

**ОБ ОДНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ
ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗОМ**

Акопян В.Н., Даштоян Л.Л., Шагинян С.С.

Ключевые слова: ортотропная плоскость, задача Римана, разрез, смешанная задача

Key words: orthotropic plane, the Riemann problem, slit, mixed boundary value problem

Հակոբյան Վ.Ն., Դաշտոյան Լ.Լ., Շահինյան Ս.Ս.

Ճեղք պարունակող օրթոտրոպ հարթության համար մի խառը խնդրի մասին

Վնասվածքներ պարունակող առաձգական իզոտրոպ և օրթոտրոպ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակի ուսումնասիրությանը նվիրված են հայրենական և արտասահմանյան հետազոտողների բազմաթիվ աշխատանքներ: Մասնավորապես [1] մենագրության մեջ ուսումնասիրված է օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա վնասվածքներ պարունակող օրթոտրոպ հարթության հարթ դեֆորմացիոն վիճակը: Այդ արդյունքների հիման վրա այս աշխատանքում կառուցված է օրթոտրոպիայի գլխավոր ուղղություններից մեկի վրա ճեղք պարունակող օրթոտրոպ հարթության համար մի խառը խնդրի փակ լուծումը, երբ ճեղքի ափերի հակադիր տեղամասերում գործում են հարթ հիմքերով բացարձակ կոշտ դրոշմներ:

Hakobyan V., Dashtoyan L., Shahinyan S.S.

One mixed boundary value problem for orthotropic plane with slit

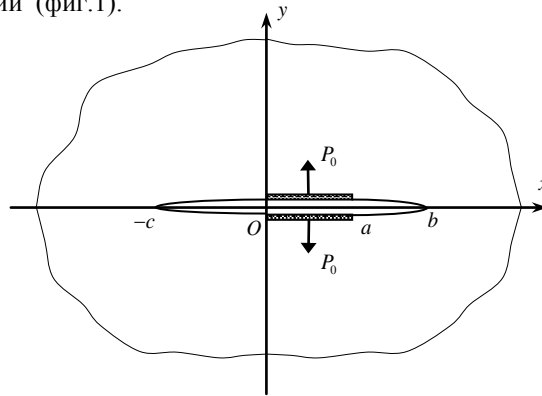
Numerous works are devoted to research of stress state of the elastic isotropic or orthotropic plane with defects on one of principal direction of orthotropy. In present paper the exact solution of one mixed boundary value problem for orthotropic plane with slit on one of principal direction of orthotropy, when the same absolutely rigid stamps with flat base are acting on the opposite edges of slit, is constructed.

Изучению плоско-деформированного состояния упругой изотропной или ортотропной плоскости с дефектами на одном из главных направлений ортотропии посвящено огромное количество работ отечественных и зарубежных исследователей. В частности, в монографии [1] исследовано плоско-деформированное состояние упругой ортотропной плоскости с дефектами на одном из главных направлений ортотропии. На основе этих результатов в настоящей работе построено точное решение одной смешанной задачи для ортотропной плоскости с разрезом на одном из главных направлений ортотропии, на одинаковых участках противоположных берегов которого действуют одинаковые абсолютно жёсткие штампы с плоскими основаниями.

1. Постановка задачи и вывод определяющих уравнений

Пусть ортотропная упругая плоскость, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , направления осей которой совпадают с главными направлениями ортотропии материала, на линии $y = 0$ на интервале $(-c, b)$ расслаблена разрезом

и деформируется под воздействием двух одинаковых абсолютно жёстких штампов с плоскими основаниями, сцеплёнными к берегам разреза на участках $(0, a)$ ($a < b$) и сообщаемым точкам берегов разреза постоянные вертикальные смещения $\pm\delta/2$. Полагаем, что участок берегов разреза $L = (-c, 0) \cup (a, b)$ свободен от напряжений (фиг.1).



Фиг.1.

Ставится задача: определить контактные напряжения, действующие под штампами, коэффициент интенсивности напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$, а также раскрытие разреза.

Следует отметить, что замкнутое решение аналогичной задачи для изотропной плоскости, в случае, когда она симметрична также относительно оси Oy и под штампами отсутствуют касательные напряжения, построено в работе [2].

