

**НЕКОНСЕРВАТИВНАЯ ЗАДАЧА УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ  
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ**

**Պոգոսյան Դ.Մ.**

**Ключевые слова:** неконсервативная нагрузка, упругая прямоугольная пластинка, дивергентная неустойчивость, флаттер.

**Key words:** the non-conservative load, an elastic rectangular plate, the divergence instability, flutter.

**Պոգոսյան Դ.Մ.**

**Սեղմված ուղղանկյուն սալի կայունության ոչ կոնսերվատիվ խնդիրը**

Աշխատանքում դիտարկվում է երկու հանդիպակաց կողմերն հողակապորեն ամրացված, ազատ եզրերում «հետևող»(և «ոչ հետևող») ուժերով բեռնավորված ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը: Գտնված և ուսումնասիրված են սալի անկայունության կրիտիկական ուժերի(դիվերգենցիա և ֆլատեր) արժեքները:

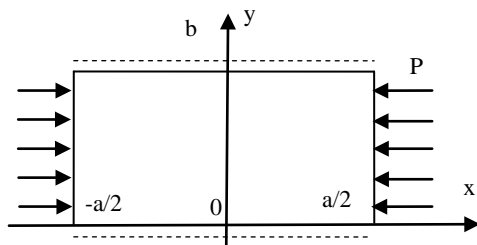
**Poghosyan D.M.**

**The non-conservative problem of stability of compressed rectangular plate**

In this paper the problem of stability of the perturbed motion of a plate is investigated. Two opposite edges of the plate are simply supported and the other two free edges loaded by "follower" and/or "dead" forces. The critical values of the loads in which the plate loses stability were found and analyzed.

В работе рассматриваются задачи устойчивости возмущённого движения пластинки, два противоположных края которой шарнирно опёрты, а два других свободных края нагружены «следающей» и/или «мертвой» силой. Найдены критические значения сил, при которых пластинка теряет устойчивость.

Задачи об устойчивости неконсервативных упругих систем впервые рассмотрел Е.Л. Николаи. Эту область в дальнейшем развивали Г.Ю. Джанелидзе, Циглер, В.И. Реут, А.Пфлюгер, Бек, Данкен, Раушер, В.В. Болотин[1] и другие со своими задачами стержневых систем и пластин. Задачи устойчивости неконсервативных упругих систем важны в связи с тем, что многие практические технические проблемы отнесены к категории: задачи устойчивости упругих тел, находящиеся в потоке газа или изгибные колебания трубы с потоком жидкости, задачи ракет, подвергающихся реактивной тяге. В статье И. Елишакова [2] даётся критический анализ почти всех известных работ в этой области.



**1.** Рассмотрим упругую прямоугольную пластинку (фиг.1), два противоположных края которой шарнирно опёрты, а два других свободны. Пусть к свободным краям действуют равномерно распределённые сжимающие «следающие» нагрузки. Пластинка занимает область

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}, \quad 0 \leq y \leq b, \quad -h \leq z \leq h.$$

Уравнение устойчивости пластинки по теории Кирхгофа имеет вид [3,4]:

$$D\Delta^2 w + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

где  $D$  – изгибная жёсткость пластинки,  $\rho$  – плотность материала,  $E$  – модуль Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $w = w(x, y, t)$  – динамический прогиб в каждой точке пластинки.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид:

$$\begin{aligned} x = \pm \frac{a}{2}: \quad M_1 = 0, \quad \widetilde{N}_1 = 0 \\ \text{или} \\ x = \pm \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad M_2 = 0$$

или

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.3)$$

Аналогичная задача рассмотрена в [5].

Для простоты, поскольку пластинка симметрична, вместо условий (1.2) можно учитывать условия

$$\text{а) } \quad x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{условия симметрии})$$

$$\text{б) } \quad x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{условия антисимметрии})$$

$$x = \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

1.1. Сначала рассмотрим вариант (а).

Граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \\ x = \frac{a}{2}: \quad & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (1.5)$$

Решение уравнения (1.1) представляется в виде

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\xi) \sin(n\pi\eta) * e^{i\Omega t} \quad n = 1, 2, \dots \quad \xi = \frac{x}{a}; \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (1.6)$$

с тем, чтобы удовлетворить граничным условиям (1.5). Подстановка (1.6) в (1.1) приводит к следующей задаче на собственные значения:

$$f_n^{IV} + (P' - 2\lambda_n^2) f_n'' + (\lambda_n^4 - \omega^2) f_n = 0 \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \xi = 0: \quad & f' = 0, \quad f''' = 0 \\ \xi = \frac{1}{2}: \quad & f'' - \nu \lambda_n^2 f = 0, \quad f''' - (2-\nu) \lambda_n^2 f' = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

