

УДК 539.3

**ЭЛЕКТРОУПРУГИЕ ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ ЛЯВА В
СЛОИСТОЙ СТРУКТУРЕ ИЗ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО
ПОЛУПРОСТРАНСТВА И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЛОЯ ПРИ
НАЛИЧИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭКРАНА**

Даноян З.Н., Атоян Л.А., Саакян С.Л., Даноян Н.З.

Ключевые слова: электроупругие поверхностные волны Лява, пьезоэлектрическая слоистая структура, электрический экран.

Key words: electro-elastic surface Love waves, piezoelectric layered structure, electrical screen.

Դանոյան Զ.Ն., Աթոյան Լ.Ա., Սահակյան Ս.Լ., Դանոյան Ն.Զ

Լյավի էլեկտրաառաձգական մակերևութային ալիքները պլեզոէլեկտրիկ կիսաանվերջ հիմքից և դիէլեկտրիկ շերտից բաղկացած շերտավոր համակարգում, էլեկտրական էկրանի առկայությամբ

Քվազիստատիկ մոտավորությամբ դիտարկվում են էլեկտրաառաձգական Լյավի մակերևութային ալիքները շերտավոր պլեզոէլեկտրիկ միջավայրում էլեկտրական էկրանի առկայությամբ:

Danoyan Z.N., Atoyan L.H., Sahakyan S.L., Danoyan N.Z.

Electro-elastic surface Love waves in a layered structure: piezoelectric half space and dielectrical layer, in presence of an electrical screen

The electro-elastic surface Love waves in a layered piezoelectric structure in quasi-static approximation is investigated.

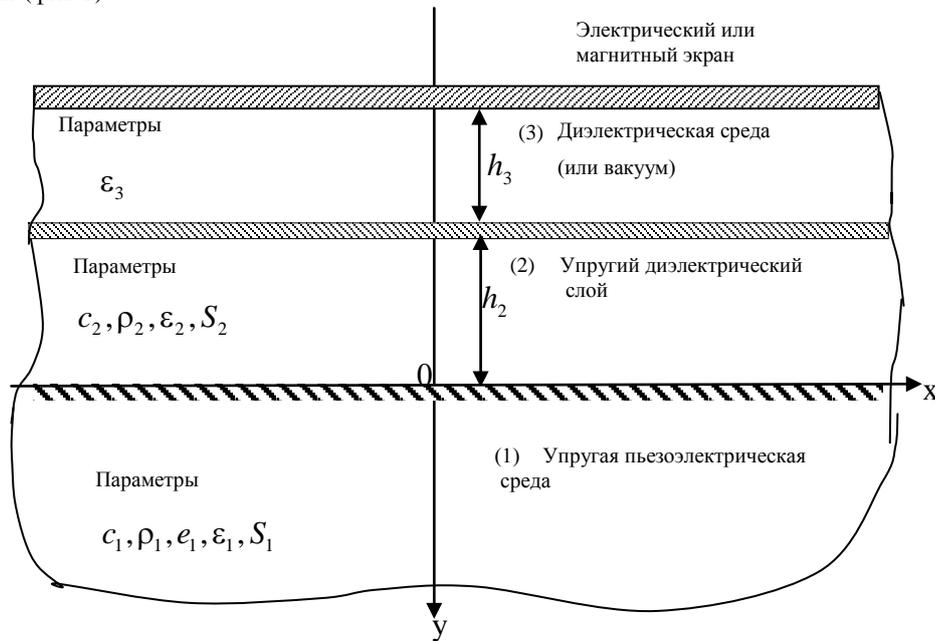
Рассматриваются электроупругие поверхностные волны Лява в слоистой пьезоэлектрической структуре с электрическим экраном в квазистатическом приближении.

