ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика

УДК 539.3:534.1

СВОБОДНЫЕ ИНТЕРФЕЙСНЫЕ И КРАЕВЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНСОЛЬНОЙ СОСТАВНОЙ БЕЗМОМЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПЕРЕМЕННОЙ КРИВИЗНЫ

Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Миклашевич И.А.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, интерфейсные колебания, краевые колебания.
Key words: cylindrical shell, interfacial vibrations, edge vibrations.

Ղուլղազարյան Գ.Ռ., Ղուլղազարյան Լ.Գ., Միկլաշեվիչ Ի.Ա.

Փոփոխական կորության բարձակային բաղադրյալ անմոմենտ գլանային թաղանթի սեփական ինտերֆեյս և եզրային տատանումներ

Հետազոտվում է փոփոխական կորության փակ գլանային թաղանթի սեփական ինտերֆեյս և եզրային տատանումները, որը բաղկացած է երկու վերջավոր օրթոտրոպ տարբեր առաձգականության գործակիցներ ունեցող անմոմենտ գլանային թաղանթներից: Ենթադրվում է, որ թաղանթի մի ծայրն ազատ է, իսկ մյուսը կոշտ ամրակցված:

Ghulghazaryan G.R., Ghulghazaryan L.G., Miklashevich I.A.

Free interfacial and edge vibrations of a contilever composed momentless cylindrical shell with variable curvature

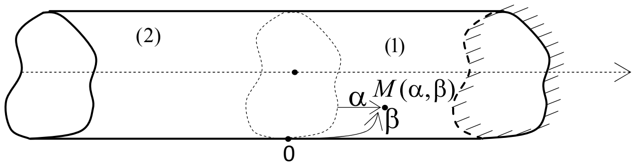
Free interfacial and edge vibrations of closed cylindrical shell composed of finite orthotropic momentless cylindrical shells with variable curvature and different elastic coefficients are studied. It is assumed that one end is free and the other is rigid-clamped.

Исследуются свободные интерфейсные и краевые колебания замкнутой цилиндрической оболочки переменной кривизны, составленной из конечных ортотропных безмоментных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что один торец оболочки свободный, а другой жёстко защемлён.

Введение. Исследования свободных колебаний составных оболочек занимают важное место в динамике деформируемого твёрдого тела. Это обусловлено как потребностями самой теории, так и практическими вопросами различных отраслей машиностроения, строительства, приборостроения, сейсморазведки и т.д. [1]. Во многих случаях объекты исследования представляют собой конечные тонкостенные составные цилиндрические оболочки с переменными кривизнами. Для таких оболочек большое значение приобретает изучение собственных колебаний, локализованных у свободных торцов оболочки – краевые колебания, и локализованных у границы раздела свойств материала – интерфейсные колебания. Начало исследования упругих поверхностных волн связано с работой Рэлея [2], в которой установлено существование упругих волн, распространяющихся вдоль свободной границы полупространства, с амплитудой, быстро убывающей с глубиной. Такие волны, возникающие в упругих телах различной геометрии, обычно называются поверхностными волнами типа Рэлея [3],[4],[5]. Вопрос существования собственных колебаний, затухающих от свободного торца безмоментной цилиндрической оболочки вдоль направления её образующих, изучены в [6,7-10].

Начало исследования собственных интерфейсных колебаний связаны с работами [11-12], в которых исследуются аналоги волн Стоунли [13]. В работе [11] изучаются поперечные колебания, бегущие по линии контакта двух полубесконечных пластин, и сосредоточенных вблизи неё. В работе [12] численно исследованы плоские интерфейсные колебания у границы раздела двух состыкованных полуполос с различными упругими свойствами. В работах [14,15], используя специальный асимптотический метод, изучены собственные интерфейсные колебания составных круговых цилиндрических оболочек [14] и оболочек вращения [15]. В настоящей работе изучаются собственные интерфейсные и краевые колебания безмоментной замкнутой цилиндрической оболочки, составленной из конечных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Предполагается, что один торец оболочки свободный, а другой жёстко защемлён. Получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот интерфейсных и краевых колебаний замкнутой составной безмоментной цилиндрической оболочки переменной кривизны. Установлена асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для составных пластин-полос. Установлена также асимптотическая связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и задач на интерфейсные колебания для полубесконечных цилиндрических оболочек с жёстко защемлённым торцом, для полубесконечных цилиндрических оболочек со свободным торцом и бесконечных составных цилиндрических оболочек. Полученные дисперсионные уравнения и асимптотические формулы этих дисперсионных уравнений могут служить механизмом для управления спектрами частот поставленных задач [16].

1. Постановка задачи и некоторые математические особенности. Рассматриваются собственные интерфейсные и краевые колебания составной замкнутой цилиндрической оболочки, составленной из конечных безмоментных ортотропных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами. Выбор системы координат и форма оболочки показаны на фиг. 1.



Фиг.1

Здесь α – текущая ориентированная длина образующей $-l^{(2)} < \alpha < l^{(1)}$, а $\alpha = 0$ соответствует границе раздела свойств материала. β – текущая длина дуги направляющей кривой $0 \le \beta \le s$, s – полная длина направляющей кривой. Предполагается, что квадрат кривизны направляющей кривой составной цилиндрической оболочки можно представить в виде следующего ряда Фурье:

$$R^{-2} = k^2 \left(\frac{r_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} r_m \cos km\beta \right) \quad 0 \le \beta \le s, \quad \sum_{m=1}^{\infty} | r_m | < +\infty \tag{1.1}$$

Здесь $k = 2\pi / s$, где s – полная длина направляющей кривой.

Замечание. В зависимости от кривизны направляющей кривой значения k относительно приведённой могут быть кратными.

При $\alpha = 0$ ставятся условия полного контакта. Все величины, относящиеся к правой оболочке ($0 \le \alpha \le l^{(1)}$), отмечаются верхним индексом (1), а к левой оболочке ($-l^{(2)} \le \alpha \le 0$) – индексом (2). В качестве исходных уравнений, описывающих колебания оболочки, используются уравнения, соответствующие безмоментной теории ортотропных цилиндрических оболочек [17]:

$$
\begin{aligned}
&-B_{11}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^r}{\partial\alpha^2}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\beta^2}-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}+B_{12}^{(r)}\frac{\partial w^{(r)}}{\partial\alpha}=\lambda^{(r)}u_1^{(r)}\\
&-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\alpha^2}-B_{22}^{(r)}\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\beta^2}+B_{22}^{(r)}\frac{\partial w^{(r)}}{\partial\alpha}=\lambda^{(r)}u_2^{(r)}\\
&-\frac{B_{12}^{(r)}}{R^2}\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\alpha}-\frac{B_{22}^{(r)}}{R^2}\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\beta}+\frac{B_{22}^{(r)}}{R^2}w^{(r)}=\lambda^{(r)}w^{(r)},\ w^{(r)}=\frac{u_3^{(r)}}{R}
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

