$=\iint\limits_{\Omega}P_2\left(\alpha_1-\alpha_1^0,\alpha_2-\alpha_2^0\right)\left\{-2\mu_r h\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(\overset{0}{h}_1A_2\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(\overset{0}{h}_2A_1\right)}{\partial\alpha_2}\right]+\right. \qquad (5.14)$$
$$\left.+\frac{\chi}{\mu_0}\left(B_{*1}^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-B_{*3}^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right)\vartheta_1+\frac{\chi}{\mu_0}\left(B_{*2}^{(e)}\left(\alpha_3=+h\right)-B_{*2}^{(e)}\left(\alpha_3=-h\right)\right)\vartheta_2\right\}d\Omega.$$

6. Математическая модель микрополярных ферромагнитных упругих тонких оболочек.

Таким образом, построены основные уравнения общей теории магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Это – уравнения равновесия (4.4), (4.5), соотношения упругости (4.2), (4.3), геометрические соотношения (3.3), (3.4), интегродифференциальные уравнения (5.9), (5.13), (5.14).

К этим основным уравнениям следует присоединить соответствующие граничные условия на контуре Γ срединной поверхности оболочки Ω.

Принимая гипотезу 6), означает, что для задачи во внешней от тела-оболочки области можно пренебрегать магнитостатическими процессами в узком слое, заключённым между поверхностями $\alpha_3=\pm h$. Это означает, что для внутренней задачи во внешней от тела-оболочки области имеет значение излучение только через лицевые поверхности $\alpha_3=\pm h$ оболочки, а излучением через поверхность края оболочки Σ можно пренебрегать. Это, в свою очередь, означает, что усреднённые по толщине оболочки значения компонент напряжённости возмущённого магнитного поля в точках граничной линии Γ срединной поверхности оболочки Ω должны обращаться в ноль, кроме этого, на том же основании можно пренебрегать усреднённым силовым магнитным взаимодействием (магнитный тензор максвеловских напряжений) на поверхности края оболочки Σ.

На основе вышеизложенного, для компонент возбуждённого в оболочке магнитного поля на контуре Γ срединной поверхности оболочки необходимо ставить следующие нулевые граничные условия:

$$\overset{0}{h}_k\left(\alpha_1,\alpha_2\right)\Big|_{\Gamma}=0, \quad k=1,2,3, \tag{6.1}$$

а для механической части задачи граничные условия на Γ остаются теми же, каковыми они были без магнитомеханических взаимодействий [15-17]. Если контур Γ совпадает с координатной линией $\alpha_1=\mathbf{const}$, то эти граничные условия будут выражаться так:

$$T_{11}=T_{11}^* \text{ или } u_1=u_1^*,\ S_{12}=S_{12}^* \text{ или } u_2=u_2^*,\ N_{13}=N_{13}^* \text{ или } w=w^*, \tag{6.2}$$

$$\begin{gathered}M_{11}=M_{11}^* \text{ или } K_{11}=K_{11}^*,\ H_{12}=H_{12}^* \text{ или } K_{12}=K_{12}^*,\ L_{11}=L_{11}^* \text{ или } \\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^*, \\ L_{12}=L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\ L_{13}=L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13}=\kappa_{13}^*, \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^* \text{ или } \\ l_{13}=l_{13}^*.\end{gathered} \tag{6.3}$$

Отметим, что в построенной математической модели магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Если в уравнениях равновесия на основе принципа Даламбера введём силы, моменты и гипермоменты инерции $2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}, 2Ih\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}$, $2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}, \frac{2h^3}{3}I\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}$, кроме этого, зададим начальные условия для величин: $u_i, w, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \psi_i, \frac{\partial\psi_i}{\partial t}, \Omega_i, \Omega_3, \frac{\partial\Omega_i}{\partial t}, \frac{\partial\Omega_3}{\partial t}, \iota, \frac{\partial\iota}{\partial t}$ при $t=0$, то придём к динамической модели магнитоупругости микрополярных ферромагнитных (диэлектрических) тонких оболочек.

Основные уравнения и граничные условия (начальные условия) общей теории магнитоупругости статической (динамической) деформации микрополярных ферромагнитных упругих тонких пластин и балок можно получить как частные случаи построенной модели оболочек.

Если в модели (4.4), (4.5), (4.2), (4.3), (3.3), (3.4), (5.13), (5.14), (6.1), (6.2), (6.3) магнитоупругости микрополярных ферромагнитных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений формально принять $\alpha=0$, то получим систему основных уравнений и граничных условий магнитоупругости статической (динамической) деформации ферромагнитных тонких оболочек на основе классической теории упругости (в такой модели полностью будут учтены поперечные сдвиговые деформации); а при $\alpha\to\infty$ получим систему основных уравнений и граничные условия магнитоупругости ферромагнитных тонких оболочек со стеснённым вращением. Из указанной общей системы уравнений и граничных условий можно получить и другие частные модели микрополярных ферромагнитных тонких оболочек.

