ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, № 2, 2013 Механика

УДК 539.3

ИЗГИБ И КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНКИ ПРИ УСЛОВИЯХ СВОБОДНОГО СКОЛЬЖЕНИЯ МЕЖДУ СЛОЯМИ

Белубекян М.В.

Ключевые слова: пластина, слой, скользящий контакт, расслоение.
Key words: plate, layer, smooth contact, lamination.

Բելուբեկյան Մ.Վ.
Երկշերտ սալի ծռումը և տատանումները շերտերի միմյանց նկատմամբ ազատ սահելու պայմանների դեպքում

Ուղղանկյան սալերի երկու շերտերը եզրերով ամրակցված են: Երկու շերտերի միջև տեղի ունեն սահող կոնտակտի պայմանները: Կիրխովի վարկածի հիման վրա ստացված են ծռման և տատանումների հավասարումները: Որոշված են շերտերի մեկը մյուսից չանջատվելու պայմանները:

Belubekyan M.V.
The bending and vibartion of two layered plate under the free sliding conditions between the layers
Two layer of the rectangular plate are clumped by the edges. There are smooth contact conditions between the edges. The equatons of the bending and vibrations are obtained on the base of Kirchhoff hipoteses. The conditions under which layers do not laminate are determined.

Два слоя прямоугольных пластин закреплены по кромкам. Между слоями имеет место условие скользящего контакта. Получены уравнения изгиба и колебаний на основе гипотезы Кирхгофа. Определены условия, при которых слои пластин не отделяются друг от друга.

1. Большое количество работ посвящено исследованию упругих многослойных пластин при различных силовых воздействиях. Известные работы, в основном, посвящены задачам с условиями жёсткого (полного) контакта между слоями [1,2]. Однако, возможны случаи, когда склеивание слоёв (или сваривание), например, металл–полимер, не эффективно. Такие пластины скрепляются по контуру болтами. Для исследования напряжённо-деформированного состояния таких пластин при статических нагрузках в работах [3,4] используется асимптотический метод интегрирования.

В настоящей работе рассматриваются двуслойные пластинки при условиях скользящего контакта между слоями на основе гипотезы Кирхгофа для каждого слоя в отдельности.

Рассматривается двухслойная пластинка с постоянными толщинами слоёв h_1 и h_2. В прямоугольной декартовой системе координат (x, y, z) слой с индексом (1) занимает область $0 \le x \le \alpha,\ 0 \le y \le b,\ 0 < z \le h_1$, а слой с индексом (2) – область $0 \le x \le \alpha,\ 0 \le y \le b,\ -h_2 \le z < 0$.

Уравнения колебания слоёв имеют вид [1]

$$\frac{\partial \sigma_{ij}^{(k)}}{\partial x_j} = \rho_k \frac{\partial u_i^{(k)}}{\partial t^2}, \quad k = 1,2 \qquad (1.1)$$

Обозначения в (11) общеизвестны. Однако, в дальнейшем вместо (x_1, x_2, x_2) будут использованы $(x,\ y,\ z)$.

Предполагается, что внешняя лицевая сторона слоя с индексом (1) находится под нормальной нагрузкой

$$\sigma_{33}^{(1)} = -q(x, y, t),\quad \sigma_{31}^{(1)} = \sigma_{32}^{(1)} = 0 \quad \text{при } z = h_1 \tag{1.2}$$

Внешняя сторона второго слоя свободна

$$\sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{31}^{(2)} = \sigma_{32}^{(2)} = 0 \qquad \text{при} \quad z = -h_2 \tag{1.3}$$

Принимается, что на стыке слоёв имеют место условия скользящего контакта

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)},\quad \sigma_{33}^{(1)} = \sigma_{33}^{(2)},\quad \sigma_{31}^{(1)} = 0,\ \sigma_{32}^{(1)} = 0 \quad \text{при } x = 0 \tag{1.4}$$

Допущения гипотезы Кирхгофа относительно компонент упругих перемещений слоёв пластинки принимаются в виде

$$u_1^{(k)} = u_k - z\frac{\partial w}{\partial x},\quad u_2^{(k)} = \mathrm{v}_k - z\frac{\partial w}{\partial y},\quad u_3^{(k)} = w \tag{1.5}$$