1. Введение. В слоистой упругой структуре, состоящей из упругого полубесконечного основания и скреплённого с ним слоя конечной толщины, могут распространяться сдвиговые горизонтально поляризованные поверхностные волны, которые называются поверхностными волнами Лява [1]. Эти волны существуют тогда, когда скорость объёмных волн в слое меньше скорости соответствующих волн в основании. Известны также, так называемые волны Блюстейна-Гуляева – сдвиговые поверхностные электроупругие волны, которые распространяются в пьезоэлектрическом полупространстве [2,3]. В работах [4,6] обсуждались электроупругие поверхностные волны типа Лява в слоистых пьезоэлектрических средах. В работе [7] в квазистатическом приближении исследовались вопросы существования и поведения волн Блюстейна-Гуляева в пьезоэлектрическом упругом полупространстве, когда на некотором расстоянии от его поверхности размещён экран электрического поля. Та же задача в полностью динамической постановке исследовалась в работе [8]. В последние годы особый интерес стали вызывать волновые процессы в различных структурах из функционально-градуированных материалов (FGM) в периодических пьезоэлектрических

структурах (в фотонных и фононных кристаллах), где возникают запрещённые частотные полосы (band gaps), что, в свою очередь, находят широкое применение при конструировании лазеров, усилителей и сенсоров, волноводов с малыми потерями, частотных фильтров и т.д. [9,10].

В данной работе в квазистатическом приближении исследуются электроупругие волны Лява в слоистой структуре, состоящей из пьезоэлектрического полубесконечного основания и диэлектрического слоя конечной толщины, когда на некотором расстоянии от слоя помещён экран электрического поля. Получено основное дисперсионное соотношение, из которого легко получаются дисперсионные уравнения, соответствующие различным важным частным случаям, совпадающие с аналогичными уравнениями, полученными в работах [2,6].

2. Постановка задачи. Пусть задана слоистая структура, состоящая из пьезоэлектрического полупространства кристаллического класса симметрии $6mm$ или $4mm$, с жёстко примыкающим к ней изотропным диэлектрическим слоем конечной толщины h_2 . На расстоянии h_3 от слоя размещён экран электрического поля (фиг.1).



Фиг.1

Пространство между экраном и слоем представляет собой диэлектрик или вакуум. Диэлектрическая среда не имеет акустического контакта со слоем.

На фиг.1 показаны только параметры, относящиеся к антиплоскому деформированному состоянию структуры. c_i — упругие постоянные, ρ_i — плотности масс, s_i — фазовые скорости объёмных волн ($i=1,2$), ϵ_i — диэлектрические постоянные ($i=1,2,3$), e_1 — пьезомодуль подложки. Впредь, также величины, относящиеся к подложке, слою и диэлектрической среде, будут индексироваться цифрами 1,2,3, соответственно.

Обсудим антиплоское деформированное и плоское электрическое состояние слоистой структуры, которое описывается следующими электроупругими параметрами:

$$u_1 = u_2 = 0, u_3 = w(x, y, t), \varphi = \varphi(x, y, t), \quad (2.1)$$

где $\{u_i\}$ – вектор перемещений, φ – потенциал электрического поля.

В диэлектрической среде электрическое поле характеризуется квазистатическим потенциалом:

$$\varphi_3 = \varphi_3(x, y, t). \quad (2.2)$$

В слоистой структуре и диэлектрической среде потенциал определяется соотношением:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (2.3)$$

где \vec{E} – вектор напряжённости электрического поля.

Далее положим, что главная кристаллическая ось пьезоэлектрика (L_6 или L_4) направлена по оси O_z .

При сделанных выше предположениях волновой процесс будет описываться следующими уравнениями:

1) Уравнения электроупругости в пьезоэлектрической подложке ($y > 0$):

$$c_{44}^{(1)} \Delta w_1 + e_{15}^{(1)} \Delta \varphi_1 = \rho_1 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \quad (2.4)$$

$$e_{15}^{(1)} \Delta w_1 - \varepsilon_{11}^{(1)} \Delta \varphi_1 = 0.$$

2) Упругое и электрическое поля определяются в диэлектрическом слое ($-h_2 < y < 0$) уравнениями:

$$c_{44}^{(2)} \Delta w_2 = \rho_2 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \quad (2.5)$$

$$\Delta \varphi_2 = 0.$$

3) Уравнение электростатического поля в диэлектрической среде ($-(h_2 + h_3) < y < -h_2$):

$$\Delta \varphi_3 = 0, \quad (2.6)$$

$c_{44}^{(1)}$, $c_{44}^{(2)}$ – здесь и далее упругие постоянные сред, $e_{15}^{(1)}$ – пьезоэлектрическая постоянная основания, $\varepsilon_{11}^{(1)}$, $\varepsilon_{11}^{(2)}$ и $\varepsilon_{11}^{(3)}$ – диэлектрические постоянные соответствующих сред, ρ_1 и ρ_2 – массовые плотности основания и слоя, соответственно.