Мысленно разделим плоскость на верхнюю и нижнюю полуплоскости и снабдим индексами "+" и "-" компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полуплоскостей. Тогда, сохранив все обозначения работы [1], поставленную задачу математически можно сформулировать в виде следующей граничной задачи:

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(+)}(x, +0) &= \sigma_y^{(-)}(x, -0) \\ \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) &= \tau_{xy}^{(-)}(x, -0) \quad (x \notin (-c, b)) \end{aligned} \quad (1.1a)$$

$$U_+(x, +0) = U_-(x, -0)$$

$$V_+(x, +0) = V_-(x, -0)$$

$$\begin{aligned} U_{\pm}(x, \pm 0) &= 0; & (0 < x < a) \\ V_{\pm}(x, \pm 0) &= \pm\delta/2; & (0 < x < a) \end{aligned} \quad (1.1b)$$

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, \pm 0) = 0; \quad (x \in L)$$

$$\tau_{xy}^{(\pm)}(x, \pm 0) = 0 \quad (x \in L)$$

Введя аналитические функции

$$\Omega_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-c}^b \frac{\chi(s) + k_j W'(s)}{s - z} ds; \quad \left(k_j = \frac{2(-1)^{j+1} c_1}{\alpha - 2(-1)^j a_1} \right); \quad (j=1,2) \quad (1.2)$$

и используя результаты работы [1], поставленную граничную задачу сформулируем в виде следующей однородной задачи Римана для двух функций:

$$\begin{cases} \Omega_1^+(x) = v_1(x) \Omega_2^-(x) \\ \Omega_2^+(x) = v_2(x) \Omega_1^-(x) \end{cases} \quad (-c < x < b) \quad (1.3)$$

где $\Omega_j^\pm(x)$ ($j=1,2$) – граничные значения аналитических функций $\Omega_j(z)$ соответственно на верхнем и нижнем берегах интервала $(-c, b)$, а функции $v_j(x)$ и постоянные a_1, c_1 и v даются формулами:

$$v_1(x) = \begin{cases} v & x \in L \\ -1 & (0 < x < a) \end{cases}; \quad v_2(x) = \begin{cases} 1/v & x \in L \\ -1 & (0 < x < a) \end{cases};$$

$$a_1 = \frac{(a_{12} - \sqrt{a_{11}a_{22}})}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)}; \quad c_1 = \frac{\mu_{12}(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)}{2\sqrt{a_{11}a_{22}}(\mu_1 + \mu_2)}; \quad v = \frac{\alpha - 2a_1}{\alpha + 2a_1}.$$

Функции же $W'(x)$ и $\chi(x)$ – комплексные комбинации производных от скачков смещений $U(x)$, $V(x)$ и скачков напряжений $\sigma(x)$, $\tau(x)$, записываются в следующем виде [1]:

$$W'(x) = U'(x) + i\alpha V'(x); \quad \chi(x) = \sigma(x) - i\alpha\tau(x);$$

$$\sigma_y^{(+)}(x, +0) - \sigma_y^{(-)}(x, -0) = \sigma(x); \quad \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) - \tau_{xy}^{(-)}(x, -0) = \tau(x);$$

$$U_+(x, +0) - U_-(x, -0) = U(x); \quad V_+(x, +0) - V_-(x, -0) = V(x);$$

$$(-c < x < b);$$

При этом постоянные a_{ij} связаны с физическими постоянными материала плоскости $E_1, E_2, \nu_{12}, \nu_{21}$ и μ_{12} формулами:

$$a_{11} = E_1 \left[\mu_{12} \left(1 - \nu_{12}^2 E_2 / E_1 \right) \right]^{-1}; \quad a_{22} = a_{11} E_2 / E_1; \quad a_{12} = \nu_{12} a_{22} = \nu_{21} a_{11}$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению краевой задачи Римана для функций $\Omega_j(x)$ ($j=1,2$). При этом должны быть удовлетворены