где u_k, v_k, w являются функциями от x, y, t. Затем, в соответствии с теорией Кирхгофа, уравнения (1.1) осредняются. При этом, уравнения в области слоя с индексом (1) интегрируются в пределах от 0 до h_1, а уравнения в области с индексом (2) – в пределах от $-h_2$ до 0. В результате получаются следующие уравнения относительно усилий и моментов (с учётом граничных условий (1.2) – (1.4) и представлений (1.5))

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1 - \frac{h_1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial S^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(1)}}{\partial y} = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{v}_1 - \frac{h_1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&\frac{\partial T_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial S^{(2)}}{\partial y} = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2 + \frac{h_2}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial S^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial T_2^{(2)}}{\partial y^2} = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{v}_2 + \frac{h_2}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - q(x, y) - \sigma_{33}(0) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial y} - N_1^{(1)} = \frac{\rho_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1 - \frac{2h_1}{3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&\frac{\partial H^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial M_2^{(1)}}{\partial y} - N_2^{(1)} = \frac{\rho_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{v}_1 - \frac{2h_1}{3}\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial N_2}{\partial y}+\sigma_{33}\left(0\right)=\rho_2 h_2\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial M_1^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial H^{(2)}}{\partial y}-N_1^{(2)}=-\frac{\rho_2 h_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial H^{(2)}}{\partial x}+\frac{\partial M_2^{(2)}}{\partial y}-N_2^{(2)}=-\frac{\rho_2 h_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{v}_2+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

Выражения для усилий и моментов из (1.6) и (1.7) имеют вид:

$$T_1^{(1)}=\int_0^{h_1}\sigma_{11}^{(1)}dz=C_1\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}+\nu_1\,\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y}-\frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_1\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$T_2^{(1)}=\int_0^{h_1}\sigma_{22}^{(1)}dz=C_1\left[\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y}+\nu_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{h_1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_1\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$S^{(1)}=\int_0^{h_1}\sigma_{12}^{(1)}dz=\frac{1-\nu}{2}C_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x}-h_1\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

$$T_1^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\sigma_{11}^{(2)}dz=C_2\left[\frac{\partial u_2}{\partial x}+\nu_2\,\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}+\frac{h_2}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_2\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$T_2^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\sigma_{22}^{(2)}dz=C_2\left[\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}+\nu_2\,\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{h}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$S^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\sigma_{12}dz=\frac{1-\nu}{2}C_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x}+h_2\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

$$N_1^{(1)}=\int_0^{h_1}\sigma_{13}^{(1)}dz,\quad N_1^{(2)}=\int_0^{h_1}\sigma_{23}^{(1)}dz,$$

$$N_1^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\sigma_{13}^{(2)}dz,\quad N_2^{(2)}=\int_{-h_2}^{0}\sigma_{23}dz, \tag{1.8}$$

$$M_1^{(1)}=\int_0^{h_1}z\sigma_{11}^{(1)}dz=K_1\left[\frac{\partial u_1}{\partial x}+\nu_1\,\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y}-\frac{2h_1}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_1\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$M_2^{(1)}=\int_0^{h_1}z\sigma_{22}^{(1)}dz=K_1\left[\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y}+\nu_1\,\frac{\partial u_1}{\partial x}-\frac{2h_1}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_1\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$H^{(1)}=\int_0^{h_1} z\sigma_{12}^{(1)}dz=\frac{1-\nu_1}{2}K_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial y}+\frac{\partial v_1}{\partial x}-\frac{4h_1}{3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

$$M_1^{(2)}=\int_{-h_2}^{0} z\sigma_{11}^{(2)}dz=-K_2\left[\frac{\partial u_2}{\partial x}+\nu_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{2h_2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$M_2^{(2)}=\int_{-h_2}^{0} z\sigma_{22}^{(2)}dz=-K_2\left[\frac{\partial v_2}{\partial y}+\nu_2\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{2h_2}{3}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu_2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]$$

$$H^{(2)}=-\frac{1-\nu_2}{2}K_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial y}+\frac{\partial v_2}{\partial x}+\frac{4h_2}{3}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)$$