Здесь $u_1^{(r)}, u_2^{(r)}, u_3^{(r)}$ $(r=1{,}2)$ – проекции вектора перемещения соответственно в направлениях α,β и нормали к поверхности оболочки: $R^{-1}=R^{-1}(\beta)$ – радиус кривизны направляющей кривой; $\lambda^{(r)}=\rho^{(r)}\omega^2$, где ω – угловая частота собственных колебаний, а $\rho^{(r)}(r=1,2)$ – плотности материалов; $B_{ij}^{(r)}(r=1{,}2)$ – коэффициенты упругости составляющих оболочек. Граничные условия имеют вид:

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=0}=T_1^{(2)}|_{\alpha=0},\quad S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0}=S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0},\quad u_1^{(1)}|_{\alpha=0}=u_1^{(2)}|_{\alpha=0},\quad u_2^{(1)}|_{\alpha=0}=u_2^{(2)}|_{\alpha=0} \tag{1.3}$$

$$u_1^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}}=0,\quad u_2^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}}=0 \tag{1.4}$$

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}\left(\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\beta}-\frac{u_3^{(2)}}{R}\right)\right|_{\alpha=-l^{(2)}}=0,\quad \left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=-l^{(2)}}=0 \tag{1.5}$$

$$u_i^{(r)}(\alpha,\beta)=u_i^{(r)}(\alpha,\beta+s),\quad i=1,2,3,\quad r=1,2 \tag{1.6}$$

где $T_1^{(r)}, S_{12}^{(r)}, r=1{,}2$ – тангенциальные силы:

$$T_1^{(r)}=hB_{11}^{(r)}\left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\left(\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\beta}-\frac{u_3^{(r)}}{R}\right)\right),\quad S_{12}^{(r)}=hB_{66}^{(r)}\left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\alpha}\right) \tag{1.7}$$

Соотношения (1.3) выражают условия полного контакта при $\alpha=0$, (1.4) – условия жёсткого защемления при $\alpha=l^{(1)}$, (1.5) – условия свободного края при $\alpha=-l^{(2)}$, (1.6) – условия периодичности колебаний (фиг. 1).

Заметим, что любые граничные задачи, порождённые системой уравнений (1.2) (с фиксированным индексом (r)) имеют участок непрерывного спектра, совпадающий с отрезком $0\le\lambda^{(r)}\le\lambda_0^{(r)}$ – множеством значений функции [10]

$$
\begin{aligned}
&\Omega^{(r)}(\beta,\theta^{(r)})=\\
&=\frac{B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta)\sin^4\theta^{(r)}}{B_{66}^{(r)}(B_{11}^{(r)}\sin^4\theta^{(r)}+B_{22}^{(r)}\cos^4\theta^{(r)})+(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2-2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)})\cos^2\theta^{(r)}\sin^2\theta^{(r)}}
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

$$0\le\beta\le s,\quad 0\le\theta^{(r)}\le 2\pi,\quad r=1,2$$

Отметим, что появление этих участков непрерывного спектра является результатом нарушения эллиптичности системы (1.2) по Дуглису-Ниренбергу и не связано с граничными условиями ([18], стр. 97).

Как известно, эллиптичности системы не достаточно для того, чтобы задача Дирихле была корректно поставлена даже в случае однородных систем [19-23]. Для существования нетривиальных решений задачи (1.2)-(1.6) следует дополнительно потребовать выполнение вдоль границы оболочки и линии раздела материала некоторое условие алгебраического характера. Это условие называется условием дополнительности (условием Шапиро-Лопатинского) [10,20-23].

Аналогичным образом, как в [21], доказывается, что условием Шапиро-Лопатинского на линии раздела свойств материала является условие:

$$\Omega(\beta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})=\frac{1}{S^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})S^{(2)}(\beta,\lambda^{(2)})}\times$$

$$\times\left\{\frac{B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)}-(B_{12}^{(1)})^2}{B_{66}^{(2)}}\lambda^{(1)}Q^{(2)}(\beta,\lambda^{(2)})+\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)}-(B_{12}^{(2)})^2}{B_{66}^{(1)}}\lambda^{(2)}Q^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})\right\}+ \tag{1.9}$$

$$(\gamma_1^{(1)}+\gamma_2^{(1)})(\gamma_1^{(2)}+\gamma_2^{(2)})(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}+\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)})-2\left(\gamma_1^{(1)}\gamma_2^{(1)}-\frac{\lambda^{(1)}B_{12}^{(1)}}{S^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})}\right)\left(\gamma_1^{(2)}\gamma_2^{(2)}-\frac{\lambda^{(2)}B_{12}^{(2)}}{S^{(2)}(\beta,\lambda^{(2)})}\right)\neq 0$$

$$Q^{(r)}(\beta,\lambda^{(r)})=B_{66}^{(r)}(\lambda^{(r)}-B_{22}^{(r)}R^{-2}(\beta))+\sqrt{B_{22}^{(r)}\lambda^{(r)}(B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)}-(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta))}$$

$$S^{(r)}(\beta,\lambda^{(r)})=B_{11}^{(r)}\lambda^{(r)}-(B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2)R^{-2}(\beta).$$

Заметим, что для граничных условий (1.4) условие Шапиро-Лопатинского вне отрезка $[0,\lambda_0^{(1)}/\rho^{(1)}]\cup[0,\lambda_0^{(2)}/\rho^{(2)}]$ имеет вид

$$Q^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})=B_{66}^{(1)}(\lambda^{(1)}-B_{22}^{(1)}R^{-2}(\beta))+\sqrt{B_{22}^{(1)}\lambda^{(1)}(B_{11}^{(1)}\lambda^{(1)}-(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)}-(B_{12}^{(1)})^2)R^{-2}(\beta))}\neq 0 \tag{1.10}$$

$$0\le\beta\le s$$

а для граничных условий (1.5),(1.6) оно выполнено. Этот факт доказывается аналогично, как в [10], [23]. Следовательно, условие Шапиро-Лопатинского для задач (1.2)-(1.6) , вне отрезка $[0,\lambda_0^{(1)}/\rho^{(1)}]\cup[0,\lambda_0^{(2)}/\rho^{(2)}]$, имеет вид

$$\left[\begin{array}{l}\Omega(\beta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})\neq 0,\ Q^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})\neq 0\quad 0\le\beta\le s\end{array}\right. \tag{1.11}$$

Множество значений ω^2, при которых $\Omega(\beta,\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})=0$ или $Q^{(1)}(\beta,\lambda^{(1)})=0$, обозначим через Ω, $Q^{(1)}$ соответственно.