Следуя Блюстейну [2], введём следующее обозначение:

$$\Psi_1 = \varphi_1 - \frac{e_{15}^{(1)}}{\varepsilon_{11}^{(1)}} w_1, \quad (2.7)$$

а также:

$$\begin{aligned}
c_{44}^{(1)} &= c_1, \quad c_{44}^{(2)} = c_2, \quad e_{15}^{(1)} = e_1, \quad \varepsilon_{11}^{(i)} = \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, 3), \\
\bar{e}_1 &= \frac{e_1}{\varepsilon_1}, \quad \bar{c} = c_1 + \frac{e_1^2}{\varepsilon_1} = c_1 + e_1 \bar{e}_1, \\
\bar{c} &= c_1 \left(1 + \frac{e_1^2}{\varepsilon_1 c_1} \right) = c_1 (1 + \chi_1^2), \quad \chi_1^2 = \frac{e_1^2}{\varepsilon_1 c_1}, \\
S_1^2 &= \frac{\bar{c}_1}{\rho_1} = \frac{c_1 (\chi_1^2)}{\rho_1} = S_{10}^2 (1 + \chi_1^2), \\
S_{10}^2 &= \frac{c_1}{\rho_1}, \quad S_2 = \frac{c_2}{\rho_2}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

После этих обозначений (2.7) переписывается так:

$$\Psi_1 = \Phi_1 - \bar{e}_1 w_1, \quad \Phi_1 = \Psi_1 + \bar{e}_1 w_1. \tag{2.9}$$

Учитывая (2.8) и (2.9), уравнения (2.4) - (2.6) примут вид:

1) Уравнения в пьезоэлектрическом полупространстве ($y > 0$):

$$\Delta w_1 = \frac{1}{S_1^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2}, \tag{2.10}$$

$$\Delta \Psi_1 = 0.$$

2) Уравнения в диэлектрическом слое ($-h_2 < y < 0$):

$$\Delta w_1 = \frac{1}{S_2^2} \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2}, \tag{2.11}$$

$$\Delta \Phi_2 = 0.$$

3) Уравнения в диэлектрической среде ($-(h_2 + h_3) < y < -h_2$)

$$\Delta \Phi_3 = 0. \tag{2.12}$$

Условия непрерывности и граничные условия:

а) Условия непрерывности на границе жёсткого закрепления при $y = 0$:

$$w_1 = w_2, \quad \sigma_{23}^{(1)} = \sigma_{23}^{(2)}, \quad \Psi_1 + \bar{e}_1 w_1 = \Phi_2; \tag{2.13}$$

где $\sigma_{23}^{(i)}$ – касательные напряжения.

б) Граничные условия на поверхности слоя при $y = -h_2$:

$$\sigma_{23}^{(2)} = 0, \quad \Phi_2 = \Phi_3, \quad D_2^{(2)} = D_2^{(3)}, \tag{2.14}$$

где $D_2^{(i)}$ – нормальная составляющая электрической индукции.

в) Граничные условия на экране $y = -(h_2 + h_3)$:

$$\Phi_3 = 0. \tag{2.15}$$

Условия затухания на бесконечности при $y \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} w_1 = 0, \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} \psi_1 = 0.$$

3. Решения задачи в виде плоских волн

Выпишем сначала соотношения, определяющие состояние слоистой структуры.