В (1.8) приняты обозначения:

$$C_k=\frac{E_k h_k}{1-\nu_k^2},\quad K_k=\frac{E_k h_k^2}{2\left(1-\nu_k^2\right)} \tag{1.9}$$

2. Подстановка (1.8) в (1.6) приводит к следующей системе уравнений относительно перемещений:

$$\begin{aligned}
&\Delta u_1+\theta_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)-\frac{h_1}{1-\nu_1}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w=\frac{1}{c_{t_1}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1-\frac{h_1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&\Delta v_1+\theta_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)-\frac{h_1}{1-\nu_1}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w=\frac{1}{c_{t_1}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_1-\frac{h_1}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&\Delta u_2+\theta_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+\frac{h_2}{1-\nu_2}\frac{\partial}{\partial x}\Delta w=\frac{1}{c_{t_2}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2+\frac{h_2}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\right)\\
&\Delta v_2+\theta_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)+\frac{h_2}{1-\nu_2}\frac{\partial}{\partial y}\Delta w=\frac{1}{c_{t_2}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(v_2+\frac{h_2}{2}\frac{\partial w}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где $\theta_k=\frac{1+\nu_k}{1-\nu_k},\quad c_{tk}^2=\frac{E_k}{2\left(1+\nu_k\right)\rho_k}$ (2.2)

Подстановка выражений для $M_1^{(k)}$, $M_2^{(k)}$ и $H^{(k)}$ из (1.8) во второе, третье, пятое и шестое уравнения системы (1.7) приводит к уравнениям

$$\frac{1-\nu_1}{2}K_1\left[\Delta u_1+\theta_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\right]-\frac{2h_1}{3}K_1\frac{\partial}{\partial x}\Delta w-$$

$$-N_1^{(1)}=\frac{\rho_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_1-\frac{2h_1}{3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1-\nu_1}{2}K_1\left[\Delta \mathrm{v}_1+\theta_1\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y}\right)\right]-\frac{2h_1}{3}K_1\frac{\partial}{\partial y}\Delta w-$$

$$-N_2^{(1)}=\frac{\rho_1 h_1^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{v}_1-\frac{2h_1}{3}\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\frac{1-\nu_2}{2}K_2\left[\Delta u_2+\theta_2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{2h_2}{3}K_2\frac{\partial}{\partial x}\Delta w+$$

$$+N_1^{(2)}=\frac{\rho_2 h_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u_2+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1-\nu_2}{2}K_2\left[\Delta \mathrm{v}_2+\theta_2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right)\right]+\frac{2h_2}{3}K_2\Delta w+$$

$$+N_2^{(2)}=\frac{\rho_2 h_2^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\mathrm{v}_2+\frac{2h_2}{3}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{2.3}$$

Уравнения (2.3) определяют перерезывающие усилия $N_1^{(k)}$, $N_2^{(k)}$ посредством перемещений u_k, v_k, w. В классической теории пластин члены в правых частях уравнений (2.3) обычно пренебрегаются (моменты инерции вращения).

Определяя $N_1^{(k)}$, $N_2^{(k)}$, с учётом указанного пренебрежения и подставляя в первое и четвёртое уравнения системы (1.7) получим

$$\frac{2h_1}{3}K_1\Delta^2 w-K_1\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y}\right)+\rho_1 h_1\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-q(x,y)-\sigma_{33}(0)$$

$$\frac{2h_2}{3}K_2\Delta^2 w+K_2\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right)+\rho_2 h_2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\sigma_{33}(0) \tag{2.4}$$

Таким образом, задача привелась к решению системы из шести уравнений (2.1), (2.4) относительно шести искомых функций $u_1,\, u_2,\, \mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, w,\, \sigma_{33}(0)$ от переменных x, y, t.

Если из уравнений (2.4) исключить $\sigma_{33}(0)=\sigma_{33}(0,x,y,t)$, то придём к уравнению

$$D\Delta^2 w-\Delta\left[K_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y}\right)-K_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right)\right]+m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=-q(x,y,t) \tag{2.5}$$

где

$$D=\frac{2}{3}\left(h_1K_1+h_2K_2\right),\quad m=\rho_1 h_1+\rho_2 h_2 \tag{2.6}$$

Из уравнений (2.1) и (2.5) следует, что задачи планарных и изгибных колебаний не отделяются.