Справедливо следующее утверждение: *вне множества* $\bigcup_{r=1}^{2}\Omega\cup Q^{(1)}\cup[0,\lambda_0^{(r)}/\rho^{(r)}]$ *спектр частот задачи (1.2)–(1.6) состоит из изолированных собственных частот конечной кратности* [18], [23].

2. Вывод и анализ дисперсионных уравнений. Решение системы (1.2) ищем в виде

$$u_1^{(r)}=\exp((-1)^r\chi^{(r)}k\alpha)(\sum_{m=1}^{\infty}u_m^{(r)}\sin km\beta),\ u_2^{(r)}=\exp((-1)^r\chi^{(r)}k\alpha)(\sum_{m=1}^{\infty}v_m^{(r)}\cos km\beta)$$

$$w^{(r)}=k\exp((-1)^r\chi^{(r)}k\alpha)(\sum_{m=1}^{\infty}w_m^{(r)}\sin km\beta),\ r=1,2 \tag{2.1}$$

При этом, условия (1.6) выполняются автоматически. Подставим выражения (2.1) в систему (1.2). Из первых двух уравнений (1.2), приравнивая соответствующие коэффициенты полученных тригонометрических рядов, получим

$$C_m^{(r)}u_m^{(r)}=(-1)^r\chi^{(r)}a_m^{(r)}w_m^{(r)},\quad C_m^{(r)}v_m^{(r)}=mb_m^{(r)}w_m^{(r)},\ r=1,2$$

$$a_m^{(r)}=\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\chi^{(r)})^2+\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}m^2+\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2,\ (\eta^{(r)})^2=\frac{\lambda^{(r)}}{k^2B_{66}^{(r)}}$$

$$b_m^{(r)}=\frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2-B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}(\chi^{(r)})^2-\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(m^2-(\eta^{(r)})^2) \tag{2.2}$$

$$C_m^{(r)} = (\chi^{(r)})^4 - \frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}} m^2 (\chi^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 (\chi^{(r)})^2 +$$

$$+ (m^2 - (\eta^{(r)})^2) \left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 \right), \quad m = \overline{1, +\infty}$$

Из третьего уравнения системы (1.2), учитывая соотношения (2.2) и правило умножения тригонометрических рядов ([24], стр. 592), придём к бесконечной системе уравнений

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r_{n-m} - r_{n+m}) A_n^{(r)} w_n^{(r)} - 2 \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} (\eta^{(r)})^2 w_m^{(r)} = 0, \ m = \overline{1, +\infty}, \ r = 1, 2 \qquad (2.3)$$

$$A_n^{(r)} = P_n^{(r)} / C_n^{(r)}, \ P_n^{(r)} = C_n^{(r)} + n^2 b_n^{(r)} - B_{12}^{(r)} / B_{22}^{(r)} (\chi^{(r)})^2 a_n^{(r)}, \ n = \overline{1, +\infty} \qquad (2.4)$$

Исходя из правила умножения тригонометрических рядов, условимся, что если $h > 0$, то $r_{-h} = r_h$. Так как в области определения $A_n^{(r)}$ имеем $A_n^{(r)} = O(1/n^2)$, следовательно, $\sum_{n=1}^{\infty} | A_n^{(r)} | < +\infty$. Учитывая также представление (1.1), получим

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} | A_n^{(r)} | (| r_{n+m} | + | r_{n-m} |) \leq 3(| r_0 | / 2 + \sum_{m=1}^{\infty} | r_m |)(\sum_{n=1}^{\infty} | A_n^{(r)} |) < +\infty \qquad (2.5)$$

Следовательно, бесконечный определитель системы (2.3) при $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$, $r = 1,2$ и в области определения коэффициентов (2.4) относится к известному классу сходящихся определителей – к нормальным определителям [25]. Чтобы системы (2.3) имели нетривиальные решения, необходимо и достаточно, чтобы их определители равнялись нулю

$$D^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1, ..., r_m, ...) = 0, \quad r = 1, 2 \qquad (2.6)$$

Предположим, что $\chi_1^{(r)}, \chi_2^{(r)}$ $(r = 1,2)$ – различные корни уравнения (2.6) с положительными действительными частями, тогда $\chi_3^{(1)} = -\chi_1^{(1)}, \chi_4^{(1)} = -\chi_2^{(1)}$ также являются различными корнями уравнения (2.6). Решения задачи (1.2)- (1.6) ищем в виде

$$u_1^{(r)} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k\alpha) u_{mj}^{(r)} \sin km\beta, u_2^{(r)} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k\alpha) v_{mj}^{(r)} \cos km\beta \qquad (2.7)$$

$$w^{(r)} = k \sum_{j=1}^{4} \sum_{m=1}^{\infty} \exp((-1)^r \chi_j^{(r)} k\alpha) w_{mj}^{(r)} \sin km\beta, \ r = 1, 2$$

Здесь $u_{mj}^{(r)}, v_{mj}^{(r)}$ – значения $u_m^{(r)}, v_m^{(r)}$, а $(w_{1j}^{(r)}, w_{2j}^{(r)}, ..., w_{mj}^{(r)}, ...)$ $j = 1,2$ – решения системы (2.3) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ $j = \overline{1,4}$, $r = 1, 2$ соответственно. Учитывая граничные условия (1.3)-(1.5) и соотношения (2.2), придём к совокупности систем уравнений

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{1j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{1j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{2j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{2j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{3j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} + \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{3j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{4j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} w_{mj}^{(1)} - \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{4j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} w_{mj}^{(2)} = 0 \qquad (2.8)$$

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{3j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} \exp(z_j^{(!)}) w_{mj}^{(1)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{4j}^{(1)}}{C_{mj}^{(1)}} \exp(z_j^{(1)}) w_{mj}^{(1)} = 0$$

$$\sum_{j=1}^{4} \frac{R_{1j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} \exp(z_j^{(2)}) w_{mj}^{(2)} = 0, \qquad \sum_{j=1}^{4} \frac{R_{2j}^{(2)}}{C_{mj}^{(2)}} \exp(z_j^{(2)}) w_{mj}^{(2)} = 0, \ m = \overline{1,+\infty}$$

$$R_{1j}^{(r)} = (\chi_j^{(r)})^2 a_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} m^2 b_{mj}^{(r)} - \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} c_{mj}^{(r)} \tag{2.9}$$

$$R_{2j}^{(r)} = \chi_j^{(r)} (a_{mj}^{(r)} + b_{mj}^{(r)}), \quad R_{3j}^{(r)} = \chi_j^{(r)} a_{mj}^{(r)}, \quad R_{4j}^{(r)} = b_{mj}^{(r)}$$

а $a_{mj}^{(r)}, b_{mj}^{(r)}, c_{mj}^{(r)}$ – значения $a_m^{(r)}, b_m^{(r)}, c_m^{(r)}$ из (2.2) при $\chi^{(r)} = \chi_j^{(r)}$ соответственно.