1) В пьезоэлектрическом полупространстве (подложке):

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(1)} &= \bar{c}_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \\ D_2^{(1)} &= e_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} - \varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

2) В слое:

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(2)} &= c_2 \frac{\partial w_2}{\partial y}, \\ D_2^{(2)} &= -\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

3) В диэлектрической среде:

$$D_2^{(3)} = -\varepsilon_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial y}. \quad (3.3)$$

Преобразуя соотношения (3.1) с учётом (2.9), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_{23}^{(1)} &= \bar{c}_1 \frac{\partial w_1}{\partial y} + e_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \\ D_2^{(1)} &= -\varepsilon_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Решения уравнений (2.10) будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} w_1 &= W_{10} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}, \\ \psi_1 &= \Psi_{10} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где q и p – компоненты волнового вектора по оси Oy и Ox , соответственно,

W_{10} и Ψ_{10} – амплитуды, ω – частота.

Далее будем полагать, что выполняются следующие условия:

$$p > 0, \quad \omega > 0, \quad v = \omega/p > 0, \quad (3.6)$$

где v – фазовая скорость волны.

Подставив (3.5) в (2.10) и выписав условие неравенства нулю решений полученной системы ($\det = 0$), мы придём к дисперсионным уравнениям:

$$\frac{\omega^2}{S_1^2} - (p^2 + q^2) = 0, \quad (3.7)$$

$$p^2 + q^2 = 0.$$

Отсюда следует:

$$q = \pm ip\beta_1(v), \quad \beta_1 = \sqrt{1 - \frac{v^2}{S_1^2}}; \quad (3.8)$$

$$q = \pm ip.$$

Чтобы подчинить решения (3.5) условиям затухания (2.16), необходимо взять следующие корни:

$$q = ip\beta_1(v), \quad q = ip. \quad (3.9)$$

Таким образом, решения (3.5), соответствующие корням (3.9), примут вид:

$$w_1 = W_{10} e^{-p\beta_1(v)y} e^{i(px-\omega t)}, \quad (3.10)$$

$$\psi_1 = \Psi_{10} e^{-py} e^{i(px-\omega t)}.$$

Решения уравнений (2.11) в слое будем искать в виде:

$$w_2 = W_{20} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}, \quad (3.11)$$

$$\varphi_2 = \Phi_{20} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}.$$

Подставляя (3.11) в уравнения (2.11) и далее пользуясь условием существования ненулевых решений полученной системы, мы опять же придём к дисперсионным соотношениям, выражающим зависимость q от ω и p :

$$-(p^2 + q^2) + \frac{\omega^2}{S_2^2} = 0, \quad (3.12)$$

$$p^2 + q^2 = 0,$$

откуда получаем:

$$q = \pm p\beta_2(v), \quad \beta_2(v) = \sqrt{\frac{v^2}{S_2^2} - 1}, \quad (3.13)$$

$$q = \pm ip.$$

Таким образом, решения в слое вида (3.11) представляются так:

$$w_2 = (W_{20}^- e^{-ip\beta_2 y} + W_{20}^+ e^{ip\beta_2 y}) e^{i(px-\omega t)}, \quad (3.14)$$

$$\varphi_2 = (\Phi_{20}^- e^{-py} + \Phi_{20}^+ e^{py}) e^{i(px-\omega t)}.$$

Решение уравнения (2.12) в диэлектрической среде ищем в виде:

$$\varphi_3 = \Phi_{30} e^{iqy} e^{i(px-\omega t)}. \quad (3.15)$$

Подставляя (3.15) в (2.12) и поступая аналогично предыдущему, мы придём к дисперсионному соотношению:

$$p^2 + q^2 = 0, \quad (3.16)$$

откуда

$$q = \pm ip. \quad (3.17)$$

Итак, решение уравнения (2.12) представляется так:

$$\varphi_3 = \left(\Phi_{30}^- e^{-py} + \Phi_{30}^+ e^{py} \right) e^{i(px-\omega t)}. \quad (3.18)$$