3. Граничные условия на кромках пластины получаются при помощи осреднения условий задачи в трёхмерной постановке [5].

I. Граничные условия закреплённого края в трёхмерной постановке

$$u_1^{(k)} = 0,\ u_2^{(k)} = 0,\ u_3^{(k)} = 0 \quad \text{при} \quad x = \mathrm{const} \tag{3.1}$$

с учётом (1.5) и после осреднения приводятся к виду

$$u_1 = 0,\ \mathrm{v}_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \mathrm{v}_2 = 0,\ w = 0,\ \partial w/\partial x = 0 \tag{3.2}$$

II. Граничным условиям облегчённой заделки

$$u_1^{(k)} = 0,\ \sigma_{12}^{(k)} = 0,\ u_3^{(k)} = 0 \quad \text{при} \ x = \mathrm{const} \tag{3.3}$$

будут соответствовать условия

$$u_1 = 0,\ \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} = 0,\ u_2 = 0,\ \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x} = 0,\ w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{3.4}$$

III. Осреднение условий стеснённого скользящего контакта

$$u_1^{(k)} = 0,\ u_2^{(k)} = 0,\ \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при} \quad x = \mathrm{const} \tag{3.5}$$

даёт

$$u_1 = 0,\ \mathrm{v}_1 = 0,\ u_2 = 0,\ \mathrm{v}_2 = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{3.6}$$

IV. Шарнирное закрепление (условия Навье)

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0,\ u_2^{(k)} = 0,\ u_3^{(k)} = 0 \quad \text{при} \ x = \mathrm{const} \tag{3.7}$$

Условиям (3.7) соответствуют осреднённые условия

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 0,\ \mathrm{v}_1 = 0,\ \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0,\ \mathrm{v}_2 = 0,\ w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{3.8}$$

V. Скользящий контакт. Условиям трёхмерной задачи

$$u_1^{(k)} = 0,\ \sigma_{12}^{(k)} = 0,\ \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при} \ x = \mathrm{const} \tag{3.9}$$

соответствуют условия

$$u_1 = 0,\ \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} = 0,\ u_2 = 0,\ \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial w}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0 \tag{3.10}$$

VI. Условиям свободного опирания

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0,\ \sigma_{12}^{(k)} = 0,\ u_3^{[k]} = 0 \quad \text{при} \quad x = \mathrm{const} \tag{3.11}$$

соответствуют осреднённые условия

$$\begin{gathered} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \nu_1 \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x} - h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} + \nu_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x} + h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \\ w = 0,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{gathered} \tag{3.12}$$

VII. В случае граничных условий стеснённого свободного края

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0,\ u_2^{(k)} = 0,\ \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при} \quad x = \mathrm{const} \tag{3.13}$$

число осреднённых условий оказывается больше, чем требуется для корректной постановки задачи. Как и в случае классической теории пластин для граничных условий свободного края, здесь также необходимо использовать сочетание условий.

VIII. Аналогично предыдущему случаю, число осреднённых граничных условий оказывается больше и в случае свободного края

$$\sigma_{11}^{(k)} = 0,\ \sigma_{12}^{(k)} = 0,\ \sigma_{13}^{(k)} = 0 \quad \text{при } x = \text{const} \tag{3.14}$$

4. Для приведённой выше модели исследования задач изгиба и колебаний двухслойной пластинки исключается возможность отделения слоёв друг от друга в процессе деформации. Возможность отделения слоёв (расслоение) проверяется после решения задачи и определения напряжения $\sigma_{33}(0) = \sigma_{33}(x, y, 0, t)$. Условие того, что слои не расслаиваются (или условие корректности модели) есть неравенство

$$\sigma_{33}(0) \le 0 \tag{4.1}$$

Пусть пластинка изгибается в виде цилиндрической поверхности под действием равномерно распределённой нагрузки

$$q = q_0 = \text{const} > 0 \tag{4.2}$$

С учётом независимости искомых функций от кординаты y и времени t, уравнения (2.1) и (2.5) приводятся к виду

$$\begin{gathered} u_1'' - 0.5h_1 w''' = 0,\ \mathrm{v}_1'' = 0 \\ u_2'' + 0.5h_2 w''' = 0,\ \mathrm{v}_2'' = 0 \\ D_* w^{\mathrm{IV}} = -q_0,\quad D_* = 0.25D \end{gathered} \tag{4.3}$$