Чтобы совокупность систем уравнений (2.8) имела решение, достаточно чтобы совокупность уравнений

$$\Delta_m = \exp(-z_1^{(1)} - z_2^{(1)} - z_1^{(2)} - z_2^{(2)}) d_m = 0, \ m = \overline{1,+\infty} \tag{2.10}$$

$$d_m = \left\| \begin{array}{cccccccc} R_{11}^{(1)} & R_{12}^{(1)} & R_{11}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & R_{12}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & -cR_{11}^{(2)} & -cR_{12}^{(2)} & cR_{11}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & cR_{12}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} \\ R_{21}^{(1)} & R_{22}^{(1)} & -R_{21}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & -R_{22}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & dR_{21}^{(2)} & dR_{22}^{(2)} & dR_{21}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & dR_{22}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} \\ R_{31}^{(1)} & R_{32}^{(1)} & -R_{31}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & -R_{32}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & R_{31}^{(2)} & R_{32}^{(2)} & R_{31}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & R_{32}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} \\ R_{41}^{(1)} & R_{42}^{(1)} & R_{41}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & R_{42}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & -R_{41}^{(2)} & -R_{42}^{(2)} & R_{41}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & R_{42}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} \\ -R_{31}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & -R_{32}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & R_{31}^{(1)} & R_{32}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{41}^{(1)} e^{z_1^{(1)}} & R_{42}^{(1)} e^{z_2^{(1)}} & R_{41}^{(1)} & R_{42}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & cR_{11}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & cR_{12}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} & -cR_{11}^{(2)} & -cR_{12}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & dR_{21}^{(2)} e^{z_1^{(2)}} & dR_{22}^{(2)} e^{z_2^{(2)}} & dR_{21}^{(2)} & dR_{22}^{(2)} \end{array} \right\| \tag{2.11}$$

где $c = B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)}$, $d = B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)}$ вне множества $\bigcup_{r=1}^{2} \Omega \cup Q^{(1)} \cup [0, \lambda_0^{(r)} / \rho^{(r)}]$ имела ω^2 – решение. Численный анализ показывает, что определитель (2.11) становится малым, когда любые два корня уравнения (2.6) становятся близкими друг к другу. Это сильно усложняет расчеты и может привести к появлению ложных решений уравнений (2.10). Оказывается, множитель в (2.11), стремящийся к нулю при сближении корней, можно выделить.

Выполняя элементарные действия над столбцами определителя (2.11), получим

$$\Delta_m = m^{26} (x_2^{(1)} - x_1^{(1)})^2 (x_2^{(2)} - x_1^{(2)})^2 \exp(-z_1^{(1)} - z_2^{(1)} - z_1^{(2)} - z_2^{(2)}) \mathrm{Det} \left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} \tag{2.12}$$

$$m_{11} = R_{11}^{(1)}, \ m_{12} = \left(\frac{B_{11}^{(1)} B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2}{(B_{11}^{(1)})^2} - \frac{B_{12}^{(1)} B_{66}^{(1)}}{(B_{11}^{(1)})^2} (\eta_m^{(1)})^2 \right) (x_1^{(1)} + x_2^{(1)}), \ m_{13} = m_{11} \exp\left(z_1^{(1)}\right)$$

$$m_{14} = m_{12} \exp\left(z_2^{(1)}\right) + m_{11} [z_1^{(1)} z_2^{(1)}], \ m_{15} = -B_{11}^{(2)} / B_{11}^{(1)} R_{11}^{(2)}, \ z_j^{(r)} = -kmx_j^{(r)} l^{(r)}, \ j = 1,2; r = 1,2$$

$$m_{16} = -\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \left(\frac{B_{11}^{(2)} B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2}{(B_{11}^{(2)})^2} - \frac{B_{12}^{(2)} B_{66}^{(2)}}{(B_{11}^{(2)})^2} (\eta_m^{(2)})^2 \right) (x_1^{(2)} + x_2^{(2)})$$

$$m_{17} = -m_{15} \exp(z_1^{(2)}), \ m_{18} = -m_{16} \exp(z_2^{(2)}) - m_{15} [z_1^{(2)} z_2^{(2)}];$$

$$m_{21} = R_{21}^{(1)}, \ m_{22} = \frac{B_{11}^{(1)} B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2}{B_{11}^{(1)} B_{66}^{(1)}} ((x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(1)})^2 + x_1^{(1)} x_2^{(1)}) + \frac{B_{12}^{(1)} + B_{22}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} (\eta_m^{(1)})^2$$

$$m_{23} = -m_{21} \exp(z_1^{(1)}), \ m_{24} = -m_{22} \exp(z_2^{(1)}) - m_{21} [z_1^{(1)} z_2^{(1)}], \ m_{25} = B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)} R_{21}^{(2)}$$

$$m_{26} = \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \left(\frac{B_{11}^{(2)} B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2}{B_{11}^{(2)} B_{66}^{(2)}} ((x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(2)})^2 + x_1^{(2)} x_2^{(2)}) + \frac{B_{12}^{(2)} + B_{22}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} (\eta_m^{(2)})^2 \right) \tag{2.13}$$

$$m_{27} = m_{25} \exp(z_1^{(2)}), \ m_{28} = m_{26} \exp(z_2^{(2)}) + m_{25} [z_1^{(2)} z_2^{(2)}];$$

$$m_{31} = R_{31}^{(1)},\ m_{32} = \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}((x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(1)})^2 + x_1^{(1)} x_2^{(1)}) + \frac{B_{22}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}(\eta_m^{(1)})^2$$

$$m_{33} = -m_{31}\exp(z_1^{(1)}),\ m_{34} = -m_{32}\exp(z_2^{(1)}) - m_{31}[z_1^{(1)} z_2^{(1)}],\ m_{35} = R_{31}^{(2)}$$

$$m_{36} = \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}((x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(2)})^2 + x_1^{(2)} x_2^{(2)}) + \frac{B_{22}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} + \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}(\eta_m^{(2)})^2$$

$$m_{37} = m_{35}\exp(z_1^{(2)}),\ m_{38} = m_{36}\exp(z_2^{(2)}) + m_{35}[z_1^{(2)} z_2^{(2)}];$$

$$m_{41} = R_{41}^{(1)},\ m_{42} = \frac{B_{11}^{(1)} B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2 - B_{12}^{(1)} B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)} B_{66}^{(1)}}(x_1^{(1)} + x_2^{(1)})$$