4. Подчинение полученных решений условиям непрерывности и граничным условиям

Решения (3.10), (3.14) и (3.18) подставим в условия (2.13), (2.14) и (2.15). После несложных преобразований получим систему для определения амплитуд W_{20}^- , W_{20}^+ , Φ_{20}^- и Φ_{20}^+ :

$$\begin{aligned} (\bar{c}_1 \beta_1 - ic_2 \beta_2) W_{20}^- + (\bar{c}_1 \beta_1 + ic_2 \beta_2) W_{20}^+ + \varepsilon_2 \bar{e}_1 (\Phi_{20}^- - \Phi_{20}^+) &= 0, \\ \bar{e}_1 W_{20}^- + \bar{e}_1 W_{20}^+ + \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - 1 \right) \Phi_{20}^- - \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 1 \right) \Phi_{20}^+ &= 0, \\ e^{ik_2 \beta_2} W_{20}^- - e^{-ik_2 \beta_2} W_{20}^+ &= 0, \\ \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \delta_3 \right) e^{2k_2} \Phi_{20}^- + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} \delta_3 \right) \Phi_{20}^+ &= 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $k_2 = ph_2$, $k_3 = ph_3$, $\delta_3 = \text{th } k_3$.

Из условия существования ненулевого решения системы (4.1) следует основное дисперсионное уравнение:

$$\beta_1(V) = \frac{c_2}{c_1} \beta_2(V) \text{tg}(k_2 \beta_2) + \frac{\bar{\varepsilon}_2 R_1^2 (\delta_3 \bar{\varepsilon}_2 \text{th} k_2 + 1)}{\bar{\varepsilon}_2 (\delta_3 \bar{\varepsilon}_2 \text{th} k_2 + 1) + \bar{\varepsilon}_1 (\delta_3 \bar{\varepsilon}_2 + \text{th} k_2)}, \quad (4.2)$$

где $\bar{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 / \varepsilon_3$, $\bar{\varepsilon}_2 = \varepsilon_2 / \varepsilon_3$, $\beta_1(v) = \sqrt{1 - \frac{v^2}{S_1^2}}$, $\beta_2(v) = \sqrt{\frac{v^2}{S_2^2} - 1}$,

$R_1^2 = \frac{e_1^2}{\varepsilon_1 \bar{c}_1} = \frac{\chi_1^2}{1 + \chi_1^2}$ – коэффициент электромеханической связи (без пьезоэффекта $R_1^2 = 0$).

Рассмотрим некоторые важные частные случаи:

1) Экран находится в бесконечности (отсутствует), $\delta_3 = 1$.

Дисперсионное уравнение (4.2) примет вид:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{c_1} \beta_2 \text{tg}(k_2 \beta_2) + \frac{\bar{\varepsilon}_2 R_1^2 (\bar{\varepsilon}_2 \text{th} k_2 + 1)}{\bar{\varepsilon}_2 (\bar{\varepsilon}_3 \text{th} k_2 + 1) + \bar{\varepsilon}_1 (\bar{\varepsilon}_2 + \text{th} k_2)}. \quad (4.3)$$

Это совпадает с результатом работы [6].

2) Экран находится на верхней поверхности слоя, $\delta_3 = 0$.

Дисперсионное уравнение для этого случая имеет вид:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{c_1} \beta_2 \text{tg}(k_2 \beta_2) + \frac{\bar{\varepsilon}_2 R_1^2}{\bar{\varepsilon}_2 + \bar{\varepsilon}_1 \text{th} k_2}. \quad (4.4)$$

Это также совпадает с результатом работы [6].

3) Слой представляет собой проводник, $\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \rightarrow 0$, поэтому имеем:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{c_1} \beta_2 \operatorname{tg}(k_2 \beta_2) + R_1^2. \quad (4.5)$$

Этот результат был уже получен в работах [4,6] при $e_{14} = d_1 = 0$ (d_1 – пьезоэлектрическая постоянная).