где

$$\lambda_n = \frac{a}{b} \pi n; \quad P' = a^2 \frac{P}{D}; \quad \omega = \Omega \sqrt{2 \frac{\rho h}{D} a^2}.$$

Общее решение уравнения (1.7) имеет вид

$$f_n(\xi) = C_{1n} \operatorname{sh}(r_1 \xi) + C_{2n} \operatorname{ch}(r_1 \xi) + C_{3n} \operatorname{sh}(r_2 \xi) + C_{4n} \operatorname{ch}(r_2 \xi) \quad (1.9)$$

где

$$r_i = \sqrt{\frac{-(P' - 2\lambda_n^2) \pm \sqrt{(P' - 2\lambda_n^2)^2 - 4(\lambda_n^4 - \omega^2)}}{2}} \quad i = 1, 2 \quad (1.10)$$

Подставляя общее решение (1.9) в граничные условия (1.8), получаем следующую однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $C_{in} \neq 0, i = \overline{1, 4}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 r_1 + c_3 r_2 = 0 \\ c_1 r_1^3 + c_3 r_2^3 = 0 \\ c_1 (r_1^2 - v\lambda_n^2) \operatorname{sh}\left(\frac{r_1}{2}\right) + c_2 (r_1^2 - v\lambda_n^2) \operatorname{ch}\left(\frac{r_1}{2}\right) + c_3 (r_2^2 - v\lambda_n^2) \operatorname{sh}\left(\frac{r_2}{2}\right) + \\ + c_4 (r_2^2 - v\lambda_n^2) \operatorname{ch}\left(\frac{r_2}{2}\right) = 0 \\ c_1 r_1 (r_1^2 - k) \operatorname{ch}\left(\frac{r_1}{2}\right) + c_2 r_1 (r_1^2 - k) \operatorname{sh}\left(\frac{r_1}{2}\right) + c_3 r_2 (r_2^2 - k) \operatorname{ch}\left(\frac{r_2}{2}\right) + \\ + c_4 r_2 (r_2^2 - k) \operatorname{sh}\left(\frac{r_2}{2}\right) = 0 \end{array} \right. \quad (1.11)$$

где  $k = (2 - v)\lambda_n^2$ .

Для получения нетривиального решения приравняем нулю детерминант системы (1.11) и получаем следующее характеристическое уравнение [3]:

$$\begin{aligned} \Delta(\omega, P') &= r_1 (r_1^2 - k) (r_2^2 - v\lambda_n^2) \operatorname{sh}\left(\frac{r_1}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{r_2}{2}\right) - \\ &- r_2 (r_2^2 - k) (r_1^2 - v\lambda_n^2) \operatorname{ch}\left(\frac{r_1}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{r_2}{2}\right) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

В таблицах 1а и 1б представлены критические значения следящих сил, приводящие к дивергентной неустойчивости, которые были получены из решения трансцендентного уравнения (1.12) с помощью программы «Математика»

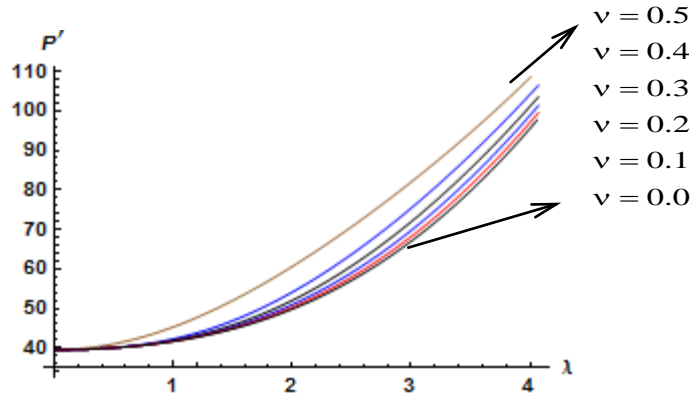
Таблица 1а

$\lambda_n _{v=0.3}$	0.01	0.1	0.2	0.5	1.0	1.5	2.0	4.0
$P'$	39.4786	39.49845	39.55892	39.99748	41.7617	45.2499	50.9174	98.868

Таблица 1б

$v$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$\lambda_n$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
$P'$	45.2631	42.23519	41.8945	41.76171	41.6909	41.6468

На фиг.2 представлены графики зависимости величины силы  $P'$  от параметра  $\lambda_n$  при различных значениях  $\nu$ . Судя по этим графикам, можно сказать, что при увеличении значения параметра  $\lambda_n$  в интервале  $\lambda_n \in (0,1)$  критическая сила  $P'$  возрастает медленно в сравнении с  $\lambda_n > 1.0$ .