также условия непрерывности смещений в концевых точках разреза и условия самоуравновешанности нагрузок, приложенных к берегам разреза:

$$\int_{-c}^b W'(x) dx = 0; \quad \int_{-c}^b \chi(x) dx = 0 \quad (1.4)$$

Вместе с (1.4) справедливо также условие

$$\int_{-c}^0 W'(x) dx = \delta \quad (1.5)$$

2. Решение системы определяющих уравнений

Перейдём к решению краевой задачи Римана для функций (1.3) при условиях (1.4) и (1.5). Для этого заметим, что в рассматриваемом случае функции $\Omega_j(z)$ при больших значениях аргумента z имеют порядок z^{-2} . Действительно,

$$\Omega_j(z) = \frac{-1}{2\pi iz} \int_{-c}^b [\chi(s) + k_j W'(s)] ds + O(1/z^2) = O(1/z^2) + \dots \quad (j=1,2).$$

Исходя из этого, по формулам, приведённым в работе [3], запишем общее решение системы (1.3). Получим следующие выражения:

$$\Omega_j(z) = \frac{(-1)^{j+1} C e^{\frac{(-1)^{j+1}}{2} \Gamma(z)}}{\sqrt{z(z+c)(z-a)(z-b)}}; \quad (j=1,2) \quad (2.1)$$

где

$$\Gamma(z) = \ln v - \frac{\ln v^2 B(z)}{2\pi i} \int_0^a \frac{dt}{B^+(t)(t-z)}; \quad (B(z) = \sqrt{(z+c)(z-b)}), \quad (2.2)$$

а C – неизвестная постоянная, подлежащая определению.

Для определения постоянной C используем соотношение (1.5). Чтобы удовлетворить этому соотношению, определим комплексные комбинации скачков напряжений и смещений. Учитывая представления функций $\Omega_j(z)$ интегралом типа Коши, формулы Колосова-Мухелишвили [4] и систему (1.3), найдём

$$W'(x) = \frac{1}{k_1} \begin{cases} \Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x) & (x \in L) \\ 0 & (0 < x < a) \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\chi(x) = \begin{cases} \Omega_1^+(x) - \Omega_1^-(x) & (0 < x < a) \\ 0 & (x \in L) \end{cases} \quad (2.4)$$

С другой стороны, так как

$$\Gamma^\pm(x) = \ln v - \frac{\ln v^2 B^\pm(x)}{2\pi i} \int_0^a \frac{dt}{B^\pm(t)(t-z)} = \begin{cases} \ln v \mp 2p_1(x) & (x \in L) \\ \mp 2p_1(x) & (0 < x < a) \end{cases};$$

$$\Omega_1^\pm(x) = \begin{cases} \mp \frac{\sqrt{v} \exp(\mp p_1(x))}{i\sqrt{\omega(x)}}; & (-c < x < 0) \\ -\frac{\exp(\mp p_1(x))}{\sqrt{\omega(x)}}; & (0 < x < a) \\ \pm \frac{\exp(\mp p_1(x))}{i\sqrt{v\omega(x)}}; & (a < x < b) \end{cases}$$

где

$$p_1(x) = \frac{\ln v B^+(x)}{2\pi i} \int_0^a \frac{dt}{B^+(t)(t-z)} = \ln r^{\gamma}(x);$$

$$\omega(x) = \sqrt{|x(x+c)(x-a)(x-b)|};$$

$$r(x) = \frac{\left| x \left[(a-p)(p-x) + k^2 + \sqrt{l(x+c)(b-x)} \right] \right|}{(x-a) \left[px + bc + \sqrt{bc(x+c)(b-x)} \right]};$$

$$k = \frac{b+c}{2}; \quad p = \frac{b-c}{2}; \quad l = (a+c)(b-a); \quad \gamma = \frac{\ln v}{2\pi},$$

то по формулам (2.3) и (2.4) для комплексных комбинаций скачков напряжений и смещений получим выражения:

$$W'(x) = \frac{2iC\sqrt{v}}{k_1} \begin{cases} J(x) & (-c < x < 0) \\ 0 & (0 < x < a) \\ -J(x) & (a < x < b) \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\left(J(x) = \frac{\cos(\gamma \ln r(x))}{\sqrt{\omega(x)}} \right)$$

$$\chi(x) = \frac{2iC\sqrt{v} \sin(\gamma \ln r(x))}{\sqrt{\omega(x)}} \quad (0 < x < a) \quad (2.6)$$

Подставляя значение $\sqrt{W'(x)}$ из (2.5) в соотношение (1.5) для искомой постоянной C получим

$$C = \frac{\alpha k_1 \delta}{2\sqrt{v} I_0}; \quad \left(I_0 = \int_{-c}^0 J(x) dx \right).$$