$$m_{43} = m_{41}\exp(z_1^{(1)}),\ m_{44} = m_{42}\exp(z_2^{(1)}) + m_{41}[z_1^{(1)} z_2^{(1)}],\ m_{45} = -R_{41}^{(2)}$$

$$m_{46} = -\frac{B_{11}^{(2)} B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2 - B_{12}^{(2)} B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)} B_{66}^{(2)}}(x_1^{(2)} + x_2^{(2)})$$

$$m_{47} = -m_{45}\exp(z_1^{(2)}),\ m_{48} = -m_{46}\exp(z_2^{(2)}) - m_{45}[z_1^{(2)} z_2^{(2)}];$$

$$m_{51} = m_{33},\quad m_{52} = m_{34},\quad m_{53} = m_{31},\ m_{54} = m_{32},\ m_{5j} = 0,\ j = 5,6,7,8;$$

$$m_{61} = m_{43},\ m_{62} = m_{44},\ m_{63} = m_{41},\ m_{64} = m_{42},\ m_{6j} = 0, j = 5,6,7,8;$$

$$m_{7j} = 0,\ j = 1,2,3,4\ , m_{75} = m_{17},\quad m_{76} = m_{18},\quad m_{77} = m_{15},\ m_{78} = m_{16};$$

$$m_{8j} = 0,\ j = 1,2,3,4\ , m_{85} = m_{27},\quad m_{86} = m_{28},\quad m_{87} = m_{25},\ m_{88} = m_{26};$$

$$[z_1^{(r)} z_2^{(r)}] = -kml^{(r)}(\exp(z_1^{(r)}) - \exp(z_2^{(r)})) / (z_1^{(r)} - z_2^{(r)});\ \eta_m^{(r)} = \eta^{(r)} / m;$$

$$x_i^{(r)} = \chi_i^{(r)} / m;\ i, r = 1,2;$$

Уравнения (2.10) эквивалентны уравнениям

$$\operatorname{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = 0,\quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.14}$$

При $l^{(2)} \to \infty$ уравнения (2.14) принимают вид

$$\operatorname{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i,j=1}^{8} = \operatorname{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{ij=1}^{6}\ \operatorname{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i=7,8}^{j=7,8} + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(2)})) = 0,\quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.15}$$

Следовательно, при $l^{(2)} \to \infty$ уравнения (2.14) распадаются на уравнения

$$\operatorname{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{ij=1}^{6} = 0,\quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.16}$$

$$\begin{gathered}\operatorname{Det}\left\| m_{ij} \right\|_{i=7,8}^{j=7,8} = cdK_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = cd\ [\delta_1^{(2)}(x_1^{(2)})^2 (x_2^{(2)})^2 + \\ +\delta_2^{(2)} x_1^{(2)} x_2^{(2)} + \delta_3^{(2)}((x_1^{(2)})^2 + (x_2^{(2)})^2) + \delta_4^{(2)}] = 0,\ m = \overline{1,+\infty}\end{gathered} \tag{2.17}$$

$$\begin{gathered}\delta_1^{(2)} = \frac{B_{11}^{(2)} B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2}{(B_{11}^{(r)})^2}\left(\frac{B_{11}^{(2)} B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2}{B_{11}^{(2)} B_{66}^{(2)}} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}(\eta_m^{(2)})^2\right) \\ \delta_2^{(2)} = -(\eta_m^{(2)})^2\left(\frac{B_{22}^{(2)}(B_{11}^{(2)} B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2)}{(B_{11}^{(2)})^3} + \frac{B_{12}^{(2)}(B_{11}^{(2)} B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2 - B_{12}^{(2)} B_{66}^{(2)} - B_{22}^{(2)} B_{66}^{(2)})}{(B_{11}^{(2)})^3}(\eta_m^{(2)})^2\right) \\ \delta_3^{(2)} = \frac{B_{12}^{(2)}(B_{11}^{(2)} B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2)}{(B_{11}^{(2)})^3}(\eta_m^{(2)})^2\left(1 - (\eta_m^{(2)})^2\right),\ \delta_4^{(2)} = \frac{B_{12}^{(2)} B_{66}^{(2)}(B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})}{(B_{11}^{(2)})^3}(\eta_m^{(2)})^4\left(1 - (\eta_m^{(2)})^2\right).\end{gathered} \tag{2.18}$$

Уравнения (2.16) являются дисперсионными уравнениями интерфейсных коле-

баний замкнутой полубесконечной составной консольной цилиндрической оболочки с жёстко защемлённым торцом $\alpha = l^{(1)}$. Уравнения (2.17) являются обобщёнными дисперсионными уравнениями Рэлея для полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочки из материала (2) со свободным краем при $\alpha = -l^{(2)}$ (ср. [8-10]).
При $l^{(1)} \to \infty$ уравнения (2.16) принимают вид

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{6} = \mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=5,6}^{j=3,4} .\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.19}$$

Следовательно, при $l^{(1)} \to \infty$ уравнения (2.16) распадаются на уравнения

$$\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.20}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=5,6}^{j=3,4} = Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = \\ \gamma_1^{(1)}(x_1^{(1)})^2(x_2^{(1)})^2 + \gamma_2^{(1)} x_1^{(1)} x_2^{(1)} + \gamma_3^{(1)}((x_1^{(1)})^2 + (x_2^{(1)})^2) + \gamma_4^{(1)} = 0, \; m = \overline{1,+\infty}\end{gathered} \tag{2.21}$$

$$\begin{gathered}\gamma_1^{(1)} = \frac{B_{12}^{(1)}(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2 - B_{12}^{(1)}B_{66}^{(1)})}{(B_{11}^{(1)})^2 B_{66}^{(1)}} \\ \gamma_2^{(1)} = -(\eta_m^{(1)})^2\left(\frac{B_{22}^{(1)}(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2)}{(B_{11}^{(1)})^2 B_{66}^{(1)}} + \frac{B_{12}^{(1)}(B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2 - B_{12}^{(1)}B_{66}^{(1)} - B_{22}^{(1)}B_{66}^{(1)})}{(B_{11}^{(1)})^2 B_{66}^{(1)}}(\eta_m^{(1)})^2\right) \\ \gamma_3^{(1)} = -\frac{B_{12}^{(1)}B_{22}^{(1)}}{(B_{11}^{(1)})^2}\left(1 - (\eta_m^{(1)})^2\right), \quad \gamma_4^{(1)} = -\frac{B_{22}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\left(1 - (\eta_m^{(1)})^2\right)\left(\frac{B_{22}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} + \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}(\eta_m^{(1)})^2\right)\end{gathered} \tag{2.22}$$