Из второго уравнения системы (2.4) получаем

$$\sigma_{33}(0) = \frac{2h_2}{3} K_2 w^{\mathrm{IV}} + K_2 u_2''' \tag{4.4}$$

Используя в (4.4) выражения для w^{IV} и u_2''' из (4.3), находим

$$\sigma_{33}(0) = -\frac{h_2 K_2}{h_1 K_1 + h_2 K_2} q_0 \tag{4.5}$$

Для данной задачи, независимо от граничных условий на кромках пластины, нормальное напряжение на стыке пластин сжимающее, поэтому расслоение не будет иметь место.

Возникает вопрос: возможно ли отделение слоёв в случае, когда на двухслойную систему действует лишь объёмная сила веса (сила притяжения).

В этом случае из уравнений систем (1.6) и (1.7) изменяются только второе и четвёртое уравнения системы (1.7), которые получаются в виде:

$$\begin{gathered} \frac{\partial N_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - \rho_1 h_1 g - \sigma_{33}(0) = \rho_1 h_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial N_2^{(2)}}{\partial y} - \rho_2 h_2 g + \sigma_{33}(0) = \rho_2 h_2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{gathered} \tag{4.6}$$

Для приведённой выше задачи цилиндрического изгиба из второго уравнения (4.6) нетрудно получить

$$\sigma_{33}(0) = \frac{2h_2}{3} K_2 w^{\mathrm{IV}} + K_2 u_2''' + \rho_2 h_2 g \tag{4.7}$$

Из системы (4.3) следует, что

$$W^{\mathrm{IV}} = -mgD_*^{-1}, \quad u_2''' = -0.5h_2 w^{\mathrm{IV}} \tag{4.8}$$

Подстановка (4.8) в (4.7) приводит к выражению

$$\sigma_{33}(0) = \frac{gh_1h_2}{h_1K_1 + h_2K_2} \left(\rho_2 K_1 - \rho_1 K_2\right) \tag{4.9}$$

Условие неотделения слоёв будет

$$\rho_2 K_1 - \rho_1 K_2 < 0 \tag{4.10}$$

В частности, из (4.10) при $K_1 = K_2$ получается естественное условие $\rho_2 < \rho_1$ отсутствия расслоения. Согласно выражениям для K_k, неравенство (4.10) существенно зависит от толщин слоёв пластинки.

Предлагается наличие условия (4.10) считать критерием живучести, т.к. в этом случае вероятность расслоения элемента конструкции из двухслойной пластинки будет существенно меньше при действии нормальной нагрузки сложного вида.

На основе системы (4.3) можно получить решения многочисленных задач. Ниже приводятся несколько частных примеров. Пусть кромки пластинки $x = 0$ и $x = a$ закреплены. Граничные условия закреплённого края для одномерной задачи, согласно (3.2), имеют вид:

$$u_1 = 0,\ \mathrm{v}_1 = 0,\ \ u_2 = 0,\ \mathrm{v}_2 = 0,\ w = 0,\ \ \partial w/\partial x = 0 \tag{4.11}$$

Решение системы (4.3) при граничных условиях (4.11) будет:

$$\begin{gathered} u_1 = -p^2 h_1 x\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{2x}{a}\right) \\ u_2 = -p^2 h_2 x\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1-\frac{2x}{a}\right) \\ w = -p^2 x^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2, \quad p^2 = \frac{q_0 a^2}{24D_*} \end{gathered} \tag{4.12}$$

Граничные условия шарнирного закрепления (3.8) следующие:

$$u_1' = 0,\ \mathrm{v}_1 = 0,\ u_2' = 0,\ \mathrm{v}_2 = 0,\ w = 0,\ \ w'' = 0 \tag{4.13}$$