Фиг. 2.

1.2. Рассмотрим вариант (б).

Граничные условия записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \\
 x = \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

$$y = 0, b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0
 \tag{1.14}$$

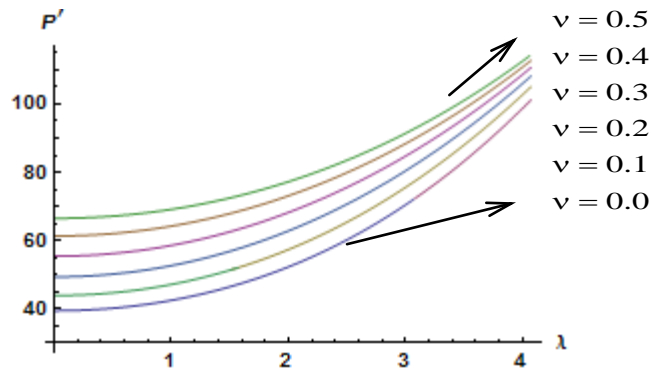
Рассуждая как в первой задаче, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\omega, P') = r_1 (r_1^2 - k) (r_2^2 - \nu \lambda_n^2) \operatorname{ch} \left( \frac{r_1}{2} \right) \operatorname{sh} \left( \frac{r_2}{2} \right) - \\
 - r_2 (r_2^2 - k) (r_1^2 - \nu \lambda_n^2) \operatorname{sh} \left( \frac{r_1}{2} \right) \operatorname{ch} \left( \frac{r_2}{2} \right) = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.15}$$

В табл. 2 представлены критические значения следящих сил, приводящие к дивергентной неустойчивости согласно (1.15).

Таблица 2

$\lambda_n _{\nu=0.3}$	0.0001	0.01	0.1	1.0	1.5	2.0	3.0	4.0
$P'$	55.4386	55.4389	55.4703	58.6145	62.6135	68.2664	84.7647	108.7097



Фиг. 3.

На фиг.3 представлены графики зависимости величины силы  $P'$  от параметра  $\lambda_n$  при различных значениях  $\nu$ .

2. Рассмотрим прямоугольную пластинку, два противоположных края которой шарнирно опёрты, а два других свободны. Пусть на свободных краях действуют равномерно распределённые сжимающие нагрузки, на кромке  $x = \frac{a}{2}$  нагрузка

«следящая» (неконсервативная), а на  $x = -\frac{a}{2}$  – «мертвая» (консервативная).

Граничные условия записываются следующим образом:

$$x = -\frac{a}{2}: \quad M_1 = 0, \quad \tilde{N}_1 = P \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$x = \frac{a}{2}: \quad M_1 = 0, \quad \tilde{N}_1 = 0$$

или

$$x = -\frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + P \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$x = \frac{a}{2}: \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

Рассуждая как в первой задаче, получаем следующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\omega, P') = & q_1 q_2 \left( 2k^2 + P' q_1^2 + (P' + 2q_1^2) q_2^2 - 2k(P' + q_1^2 + q_2^2) \right) * \\
 & * (q_2^2 - \nu \lambda^2) (1 - \operatorname{ch}(q_1) \operatorname{ch}(q_2)) + \\
 & + \left( k(k - P') q_1^4 q_2^2 + q_1^2 (k^2 + 2P' q_1^2 + q_1^4 - k(P' + 4q_1^2)) q_2^4 + q_1^4 q_2^6 - \right. \\
 & - 2q_1^2 q_2^2 (2k^2 + q_1^4 + q_2^4 + P'(q_1^2 + q_2^2) - 2k(P' + q_1^2 + q_2^2)) \nu \lambda^2 + \quad (2.2) \\
 & + (q_1^6 + q_2^6 + k^2 (q_1^2 + q_2^2) + P'(q_1^4 + q_2^4)) - \\
 & \left. - k(P'(q_1^2 + q_2^2) + 2(q_1^4 + q_2^4)) \nu^2 \lambda^4 \right) \operatorname{sh}(q_1) \operatorname{sh}(q_2)
 \end{aligned}$$

В табл. 3 представлены критические значения силы  $P'$ , приводящие к флаттерной неустойчивости, которые были получены из решения трансцендентного уравнения (2.2) с помощью программы «Математика».

