ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, № 2, 2013 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ВЯЗКОУПРУГИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ

Мовсисян Л.А.

Keywords: Cylindrical shell, viscoelastic core, external pressure. temperature fied, critical parameters.
Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, вязкоупругий наполнитель, нормальное давление, температурное поле, критические параметры.

Մովսիսյան Լ.Ա.
Առաձգամածուցիկ լցոնով գլանային թաղանթի կայունության մասին

Դիտարկվում է առաձգամածուցիկ լցոնով գլանային թաղանթի կայունությանը հավասարաչափ ճնշման և ջերմության ազդեցության տակ: Լցոնի ազդեցությունը հաշվի է առնվում Վինկլերի վարկածի ճշտությամբ: Ակնթարթային և երկարատև պարամետրերից բացի որոշվում է նույնպես կայունությունը կորցնելու կրիտիկական ժամանակը:

Movsisyan L.A.
On stability cylindrical shell with a viscoelastic core

Stability of cylindrical shell with a viscoelastic core is investigated under action both of external uniform pressure and constant temperature field. Core effect is modeled by means of Winkler formula. Besides of instant and prolonged critical parameters, the instability critical time are defined.

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки с вязкоупругим наполнителем, находящейся в постоянном температурном поле и подвергающейся внешнему равномерному давлению. Влияние наполнителя учитывается на основании формулы Винклера. Помимо мгновенного и длительного критических параметров определяется также критическое время потери устойчивости.

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки, находящейся в постоянном температурном поле и подвергающейся внешнему равномерному давлению. Влияние наполнителя из вязкоупругого материала стандартного типа моделируется на основании модели Винклера. Определяются мгновенные и длительные критические параметры.

В [1] изучается устойчивость кольца с упругим наполнителем при совместном воздействии внешнего давления и температуры. Работа [2] – одна из первых, посвящённая устойчивости цилиндрических оболочек с упругим наполнителем. В дальнейшем было выполнено большое количество работ и обзор их можно найти в [3].

1. Имеется цилиндрическая оболочка с параметрами h, R, l. Оболочка находится в постоянном температурном поле θ и подвергается внешнему равномерному давлению интенсивности q. Как отмечалось выше, влияние наполнителя на оболочку моделируется приближённо на основании формулы Винклера:

$$Z = \tilde{k}w - k_1\alpha_1\theta = k\left(w - \Gamma\int_0^t e^{-\gamma(t-i)}wd\tau\right) - k_1\alpha_1\theta\,. \qquad (1.1)$$

Если предположить, что в невозмущённом состоянии края оболочки закреплены, то помимо кольцевого усилия T_2^0 появится также продольное $-T_1^0$. Выражения для них будут:

$$T_2^0 = T - \frac{Eh\alpha\theta}{1-v},\ T_1^0 = vT - \frac{Eh\alpha\theta}{1-v}, \qquad (1.2)$$

где приняты следующие обозначения:

$$T = \frac{Q}{1+K}\left[1 + \frac{\Gamma_1}{\gamma - \Gamma_1}\left(1 - e^{-(\gamma-\Gamma_1)t}\right)\right],\quad K = \frac{kR^2}{Eh},$$

$$Q = -Rq + \left(Rk_1\alpha_1 - \frac{Eh}{1-v}\alpha\right)\theta,\ \Gamma_1 = \frac{\Gamma}{1+K^{-1}}.$$

Уравнение устойчивости при вышеприведённых факторах будет:

$$D\Delta^4 w + \frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \tilde{k}\Delta^2 w + \Delta^2\left(T_1^0\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0\,. \qquad (1.3)$$

Для оболочки со свободными опёртыми краями решение (1.3) ищется в виде

$$w = f\sin\lambda_m x\cdot\cos\mu_n y,\ \ \lambda_m = \frac{m\pi}{l},\ \mu_n = \frac{n}{R} \qquad (1.4)$$

и критические параметры определятся из

$$\left[D\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2 + \frac{Eh}{R^2}\frac{\lambda n^4}{\left(\lambda_m^2 + \mu_n^2\right)^2}\right]f + \tilde{k}f + \left(T_1^0\lambda_m^2 + T_2^0\mu_n^2\right) = 0\,. \qquad (1.5)$$

Отсюда при (1.2) можно рассмотреть ряд частных случаев. В общем случае, при воздействии обоих факторов (q и θ) нужно, задаваясь значением одного, определить минимальное значение другого, обеспечивающего потерю устойчивости. Отметим ещё, что из (1.5) следует, что помимо мгновенного и длительного критических параметров, возможно ещё промежуточное критическое время. Для него получим выражение для частного случая. Для определения мгновенных критических параметров ($t = 0$) в (1.5) $\tilde{k} = k$, $t = 0$, а для длительного ($t \to \infty$), соответственно $\tilde{k} = k_\infty = k\left(1 - \frac{\gamma}{\Gamma}\right)$, $t \to \infty$.