Решение системы (4.3), удовлетворяющее при $x = 0$ условиям закрепления (4.11), а при $x = a$ условиям (4.13), получается в виде

$$\begin{gathered} u_1 = -\frac{3}{2}p^2 h_1 x\left(1-\frac{5}{2}\frac{x}{a}+\frac{4}{3}\frac{x^2}{a^2}\right) \\ u_2 = \frac{3}{2}p^2 h_2 x\left(1-\frac{5}{2}\frac{x}{a}+\frac{4}{3}\frac{x^2}{a^2}\right) \\ w = -\frac{3}{2}p^2 x^2\left(1-\frac{5}{3}\frac{x}{a}+\frac{2}{3}\frac{x^2}{a^2}\right) \end{gathered} \tag{4.14}$$

В случае свободного края, в отличие от двумерной задачи, число граничных условий соответствует условию корректности задачи и имеет вид

$$u_1' = 0,\ \mathrm{v}_1' = 0,\ u_2' = 0,\ \mathrm{v}_2' = 0,\ w'' = 0,\ \ w''' = 0 \tag{4.15}$$

Задача для консольной пластинки, край $x=0$ закреплён, край $x=a$ свободен, имеет решение

$$u_1=-6p^2h_1x\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{3a^2}\right)$$

$$u_2=6p^2h_2x\left(1-\frac{x}{a}+\frac{x^2}{3a^2}\right) \qquad (4.16)$$

$$w=-6p^2x^2\left(1-\frac{2}{3}\frac{x}{a}+\frac{1}{6}\frac{x^2}{a^2}\right)$$

В случае, когда пластинка изгибается под действием только собственного веса, решения (4.12), (4.14), (4.16) остаются в силе при замене в выражении p^2 из (4.12) q_0 на mg, где m определяется формулой из (2.6).

5. Для задач статики двумерные задачи слоистых пластин существенно упрощаются [6]. Если первое уравнение системы (2.1) продифференцировать по x, а второе уравнение по y и сложить, то получится

$$\Delta\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial y}\right)=\frac{h_1}{2}\Delta^2 w \qquad (5.1)$$

Аналогичным образом из третьего и четвёртого уравнений системы (2.1) получается

$$\Delta\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial y}\right)=-\frac{h_2}{2}\Delta^2 w \qquad (5.2)$$

Подстановка (5.1), (5.2) в уравнение (2.5) при отсутствии инерционного члена приводит к уравнению

$$0.25\cdot D\Delta^2 w=-q(x,y) \qquad (5.3)$$

Отсюда следует, что уравнение для определения функции прогиба пластинки отделяется от уравнений, определяющих перемещения обобщённого плоского напряжённого состояния. Граничные условия закреплённого края (3.2) облегчённой заделки (3.4) стеснённого скользящего контакта (3.6), шарнирного закрепления (3.8), скользящего контакта (3.10) и свободного опирания (3.12) показывают, что в этих случаях задача изгиба оказывается полностью автономной. Для задач с приведёнными граничными условиями вначале определяется функция прогиба w, которая затем подставляется в уравнения (2.1), а в случае свободного опирания – и в граничные условия (3.12). После чего, необходимо решать задачу для определения планарных перемещений u_k, v_k.

Используя выражение (5.2) для определения нормального напряжения $\sigma_{33}(0)$ и (2.4), нетрудно получить формулу (4.5). Следовательно, и в двумерных задачах статики рассматриваемой двухслойной пластинки, нормальное напряжение на стыке слоёв не зависит от краевых условий. Нетрудно проверить, что формула (4.9) в задаче изгиба под собственным весом и условие живучести (4.10) также справедливы для двумерной задачи.

6. Для задач собственных колебаний двухслойных пластин удобно использовать преобразование [6]

$$u_k=\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}+\frac{\partial \psi_k}{\partial y},\quad \mathrm{v}_i=\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}-\frac{\partial \psi_k}{\partial x},\quad k=1,2 \qquad (6.1)$$