Таблица 3

$\lambda_n _{\nu=0.3}$	0.001	0.01	0.05	0.1	1.0	2.0	4.0
$P'$	39.4852	39.5415	39.7637	40.012	44.177	51.304	77.113

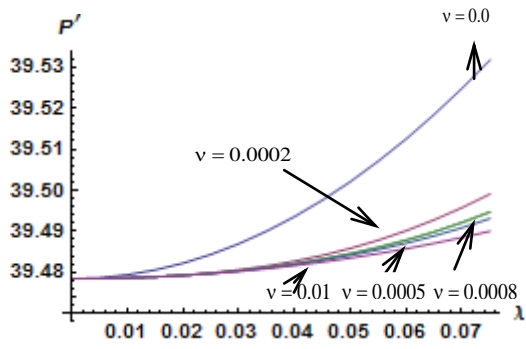
В табл. 4 представлены критические значения силы  $P'$ , приводящие к дивергентной неустойчивости

Таблица 4

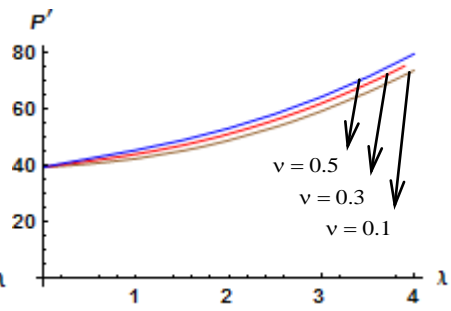
$\lambda_n _{\nu=0.3}$	0.0001	0.001	0.01	0.05	0.06	1.0	2.0	4.0
$P'$	39.4784175	39.4784195	39.4786	39.48342	39.4856	-	-	-

Судя по этим таблицам, можно сказать, что при  $\lambda_n \in (0, 0.067431)$  дивергентная неустойчивость возникает раньше, а при  $\lambda_n > 0.067431$  имеем только флаттер.

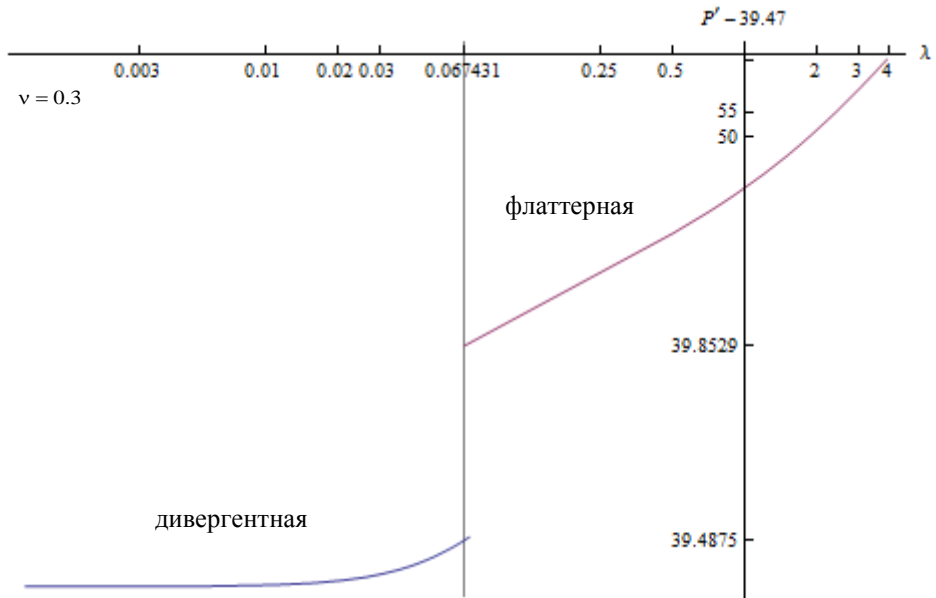
На фиг. 4 и 5 представлены графики зависимости величины соответственно дивергентной и флаттерной критической силе  $P'$  от параметра  $\lambda_n$  при различных значениях  $\nu$ . Судя по этим графикам, можно сказать, что при увеличении значения  $\nu$  дивергентная критическая сила  $P'$  уменьшается, а флаттерная возрастает.



Фиг.4.



Фиг.5.



Фиг.6.



## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Госиздат.физматлит., 1961.
2. Elishakoff, I. «Controversy associated with the so-called «follower forces»: critical overview” // Applied Mechanics Reviews. Vol.58. P.117-14. 2005.
3. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 384с.
4. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Госизд.физматлит., 1963.
5. Белубекян М.В., Белубекян В.М. Устойчивость прямоугольной пластинки при действии «следающей» нагрузки, приложенной на свободной кромке //Изв. НАН Армении. Механика. 2008. Т.61. №2. С.23-32.

### **Сведения об авторе:**

**Погосян Диана Мнацакановна** – Аспирант Института механики НАН Армении

Тел.: (37410) 64-98-31

Е-mail: [dianpoghosyan@yahoo.com](mailto:dianpoghosyan@yahoo.com)

Поступила в редакцию 01.03.2013