Из формулы (2.6), учитывая симметричность задачи относительно оси Ox , можем записать

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(+)}(x, +0) &= \sigma_y^{(-)}(x, -0) \quad (0 < x < a) \\ \tau_{xy}^{(+)}(x, +0) &= -\tau_{xy}^{(-)}(x, -0) = -\frac{\delta k_1 \sin(\gamma \ln r(x))}{2I_0 \sqrt{v\omega(x)}} \quad (0 < x < a) \end{aligned}$$

Далее, для определения нормальных контактных напряжений используем формулу

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) - i\alpha \tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0) = \Omega_1^{\pm}(x) = -\frac{\alpha k_1 \delta}{2\sqrt{v} I_0} \frac{r^{\mp i\gamma}(x)}{\sqrt{\omega(x)}} \quad (0 < x < a),$$

которую несложно получить из соотношения (1.1.11) работы [1] при помощи системы (1.3). По этой формуле находим

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) = -\frac{\alpha k_1 \delta}{2\sqrt{v} I_0} J(x); \quad (0 < x < a). \quad (2.7)$$

Теперь определим скачок вертикальных смещений точек берегов разреза. С этой целью интегрируем соотношения (2.5). Тогда, для вертикальных смещений точек берегов разреза получим

$$V_+(x) = -V_-(x) = \frac{W(x)}{i\alpha} = \frac{\delta}{2} \begin{cases} \frac{1}{I_0} \int_{-c}^x J(x) dx & (-c < x < 0) \\ 1 & (0 < x < a) \\ 1 - \frac{1}{I_0} \int_a^x J(x) dx & (a < x < b) \end{cases}$$

Выясним, под какими одинаковыми сосредоточенными нагрузками P_0 штампы получают только вертикальные смещения и определим связь между ними и жёсткими смещениями штампов $\delta/2$. Для этого используем второе уравнение из (1.4). Учитывая симметричность задачи относительно оси Ox и разделяя действительную и мнимую части этого уравнения, получим

$$\int_0^a \tau_y^{(\pm)}(x, 0) dx = 0; \quad \int_0^a \sigma_y^{(\pm)}(x, 0) dx = -P_0.$$

Подставляя значения $\sigma_y^{(\pm)}(x, 0)$, из (2.7) найдём

$$P_0 = \frac{\alpha k_1 I_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0}; \quad \left(I_1 = \int_0^a J(x) dx \right).$$

Таким образом, штампы получают только нормальные смещения $\delta/2$ под воздействием одинаковых сосредоточенных нормальных нагрузок P_0 . Нетрудно также определить точки приложения x_0 этих нагрузок, записав уравнение равновесия моментов, действующих на штампы сил:

$$\int_0^a x \sigma_y^{(\pm)}(x, 0) dx = -x_0 P_0.$$

Отсюда для x_0 получим выражение

$$x_0 = \frac{\alpha k_1 I_2 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0 P_0}; \quad \left(I_2 = \int_0^a x J(x) dx \right).$$

Вычислим также коэффициенты интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$. С этой целью определим комплексную комбинацию напряжений на линии $y = 0$ вне разреза. Имеем [1]

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) - i\alpha \tau_{xy}^{(-)}(x, 0) = -\frac{b_1 k_2}{\alpha} [\Omega_1(x) - \nu \Omega_2(x)] \quad (b < x < -c)$$

$$\left(b_1 = \frac{(1 + \sqrt{a_{11} a_{22}})}{2\mu_{12} \sqrt{a_{11} a_{22}} (\mu_1 + \mu_2)} \right)$$

Учитывая, что вне разреза $(-c, b)$

$$\Omega_j(x) = \frac{(-1)^{j+1} C e^{\frac{(-1)^{j+1}}{2}\Gamma(x)}}{\sqrt{\omega(x)}} \quad (j = 1, 2),$$

где

$$\Gamma(x) = \ln v + \frac{\text{sign}(x)}{2\pi} \left\{ \sqrt{\frac{k + (a-p)q(x)}{|kq(x) + a - p|}} - \arcsin \frac{k - pq(x)}{|kq(x) - p|} \right\}; \quad (2.8)$$

$$\left(q(x) = \frac{p-x}{k}; \quad |q(x)| > 1 \right)$$

– действительная величина, можем записать:

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) = -\frac{b_1 k_2 C}{\alpha} \frac{[\exp(\Gamma(x)/2) - v \exp(-\Gamma(x)/2)]}{\sqrt{\omega(x)}} \quad (2.9)$$

$$\tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0) = 0 \quad (b \nless x < -c)$$

Тогда, для коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$ получим выражение

$$K_I(-c) = \sqrt{2\pi} \lim_{|x| \rightarrow -c-0} \sqrt{|c+x|} [\sigma_y^{\pm}(x, 0) - i\alpha \tau_{xy}^{\pm}(x, 0)] =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi} b_1 k_1 k_2 \delta}{I_0 \sqrt{c(a+c)(b+c)}} \quad (2.10)$$

$$K_I(b) = \sqrt{2\pi} \lim_{|x| \rightarrow b+0} \sqrt{x-b} [\sigma_y^{\pm}(x, 0) - i\alpha \tau_{xy}^{\pm}(x, 0)] =$$

$$= -\frac{\sqrt{2\pi} b_1 k_1 k_2 \delta}{I_0 \sqrt{b(b+c)(b-a)}}. \quad (2.11)$$

Отметим, что при выводе формул (2.10) и (2.11) было использовано значение интеграла [5]

$$\int_0^a \frac{dt}{\sqrt{(t+c)(b-t)(t-x)}} = \frac{\left\{ \arcsin \frac{k + (a-p)q(x)}{|kq(x) + a - p|} - \arcsin \frac{k - pq(x)}{|kq(x) - p|} \right\}}{\sqrt{|(x+c)(b-x)|}},$$

$$(b < x < -c)$$

и соотношения $\Gamma(-c) = \Gamma(b) = \ln v$.

Нетрудно убедиться, что в случае, когда задача симметрична относительно центра включения, т.е. когда $c = b - a$, то коэффициенты интенсивностей разрушающих напряжений в концевых точках разреза $x = -c$ и $x = b$ одинаковые

$$K_{\varphi}(-) = b_1(\delta) = -\frac{\sqrt{2\pi b_1 k_1 k_2} \delta}{I_0 \sqrt{b(2b-a)(b-a)}}.$$

Заметим также, что из полученных результатов при помощи предельного перехода легко определить решения аналогичной задачи для ортотропной плоскости с полубесконечным разрезом. Действительно, в полученных выражениях для раскрытия разреза, контактных напряжений и коэффициентов интенсивностей, устремляя b к бесконечности, найдём

$$V_+(x) = -V_-(x) = \frac{\delta}{2} \begin{cases} \int_{-c}^x \frac{\cos(\gamma \ln r_1(x)) dx}{I_0^* \sqrt{|x(x+c)(a-x)|}} & (-c < x < 0) \\ 1 & (0 < x < a) \\ 1 - \int_a^x \frac{\cos(\gamma \ln r_1(x))}{I_0^* \sqrt{|x(x+c)(a-x)|}} & (a < x < \infty) \end{cases};$$

$$\sigma_y^{(\pm)}(x, 0) = -\frac{\alpha k_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0^*} \frac{\cos(\gamma \ln r_1(x))}{\sqrt{|x(x+c)(a-x)|}}; \quad (0 < x < a)$$

$$\tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0) = \mp \frac{k_1 \delta}{2\sqrt{\nu} I_0^*} \frac{\sin(\gamma \ln r_1(x))}{\sqrt{|x(x+c)(a-x)|}} \quad (0 < x < a).$$

$$K_I(-c) = -\frac{\sqrt{2\pi b_1 k_1 k_2} \delta}{I_0^* \sqrt{c(a+c)}}.$$

Здесь введены обозначения:

$$r_1(x) = \left| \frac{x \left[a + x + 2c + 2\sqrt{(x+c)(a+c)} \right]}{(x-a) \left[x + 2c + 2\sqrt{c(x+c)} \right]} \right|; \quad I_0^* = \int_{-c}^0 \frac{\cos(\gamma \ln r_1(x)) dx}{\sqrt{|x(x+c)(a-x)|}}$$

Проведён численный анализ рассматриваемой задачи в случае изотропной плоскости, т.е. в случае, когда

$$a_{jj} = a_{12} + 2 = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}; \quad \mu_{12} = \frac{E}{2(1+\sigma)}; \quad a_j = -\frac{(1-2\sigma)}{4(1-\sigma)}; \quad b_j = \frac{(1+\sigma)(3-4\sigma)}{4E(1-\sigma)};$$

$$c_j = \frac{E}{4(1-\sigma^2)}; \quad \mu_j = \alpha = 1; \quad k_1 = \frac{E}{(1+\sigma)}; \quad \nu = 3-4\sigma; \quad (j=1, 2),$$

где σ и E – соответственно коэффициент Пуассона и модуль Юнга для изотропного тела.