4) Подложка – не пьезоэлектрическая среда, $e_1 = d_1 = 0, R_1^2 = 0$. Следовательно, получим:

$$\beta_1 = \frac{c_2}{c_1} \beta_2 \operatorname{tg}(k_2 \beta_2). \quad (4.6)$$

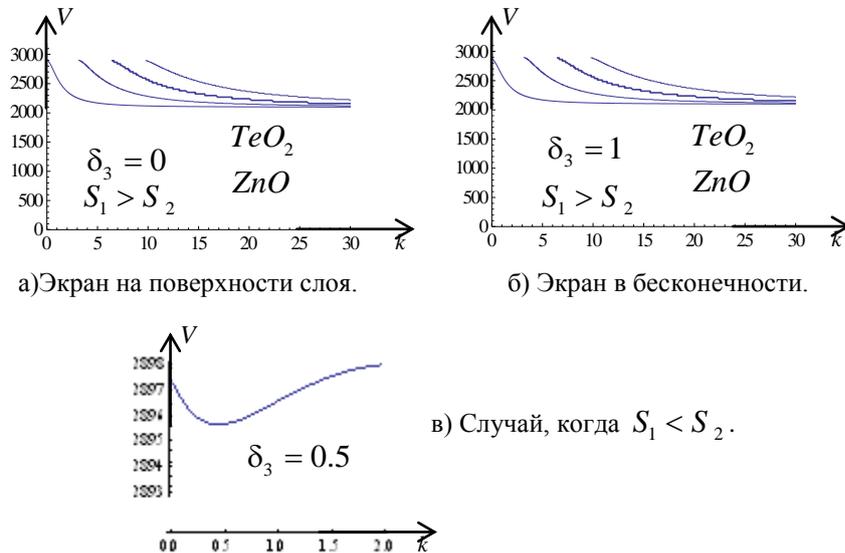
Это есть классическое уравнение Лява [1].

5) Слой отсутствует, получаем:

$$\beta_1 = \frac{R_1^2}{\delta_3 \bar{\epsilon}_1 + 1}, \quad (4.7)$$

что совпадает с результатом работы [7].

Приведём результаты некоторых численных расчётов для конкретных материалов и структур. Ниже представлены результаты численного исследования, когда материал слоя представляет собой окись теллура, подложка – окись цинка, а диэлектрическая среда – вакуум.



Фиг.2. Дисперсионные кривые.

Работа выполнена в рамках русско-армянского проекта по фундаментальным исследованиям (шифр 13RF-086).

ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 827с.
2. Балакирев М.К., Гишинский И.Л. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 237с.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. 472с.
4. Curtis R.G., Redwood M. Transvers surface wave on a piezoelectric material carrying a metal layer of finite thickness. // J. Appl. Phys. 1973. Vol.44. №5. P.2002-2007.
5. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Электромагнитоупругие волны. Ереван: Изд. ЕГУ, 2006. 492с.
6. Danoyan Z.N., Piliposyan G.T. Surface electro-elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and two isotropic layers. //Int. Journal of solids and structures. 46 (2009), 1345-1353.
7. Аветисян А.С., Карапетян М.Е. Экранирование волны Гуляева-Блюстейна. //В кн.: Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 2002, с. 97-100.
8. Белубекян М.В. Экранированная поверхностная сдвиговая волна в пьезоактивном полупространстве гексогональной симметрии. //В кн.: “Проблемы динамики взаимодействия деформируемых сред”. Ереван: Институт механики НАН РА, 2008, с.125-130.
9. К.В.Ghazaryan, D.G.Piliposyan. Interfacial effects for shear waves in one dimensional periodic piezoelectric structure. //Journal of Sound & Vibration. 330, 2011. P.6456-6466.
10. G.T.Piliposian, A.S.Avetisyan, K.B.Ghazaryan. Shear wave propogation in periodic phononic/photonic piezoelectric medium. //Journal of Wave Motion. V.49. Iiss1. 2011. P.125-134.

Сведения об авторах:

Даноян Завен Нерсесович

Доктор ф.-м.н., зав.отделом Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Атоян Левон Арутюнович

Канд. ф.-м.н., ст.науч.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

E-mail: levous@mail.ru

Саакян Саак Леонович

Канд. ф.-м.н., науч.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

E-mail: mechins@sci.am

Даноян Нерсес Завенович

науч.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: РА, 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^б.

E-mail: zavendanoyan@gmail.com

Поступила в редакцию 12.11.2012