Уравнения (2.20) являются дисперсионными уравнениями интерфейсных колебаний замкнутой бесконечной составной цилиндрической оболочки. Уравнения (2.21) появляются из-за того, что оболочка защемлена на торце $\alpha = l^{(1)}$.
Учитывая (2.15), (2.17),(2.19) и (2.21), уравнения (2.14) можно написать в виде

$$\begin{gathered}\mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) \mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \\ \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(2)})), \quad m = \overline{1,+\infty}\end{gathered} \tag{2.23}$$

Из (2.23) следует, что при больших $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ уравнения (2.14) распадаются на уравнения

$$Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}, x_1^{(1)}, x_2^{(1)}) = 0, \; K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)}) = 0, \; \mathrm{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} = 0, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{2.24}$$

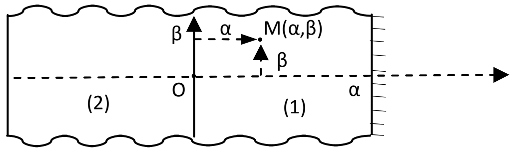
Таким образом, при больших $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$ колебательное движение конечной составной цилиндрической оболочки, когда один торец свободен, а другой жёстко защемлён, может разделиться на краевые колебания рэлеевского типа у торца $\alpha = -l^{(2)}$ оболочки и интерфейсные колебания у линии раздела $\alpha = 0$ материала оболочки. Отметим, что при больших m ω^2 – корни первого уравнения из (2.24), по-видимому, принадлежат зоне непрерывного спектра $Q^{(1)}$ [10].

В общем случае решение уравнения (2.6) представляет собой сложную задачу. Поэтому, для установления асимптотических формул для дисперсионных уравнений (2.14) рассмотрим следующие частные случаи.

3. Частные случаи. ***Случай а):*** $R^{-2}(\beta) \equiv 0$ ($r_m = 0$, $m = \overline{0,+\infty}$). В выражениях (1.2)-(1.6) всюду формально положим $R^{-1}(\beta) \equiv 0$, в итоге, получим систему уравнений малых планарных колебаний ортотропных пластин [26]

$$-B_{11}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\alpha^2}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\beta^2}-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}=\lambda^{(r)}u_1^{(r)}$$
$$-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})\frac{\partial^2 u_1^{(r)}}{\partial\alpha\partial\beta}-B_{66}^{(r)}\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\alpha^2}-B_{22}^{(r)}\frac{\partial^2 u_2^{(r)}}{\partial\beta^2}=\lambda^{(r)}u_2^{(r)} \quad (3.1)$$

Все величины, относящиеся к правой пластинке ($0\le\alpha<l^{(1)}$), отмечаются верхним индексом (1), к левой пластинке ($-l^{(2)}<\alpha\le 0$) – индексом (2). Предполагается, что $\alpha(-l^{(2)}<\alpha<l^{(1)})$ и $\beta(-\infty<\beta<\infty)$ являются прямолинейными ортогональными координатами точки срединной плоскости пластины-полосы (фиг. 2).



Фиг. 2

Аналогом граничных условий (1.3)-(1.6) и (1.7) являются

$$T_1^{(1)}|_{\alpha=0}=T_1^{(2)}|_{\alpha=0},\ S_{12}^{(1)}|_{\alpha=0}=S_{12}^{(2)}|_{\alpha=0},\ u_1^{(1)}|_{\alpha=0}=u_1^{(2)}|_{\alpha=0},\ u_2^{(1)}|_{\alpha=0}=u_2^{(2)}|_{\alpha=0} \quad (3.2)$$

$$u_1^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}}=0,\ u_2^{(1)}|_{\alpha=l^{(1)}}=0 \quad (3.3)$$

$$\left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\beta}\right|_{\alpha=-l^{(2)}}=0,\quad \left.\frac{\partial u_1^{(2)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2^{(2)}}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=-l^{(2)}}=0 \quad (3.4)$$

$$u_j^{(r)}(\alpha,\beta)=u_j^{(r)}(\alpha,\beta+s),r=1,2 \quad (3.5)$$

$$T_1^{(r)}=hB_{11}^{(r)}\left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\alpha}+\frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\beta}\right),\ S_{12}^{(r)}=hB_{66}^{(r)}\left(\frac{\partial u_1^{(r)}}{\partial\beta}+\frac{\partial u_2^{(r)}}{\partial\alpha}\right) \quad (3.6)$$

Решение системы (3.1) при фиксированном числе волн m ищем в виде:

$$u_1^{(r)}=u_m^{(r)}\sin km\beta\exp((-1)^r y^{(r)}km\alpha),\ u_2^{(r)}=v_m^{(r)}\cos km\beta\exp((-1)^r y^{(r)}km\alpha),r=1,2 \quad (3.7)$$

при $k=n_0 2\pi/s,\ n_0\in N$, где s – любое положительное число. При этом, условия (3.5) выполняются автоматически. Подставляя выражения (3.7) в систему (3.1), получим систему уравнений:

$$\left(B_{11}^{(r)}(y^{(r)})^2-B_{66}^{(r)}+\frac{\lambda^{(r)}}{m^2k^2}\right)u_m^{(r)}-(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})(-1)^r y^{(r)}v_m^{(r)}=0$$
$$(B_{12}^{(r)}+B_{66}^{(r)})(-1)^r y^{(r)}u_m^{(r)}+\left(B_{66}^{(r)}(y^{(r)})^2-B_{22}^{(r)}+\frac{\lambda^{(r)}}{m^2k^2}\right)v_m^{(r)}=0 \quad (3.8)$$

Приравнивая определитель системы (3.8) к нулю, получим характеристические уравнения

$$c_m^{(r)}=(y^{(r)})^4-\frac{B_{12}^{(r)}B_{22}^{(r)}-(B_{12}^{(r)})^2-2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}(y^{(r)})^2+\frac{B_{11}^{(r)}+B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta_m^{(r)})^2(y^{(r)})^2+$$
$$+(1-(\eta_m^{(r)})^2)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}-\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta_m^{(r)})^2\right)=0,\ m=\overline{1,+\infty} \quad (3.9)$$

$$(\eta^{(r)})^2 = \frac{\lambda^{(r)}}{k^2 B_{66}^{(r)}}, \quad \eta_m^{(r)} = \frac{\eta^{(r)}}{m}, \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{3.10}$$

Пусть $y_j^{(r)}$, $j = 1,2$ – различные корни уравнения (3.9) с положительными действительными частями, тогда $y_3^{(r)} = -y_1^{(r)}, y_4^{(r)} = -y_2^{(r)}$, $r = 1,2$ – различные корни уравнения (3.9). В качестве решения системы уравнений (3.8) можно принять

$$u_{mj}^{(r)} = (-1)^r y_j^{(r)} \frac{B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}, \quad v_{mj}^{(r)} = (y_j^{(r)})^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(1 - (\eta_m^{(r)})^2), \; j = \overline{1,4} \tag{3.11}$$