Как видно из приведённых формул, вследствие нормального давления преобладающим является кольцевое усилие T_2^0, а от температуры $-T_1^0$. В табл. 1 приведены критические значения $\frac{10^5 T_2^0}{Eh}$ для различных соотношений

$T_1^0 = \beta T_2^0$, $\beta = \frac{1}{3}, 1, 3$ и 10^{-5}, $\frac{kR}{E} = 0.5$, $\frac{\pi R}{l} = 0.3$ $\nu =$

Параметр χ характеризует наличие наполнителя: при $\chi = 1$ получается мгновенное значение критического усилия, $\chi = 0,5$ –длительное, когда длительный модуль равен половине мгновенного и, наконец, $\chi = 0$ – отсутствие наполнителя. Следует отметить, что для каждого h/R критические значения – мгновенные и длительные – мало отличаются, как для различных β, так и χ. Причём минимумы получаются при $m = 1$, а количество поперечных волн также одинаково. В случае, когда хоть один из краёв оболочки свободен (невозмущённое состояние), то $T_1^0 = 0$ и минимальная комбинация q и θ, при которой произойдёт мгновенная потеря устойчивости, будет

Таблица 1

h/R	β \ χ	1	0,5	0
$1/200$	$1/3$	6.474	5,852	5.230
	1	6.407	5.792	5.176
	3	6.216	5.619	5.022
$1/300$	$1/3$	4.173	3.574	2.976
	1	4.145	3.551	2.957
	3	4.065	3.482	2.899

$$\frac{R}{Eh}\left[q + \left(Rk\alpha - k_1\alpha_1\right)\theta\right] = \left(1+K\right)\left[\frac{n^2}{1-\nu^2}\left(\frac{h}{R}\right)^2 + \frac{\pi^4}{n^6}\left(\frac{R}{l}\right)^4 + K\frac{1}{n^2}\right]. \qquad (1.7)$$

При этом, минимум достигается при

$$\frac{n}{R} = \left[x_1\left(1+\sqrt{1+x_2}\right)\right]^{1/4},$$

$$X_1 = \frac{6k\left(1-\nu^2\right)}{Eh^3}, \quad X_2 = \frac{\pi^4}{1-\nu^2}\left(\frac{E}{kR}\right)^2\left(\frac{h}{l}\right)^4. \qquad (1.8)$$

Для длительной неустойчивости во всех формулах (1.7) и (1.8) k должен быть заменён k_∞.

Как видно из (1.7), в зависимости от геометрических размеров и физических свойств материалов, в одном случае, если наличие температуры увеличивает значение критического давления, то в других случаях наоборот, в частности, может быть и без последствий.

2. В задаче для кольца для усилия T_2^0 имеем:

$$T_2^0 = Eh\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{w}{R} + \alpha\theta\right), \tag{2.1}$$

которое определится из следующей системы:

$$\frac{\partial T_2^0}{\partial y} + \frac{1}{R}\frac{\partial M_2^0}{\partial y} = 0\ ,\quad \frac{\partial^2 M_2^o}{\partial y^2} - RT_2^0 = R^2\left(-Z + \tilde{k}_0 w_0 - \alpha_1 k_1 \theta\right). \tag{2.2}$$

В предположении, что внешнее давление симметрично расположено относительно линии $\varphi = 0$, перемещения можно представить в виде

$$w_0 = \sum_{m=0}^{\infty} w_m \cos m\varphi\ ,\ v_0 = \sum_{m=1}^{\infty} v_n \sin m\varphi. \tag{2.3}$$

Тогда усилие T_2^0 имеет вид

$$T_2^0 = Eh\sum_{m-0}^{\infty} T_m \cos m\varphi\,. \tag{2.4}$$

Здесь

$$T_0 = -\alpha\theta + \frac{1}{1 + \dfrac{R^2\tilde{k}}{Eh}}\left[\left(\alpha + \frac{Rk_1}{Eh}\right)\theta - \frac{Ra_0}{Eh}\right]$$

$$T_m = \frac{h^2}{12R^2}\sum_{m=1}^{\infty} m^2 w_m\ ,\quad w_m = \frac{R^3 a_m}{Dm^2\left(m^2 - 1\right) + R^4\tilde{k}}$$

где постоянные a_m есть коэффициенты Фурье от внешнего воздействия. В частности, (такой случай и будем рассматривать), если равномерное давление действует на противоположных участках в интервале $-\varphi_0 \le \varphi \le \varphi_0$ (при $\varphi_0 = \dfrac{\pi}{2}$ имеем равномерное давление по всему кругу), то этими коэффициентами будут:

$$a_0 = -q\frac{2\varphi_0}{\pi},\ a_m = -\frac{2q}{m\pi}\left[1 + (-1)^m\right]\sin m\varphi_0\,. \tag{2.5}$$