Подстановка (6.1) в уравнения (2.1) и (2.5), после некоторых преобразований приводит к следующей системе:

$$\Delta\varphi_1 - \frac{1}{C_{e1}^2}\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} = \frac{h_1}{2}\left(\Delta w - \frac{1}{C_{e1}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)$$

$$\Delta\psi_1 - \frac{1}{C_{t1}^2}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta\varphi_2 - \frac{1}{C_{e1}^2}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} = -\frac{h_2}{2}\left(\Delta w - \frac{1}{C_{e2}^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) \qquad (6.2)$$

$$\Delta\psi_2 - \frac{1}{C_{t2}^2}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial t^2} = 0$$

$$\Delta^2\left(Dw - K_1\varphi_1 + K_2\varphi_2\right) + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

В (6.2), кроме принятых ранее обозначений из (1.9), (2.2) и (2.6), используется также новое обозначение

$$C_{ek}^2 = \frac{E_k}{\left(1-\nu_k^2\right)\rho_k} \qquad (6.3)$$

Из (6.2) следует, что планарные сдвиговые волны $\left(\psi_k\right)$ отделяются. Планарные продольные волны $\left(\varphi_k\right)$ и изгибные взаимосвязаны. Если решения уравнений (6.2) представить в виде гармонических волн

$$\varphi_k = A_k \exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right),\ \ \psi_k = B_k \exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right),$$
$$w = C\exp i\left(\omega t - k_1 x - k_2 y\right) \qquad (6.4)$$

то нетрудно получить выражения для фазовых скоростей. Для чисто сдвиговых волн в каждом слое распространяются волны с фазовыми скоростями

$$\frac{\omega_{kk}^2}{k^2} = C_{tk}^2, \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 \qquad (6.5)$$

Для связанных продольных и изгибных волн будем иметь

$$\frac{\omega_{ek}^2}{k^2} = C_{ek}^2, \quad \frac{\omega_u^2}{k^2} = \frac{D}{4m}k^2 \qquad (6.6)$$

Следовательно, в каждом слое распространяется автономная продольная волна, которая приводит к изгибным колебаниям с той же частотой, что и у продольной волны. В свою очередь, изгибные колебания приводят к возбуждению продольных волн в каждом слое.

7. В статье [7] предлагается другой подход к исследованию слоистых пластин в случае свободного скольжения между слоями. Во-первых, принимается, что в общем случае слои могут быть удалены друг от друга и соединены только на кромках. Затем предлагаются уравнения для прогибов каждой пластинки в виде

$$L_1\left(w_1\right) = q_*^{(1)} + \chi_1\psi$$
$$L_2\left(w_2\right) = q_*^{(2)} + \chi_2\psi \qquad (7.1)$$

где L_1, L_2 – определённые операторы с учётом также нелинейных членов, $q_*^{(k)}$ нагрузки, действующие на каждый слой. В (7.1) ψ – некоторый коэффициент, который равен нулю, если пластинки удалены друг от друга и определяются с использованием модели основания Винклера или Власова, если между пластинками нет зазора.

Работа выполнена в рамках намечаемых совместных исследований Института механики НАН Армении и ОАО "ОАК" РФ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость колебания. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Reddy J.N. Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: theory and analysis. CRC Press. 2004. 825p.
3. Агаловян Л.А., Хачатрян А.М. О двумерных уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при неполном контакте между слоями // В сб.: "Контактные и смешанные граничные задачи механики деформируемого твёрдого тела" Ереван: 1999. С.23-29.
4. Хачатрян А.М. об уравнениях двухслойной анизотропной пластинки при нежёстком контакте слоёв.// Докл. НАН Армении.1999. Т.99. № 2. С.159-165.
5. Белубекян М.В. Об уравнениях теории пластин, учитывающих поперечные сдвиги.// В сб.: "Проблемы механики тонких деформируемых тел" (Посв. 80-летию С.А. Амбарцумяна) Ереван: Изд. "Гитутюн", 2002. С.67-88.
6. Белубекян М.В. К вопросу колебаний неоднородной по толщине пластинки. //Изв. НАН Армении. Механика. 2002. Т.55. №3. С.31-41.
7. Крысько А.В., Овсяникова О.А. Математическая модель многослойных неспаянных задач теории пластин // Межвуз.научн.сб.:Саратов:2004.Вып.2. С.195-204.

Сведения об авторе:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ-мат.наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.
(+374 10) 52-15-03, (+374 10) 58-00-96

E-mail: mbelubekyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 26.04.2013