Изучены закономерности изменения приведённых контактных напряжений $\sigma_*(x) = -c\sigma_y^+(x)/P_0$; $\tau_*(x) = c\tau_y^+(x)/P_0$, приведённой координаты точки

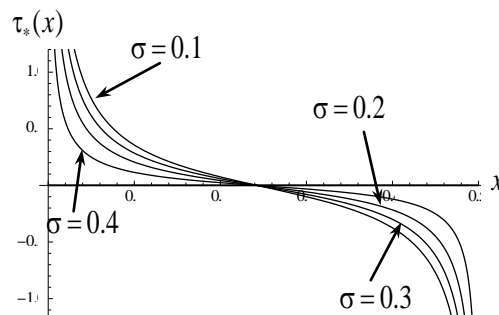
приложения сосредоточенной нагрузки $x_0^* = x_0 / c$ и приведённого максимального раскрытия разреза $\delta^* = \delta / 2c$ в зависимости от изменения коэффициента Пуассона и параметра $\beta = b / c$, когда $\alpha = a / c = 0,5$ и $P_0 / cE = 0,1$.

Результаты вычислений показывают, что распределение нормальных контактных напряжений и приведённая координата точки приложения сосредоточенной нагрузки x_0^* при фиксированном значении параметра β практически не зависят от коэффициента Пуассона. Касательные же контактные напряжения под включениями и приведённое максимальное раскрытие разреза δ^* при увеличении коэффициента Пуассона уменьшаются (табл.1, фиг.2).

Таблица 1

σ	0,1	0,2	0,3	0,4
δ^*	0,18677	0,18438	0,17788	0,16672

В то же время распределение нормальных и касательных контактных напряжений, а также приведённое максимальное раскрытие разреза δ^* при фиксированном значении коэффициента Пуассона также мало зависят от параметра β .



Фиг.2

Изменения приведённых координат точек приложений сосредоточенных нагрузок x_0^* при фиксированном значении коэффициента Пуассона $\sigma = 0,3$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

β	0,8	1,5	3	10	20	100
x_0^*	0,26829	0,25	0,24280	0,23857	0,23773	0,23707

Как видно из этой таблицы, в случае симметрии задачи относительно оси Oy , сосредоточенные нагрузки должны быть приложены к центральным точкам штампов. Когда же симметрия относительно оси Oy отсутствует, сосредоточенные нагрузки должны быть приложены правее центральных точек штампов, если $c > b - a$, и левее центральных точек штампов, если $c < b - a$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hakobyan V.N. Stress concentration near defects in homogeneous and compound bodies.-LAP LAMBERT Academic Publishing, Germany 2011, 148p.
2. Gevorkyan S.Kh., Manukyan E.H., Mkhitarian S.M and Mkrtchyan M.S. On a mixed problem for an elastic space with a crack under antiplane and plane deformations. // Collection of papers, dedicated to the memory of Professor P. S. Theocaris. Yerevan, «Gitutyun», NAS RA, 2005, pp. 114-124.
3. Черепанов Г.П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости. // ПММ. 1962. Т.26. Вып. 5. С.907-912.
4. Мухелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.708с.
5. Прудников А.П, Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды (специальные функции). М.: Наука, 1983. 750с.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – д.ф.-м.н., директор Института механики НАН Армении,

e-mail: vhakobyan@sci.am

Даштоян Лилит Леоновна – к.ф.-м.н., учёный секретарь Института механики НАН РА,

e-mail: Lilit_Dashtoyan@mechins.sci.am

Шагинян Славик С. – к.ф.-м.н., доцент кафедры “Математики и графики” Ванадзорского филиала ГИУА

Поступила в редакцию 28.03.2013