Решение уравнения устойчивости

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}\right) - R^2\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(T_2^0\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right) + R^4\tilde{k}w = 0 \tag{2.6}$$

представим в виде

$$w = \sum_{n=0}^{\infty}\left(w_n^{(1)}\cos n\varphi + w_n^{(2)}\sin n\varphi\right) \tag{2.7}$$

Тогда для определения критических параметров получим систему:

$$\left[Dn^2\left(n^2-1\right)+R^4\tilde{k}\right]w_n^{(i)}+\frac{R^2n}{2}\left[\sum_{m=1}^{n}mT_{n-m}\,w_m^{(i)}\mp\right.$$
$$\left.\mp\sum_{m=1}^{\infty}mT_{m+n}w_m^{(i)}+\sum_{m=n}^{\infty}mT_{m-n}w_m^{(i)}\right]=0 \qquad (2.8)$$

В табл.2 приведены мгновенные критические значения безразмерной величины $\bar{q}=\frac{2\cdot10^5R}{Eh\pi}q$ для некоторых h/R, φ_0 и k (при отсутствии температуры).

В случае равномерного давления по всему кругу $\left(\varphi_0=\frac{\pi}{2}\right)$ мгновенное критическое воздействие определится формулой

$$q+\left(Rk\alpha-k_1\alpha_1\right)\theta=\frac{Eh}{R}\left(1+K\right)\left(2\sqrt{KH}-H\right) \qquad (2.9)$$

при этом, минимизирующий n есть

$$n=\sqrt[4]{\frac{K}{H}}\ ,\ H=\frac{h^2}{12R^2}\,. \qquad (2.10)$$

Для длительного воздействия надо поменять соответствующие коэффициенты.

Как видно из приведённых таблиц и чего можно было ожидать, влияние наполнителя на критические параметры для кольца более существенно, чем для оболочки.

Таблица 2

h/R	k / φ_0	0	$0.5\cdot10^{-6}$	10^{-6}
$1/200$	$\pi/6$	1.142	4,860	6.517
	$\pi/4$	0.787	3.354	4.581
	$\pi/3$	0.603	2.580	3.569
$1/300$	$\pi/6$	0.508	3.794	5.193
	$\pi/4$	0.350	2.663	3.639
	$\pi/3$	0.268	2.105	2.898

Теперь вернёмся к вопросу критического времени. В составных системах с различными вязкоупругими свойствами помимо мгновенного и длительного критических параметров $\left(t=0,t\to\infty\right)$, наверное, можно говорить и о некоторых промежуточных критических временах. Это покажем на простом примере. В рассмотренном выше случае $\left(\varphi_0=\frac{\pi}{2}\right)$ интегральное уравнение можно привести к дифференциальному первого порядка относительно $\frac{dw_n}{dt}$ с переменными коэффициентами. Как известно, для вязкоупругих тел имеется критерий потери устойчивости

$$\frac{dw_n}{dt} = 0\,. \tag{2.11}$$

Так вот, если воспользоваться этим критерием, критический момент времени определится из

$$T(t)\cdot\left[q+\left(R\alpha k_\infty - k_1\alpha_1\right)\theta\right] = \frac{Eh}{R}\left(1+K_\infty\right)\left(2\sqrt{HK_\infty} - H\right)$$

$$T(t) = \frac{\gamma}{\gamma-\Gamma_1}\left[1-\frac{\Gamma_1^2}{\gamma^2}\overline{e}^{(\gamma-\Gamma_1)t}\right],\quad n=\sqrt[4]{\frac{K_m}{H}},\ K_\infty = \sqrt{\frac{k_\infty R^2}{Eh}},\ k_\infty = k\left(1-\frac{\Gamma}{\gamma}\right) \tag{2.12}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Мовсисян Л.А. Устойчивость кольца с заполнителем при силовых и температурных воздействиях. // Докл.АН АрмССР. 1976. Т.53. №2. С.77–84.
2. Seide P. The stability undewr axial comppression and lateral pressure of circular-cylindrical shells with a soft elastic core// ARS.J. Vol.29. №7. 1962. P.851–862.
3. Ильгамов М.А., Иванов В.А., Гулин Б.В. Расчёт оболочек с упругим заполнителем. М.: Наука, 1987. 260с.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович – доктор техн.наук, профессор, главный научн. сотрудник Института механики НАН Армении.
Ереван, Армения, пр.Маршала Баграмяна 24[б].

Поступила в редакцию 26.12.2012