На основе построенной общей теории магнитоупругости ферромагнитных микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок будут решены определённые прикладные задачи об определении напряжённо-деформированного состояния, изучении собственных и вынужденных колебаний, статической и динамической устойчивости в указанных тонких телах.

Важно также отметить, что построение общей теории и изучение конкретных задач магнитоупругости ферромагнитных микрополярных упругих тонких оболочек, пластин и балок открывают возможности разработке экспериментального метода для определения упругих постоянных ферромагнитного микрополярного тела.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армения в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И.Е. Основы теории электричества. М.: Наука, 1976. 616с.
2. Brown W.G. Theory of Magnetoelastic Effect in Ferromagnetism//Journ. of Appl. Phis. 1965. Vol.36.
3. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Изд-во “Мир”, 1965. 480с.
4. Kaliski S., Nowacki W. Wave-type Equations of Thermomagneto-microelasticity//Bull. De L’Academie Polonaise des Sciences. 1970. Vol. XVIII. №4. P.155-159.
5. Желнорович В.А. Модели материальных сплошных сред, обладающих внутренним электромагнитным и механическим моментами. М.: Изд-во Московского университета, 1980. 175с.
6. Tiersten H.F. Coupled Magnetomechanical Equations for Magnetically Saturated Insulators //Jour. of Math. Phys. 1964. Vol.5. №9. P.1298-1318.
7. Maugin G.A. Continuum Mechanics of Electromagnetic solids. North-Holand: ets. 1988.
8. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundations and Solids. Springer. 1998. 325p.
9. Ахиезер А.И., Барьяхтар В.Г., Пелетминский С.В. Спиновые волны. М.: Наука, 1967. 368с.
10. Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела // В сб.: “Проблемы механики тонких деформируемых тел”. Ереван: Изд-во НАН Армении, 2002. С.37-47.
11. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек// Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
12. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-Type Theories of Plates and Shells: a Short Review and Bibliography// Arch. Appl. Mech. Special Issue. - Doi 10. - 1007/s 00419-009-0365-3.
13. Altenbach H., Eremeyev V. A. On the linear theory of micropolar plates //Z Angew. Math. Mech (ZAMM). 2009. V.89. № 4. P.242-256.
14. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
15. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик//Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. №2. С.148-155.
16. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.

17. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011. Vol.15. P. 91-100.
18. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Доклады РАН. 2011. Т.436. №2. С.195-198.
19. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Thermoelasticity of Micropolar Elastic Thin Shells// Proceedings of 9th International Congress on Thermal Stresses 2011. June 5-9, 2011, Budapest. 4 p.
20. Sargsyan S.H., Sargsyan L.S. Magnetoelasticity of Thin Shells and Plates Based on the Asymmetrical Theory of Elasticity // Advances in Mechanics and Mathematics. Mechanics of Generalized Continua. One Hundred Years After the Cosserats. Springer. 2010. Vol. 21. P.325-337.
21. Саркисян Л.С., Саркисян С.О. Математические модели магнитоупругости микрополярных электропроводящих (неферромагнитных) тонких оболочек //Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №2. С.34-45.
22. Бардасарян Г.Е., Белубекян М.В. Устойчивость ферромагнитной пластин-ки в потоке газа при наличии магнитного поля //Изв. АН Арм.ССР. Механика. 1972. Т.25. №3. С.18-28.
23. Панасюк В.В., Андрейкив А.Е., Партон В.З. Основы механики разрушения материалов. Киев: Наукова думка, 1988. 488с.
24. Moon F.C. Magneto-solid Mechanics. New York, ets. Wiley. 1984. 436p.
25. Подильчук Ю.Н., Терещенко Л.Н. Концентрация напряжений в магнито-мягком ферромагнетике с элиптическим включением при действии однородного магнитного поля// Прикладная механика. 2004. Т.40. №1. С.83-93.
26. Shindo Y. The Linear Magnetoelastic problem for a soft Ferromagnetic Elastic Solid with a Finite crack//J. Appl. Mech. (ASME). 1997. Vol. 44. P.47-50.
27. Pao Y.H., Yen C.S. A Linear Theory for Soft Ferromagnetic Elastic Solids //Int. J. Eng. Sci. 1973. Vol.11. №4. P.415-436.
28. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд-во Ереванского ун-та, 1999. 440с.
29. Nowacki W. Theory of Asymmetric Elasticity. Oxford: Pergamon Press. 1986. 383p.
30. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: ГИТТЛ, 1953. 544с.
31. Багдасарян Г.Е. Уравнения магнитоупругих колебаний тонких идеально проводящих пластин //Прикладная механика. 1983. Т. XIX. №12. С.87-91.
32. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд-во АН Армении, 1992. 260с.
33. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972. 736с.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович – Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.
Тел.: (093) 15 16 98; **E-mail:** slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 03.10.2012