Решение задачи (3.1)-(3.5) ищем в виде

$$u_1^{(r)} = \sum_{j=1}^{4} u_{mj}^{(r)} w_j^{(r)} \exp((-1)^r y_j^{(r)} km\alpha) \sin km\beta \tag{3.12}$$

$$u_2^{(r)} = \sum_{j=1}^{4} v_{mj}^{(r)} w_j^{(r)} \exp((-1)^r y_j^{(r)} km\alpha) \cos km\beta, \; r = 1,2$$

Учитывая граничные условия (3.2)-(3.4), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{4} P_{1j}^{(1)} w_j^{(1)} - \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^{4} P_{1j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} P_{2j}^{(1)} w_j^{(1)} + \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^{4} P_{2j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0 \\
\sum_{j=1}^{4} P_{3j}^{(1)} w_j^{(1)} + \sum_{j=1}^{4} P_{3j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} P_{4j}^{(1)} w_j^{(1)} - \sum_{j=1}^{4} P_{4j}^{(2)} w_j^{(2)} = 0 \\
\sum_{j=1}^{4} P_{3j}^{(1)} \exp(z_j^{(1)}) w_j^{(1)} = 0, \quad \sum_{j=1}^{4} P_{4j}^{(1)} \exp(z_j^{(1)}) w_j^{(1)} = 0 \\
-\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} \sum_{j=1}^{4} P_{1j}^{(2)} \exp(z_j^{(2)}) w_j^{(2)} = 0, \quad \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}} \sum_{j=1}^{4} P_{2j}^{(2)} \exp(z_j^{(2)}) w_j^{(2)} = 0
\end{gathered} \tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}
P_{1j}^{(r)} = \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}((y_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(1 - (\eta_m^{(r)})^2)), \quad P_{2j}^{(r)} = y_j^{(r)}((y_j^{(r)})^2 + \frac{B_{12}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta_m^{(r)})^2) \\
P_{3j}^{(r)} = y_j^{(r)} \frac{B_{12}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}, \quad P_{4j}^{(r)} = (y_j^{(r)})^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(1 - (\eta_m^{(r)})^2)
\end{gathered} \tag{3.14}$$

Производя элементарные действия над столбцами определителя системы (3.13) и приравнивая к нулю, получим дисперсионные уравнения:

$$\Delta_m^* = (y_2^{(1)} - y_1^{(1)})^2 (y_2^{(2)} - y_1^{(2)})^2 \exp(-z_1^{(1)} - z_2^{(1)} - z_1^{(2)} - z_2^{(2)}) \mathrm{Det}\left\| m_{ij}^* \right\|_{ij=1}^{8} = 0, \; m = \overline{1,+\infty} \tag{3.15}$$

$$m_{11}^* = P_{11}^{(1)}, \; m_{12}^* = \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}\left(y_1^{(1)} + y_2^{(1)}\right), m_{13}^* = m_{11}^* \exp(z_1^{(1)})$$

$$m_{14}^* = m_{12}^* \exp(z_2^{(1)}) + m_{11}^*[z_1^{(1)} z_2^{(1)}], m_{15}^* = -\frac{B_{11}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}} P_{11}^{(2)}, \; m_{16}^* = -\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\left(y_1^{(2)} + y_2^{(2)}\right)$$

$$m_{17}^* = m_{15}^* \exp(z_1^{(2)}), \; m_{18}^* = m_{16}^* \exp(z_2^{(2)}) + m_{15}^*[z_1^{(2)} z_2^{(2)}]$$

$$m_{21}^* = P_{21}^{(1)},\ m_{22}^* = \frac{B_{11}^{(1)}B_{22}^{(1)} - (B_{12}^{(1)})^2 - B_{12}^{(1)}B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}B_{66}^{(1)}} - (\eta_m^{(1)})^2 + y_1^{(1)}y_2^{(1)},$$

$$m_{23}^* = -m_{21}^* \exp(z_1^{(1)}), m_{24}^* = -m_{22}^* \exp(z_2^{(1)}) - m_{21}^*[z_1^{(1)}z_2^{(1)}],\ m_{25}^* = \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}P_{21}^{(2)}$$

$$m_{26}^* = \frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\left(\frac{B_{11}^{(2)}B_{22}^{(2)} - (B_{12}^{(2)})^2 - B_{12}^{(2)}B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}B_{66}^{(2)}} - (\eta_m^{(2)})^2 + y_1^{(2)}y_2^{(2)}\right)$$

$$m_{27}^* = -m_{25}^* \exp(z_1^{(2)}),\ m_{28}^* = -m_{26}^* \exp(z_2^{(2)}) - m_{25}^*[z_1^{(2)}z_2^{(2)}]$$

$$m_{31}^* = P_{31}^{(1)},\ m_{32}^* = \frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}},\ m_{33}^* = -m_{31}^* \exp(z_1^{(1)})$$

$$m_{34}^* = -m_{32}^* \exp(z_2^{(1)}) - m_{31}^*[z_1^{(1)}z_2^{(1)}],\ m_{35}^* = P_{31}^{(2)},\ m_{36}^* = \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} \qquad (3.16)$$

$$m_{37}^* = -m_{35}^* \exp(z_1^{(2)}),\ m_{38}^* = -m_{36}^* \exp(z_2^{(2)}) - m_{35}^*[z_1^{(2)}z_2^{(2)}]$$

$$m_{41}^* = P_{41}^{(1)},\ m_{42}^* = \left(y_1^{(1)} + y_2^{(1)}\right),\ m_{43}^* = m_{41}^* \exp(z_1^{(1)})$$

$$m_{44}^* = m_{42}^* \exp(z_2^{(1)}) + m_{41}^*[z_1^{(1)}z_2^{(1)}],\ m_{45}^* = -P_{41}^{(2)},\ m_{46}^* = -\left(y_1^{(2)} + y_2^{(2)}\right)$$

$$m_{47}^* = m_{45}^* \exp(z_1^{(2)}),\ m_{48}^* = m_{46}^* \exp(z_2^{(2)}) + m_{45}^*[z_1^{(2)}z_2^{(2)}]$$

$$m_{51}^* = m_{33}^*,\ m_{52}^* = m_{34}^*,\ m_{53}^* = m_{31}^*,\ m_{54}^* = m_{32}^*,\ m_{5j}^* = 0,\ j = 5,6,7,8$$

$$m_{61}^* = m_{43}^*,\ m_{62}^* = m_{44}^*,\ m_{63}^* = m_{41}^*,\ m_{64}^* = m_{42}^*,\ m_{6j}^* = 0,\ j = 5,6,7,8$$

$$m_{7j}^* = 0,\ j = 1,2,3,4,\ m_{75}^* = m_{17}^*,\ m_{76}^* = m_{18}^*,\ m_{77}^* = m_{15}^*,\ m_{78}^* = m_{16}^*$$

$$m_{8j}^* = 0,\ j = 1,2,3,4,\ m_{85}^* = m_{27}^*,\ m_{86}^* = m_{28}^*,\ m_{87}^* = m_{25}^*,\ m_{88}^* = m_{26}^*$$

$$[z_1^{(r)}z_2^{(r)}] = -kml^{(r)}(\exp(z_1^{(r)}) - \exp(z_2^{(r)}))/(z_1^{(r)} - z_2^{(r)})$$

$$z_j^{(r)} = -y_j^{(r)}mkl^{(r)},\ j = 1,2; r = 1,2$$

Следовательно, дисперсионные уравнения (3.15) эквивалентны уравнениям

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{ij=1}^{8} = 0,\ m = \overline{1,+\infty} \qquad (3.17)$$

Уравнения (3.17) являются дисперсионными уравнениями для составных пластин-полос со свободным и жёстко защемлёнными краями. При $l^{(2)} \to \infty$ имеем асимптотическую формулу

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{ij=1}^{8} = \operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=7,8}^{j=7,8} .\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{ij=1}^{6} + \sum_{j=1}^{2} O(\exp z_j^{(2)}), \qquad m = \overline{1,+\infty} \qquad (3.18)$$

Следовательно, при $l^{(2)} \to \infty$ уравнения (3.17) распадаются на совокупность уравнений

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=7,8}^{j=7,8} = 0,\ m = \overline{1,+\infty};\ \operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{ij=1}^{6} = 0,\ m = \overline{1,+\infty} \qquad (3.19)$$

Первая совокупность уравнений из (3.19) является уравнениями Рэлея для полубесконечной пластины из материала (2) со свободным краем $\alpha = -l^{(2)}$. Вторая совокупность уравнений из (3.19) является дисперсионными уравнениями для полубесконечной составной пластины с жёстко защемлённым краем $\alpha = l^{(1)}$.

При $l^{(1)} \to \infty$ имеются асимптотические представления

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{ij=1}^{6} = \operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=5,6}^{j=3,4} .\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \sum_{j=1}^{2} O(\exp z_j^{(1)}), \quad m = \overline{1,+\infty} \tag{3.20}$$

Следовательно, при $l^{(2)} \to \infty$ и $l^{(1)} \to \infty$ уравнения (3.18) имеют асимптотические представления

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{ij=1}^{8} = \operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=5,6}^{j=3,4} .\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=7,8}^{j=7,8} .\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} + \tag{3.21}$$

$$+\sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, \qquad m = \overline{1,+\infty}$$

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=1,2,3,4}^{j=1,2,5,6} = -\frac{B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)})$$

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=5,6}^{j=3,4} = -\frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}), \quad \operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{i=7,8}^{j=7,8} = -dc\frac{\left(B_{66}^{(2)}\right)^2}{B_{11}^{(1)} B_{66}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}} K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)})$$

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = K_2^{(1)}(\eta_m^{(1)}) Q^{(2)}(\eta_m^{(2)}) + \left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\right)^2 K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) +$$

$$+\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{66}^{(1)}}\left[2\left(y_1^{(1)} y_2^{(1)} - \frac{B_{12}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}}(1-(\eta_m^{(1)})^2)\right)\left(y_1^{(2)} y_2^{(2)} - \frac{B_{12}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}(1-(\eta_m^{(2)})^2)\right) + \right. \tag{3.22}$$

$$\left. +(y_2^{(1)} + y_1^{(1)})(y_2^{(2)} + y_1^{(2)})((1-(\eta_m^{(2)})^2) y_1^{(1)} y_2^{(1)} + (1-(\eta_m^{(1)})^2) y_1^{(2)} y_2^{(2)})\right]$$

$$Q^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = y_1^{(r)} y_2^{(r)} + \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(1-(\eta_m^{(r)})^2), \; r = 1,2$$

$$K_2^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = (1-(\eta_m^{(r)})^2)\left(\frac{B_{12}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)} B_{66}^{(r)}} - (\eta_m^{(r)})^2\right) - (\eta_m^{(r)})^2 y_1^{(r)} y_2^{(r)}, \; r = 1,2$$

Учитывая (3.18), (3.20)-(3.22), для дисперсионных уравнений (3.17) получим асимптотические представления:

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}^*\right\|_{ij=1}^{8} = -\left(\frac{B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(1)}}\right)^2 \left(\frac{B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)}}{B_{11}^{(1)}} \frac{B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)}}{B_{11}^{(2)}}\right)^2 Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) + \tag{3.23}$$

$$\sum_{j=1}^{2} O(\exp z_j^{(1)}) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp z_j^{(2)}) = 0, \; m = \overline{1,+\infty}$$

Следовательно, при $l^{(1)} \to \infty$ и $l^{(2)} \to \infty$ дисперсионные уравнения задачи (3.1)-(3.5) распадаются на совокупность уравнений

$$Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) = 0, \; m = \overline{1,+\infty}; \; K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) = 0, m = \overline{1,+\infty}; \; L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0, \; m = \overline{1,+\infty} \tag{3.24}$$

Первая совокупность уравнений из (3.24) появляется из-за того, что край $\alpha = l^{(1)}$ пластинки жёстко защемлён. Вторая совокупность уравнений является уравнениями Рэлея для полубесконечных ортотропных пластин из материала (2) со свободным краем $\alpha = -l^{(2)}$ [8-10]. Третья совокупность уравнений из (3.24) является аналогом дисперсионных уравнений Стоунли для составных ортотропных бесконечных пластин [3], [4], [13], [21].

Таким образом, планарные колебательные движения составной пластины-полосы, когда один край свободен, а другой жёстко защемлён, могут разделяться на краевые колебания рэлеевского типа и интерфейсные колебания типа Стоунли.

Заметим, что в дисперсионных уравнениях $L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = 0,\ m = \overline{1,+\infty}$ коэффициенты упругости левой и правой пластин, и соответствующие корни характеристических уравнений (3.9) входят симметричным образом. Поэтому, например, если левая пластина (с верхним индексом (2)) более мягкая (т.е. $\rho^{(2)} / \rho^{(1)} << 1,\ B_{ij}^{(2)} / B_{ij}^{(1)} << 1,\ i, j = 1,2,6$) чем правая, то можно написать

$$L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) = Q^{(2)}(\eta_m^{(2)})\{K_2(\eta_m^{(1)}) + O(B_{66}^{(2)} / B_{66}^{(1)}) + O(\rho^{(2)} / \rho^{(1)})\} = 0 \qquad (3.25)$$

Следовательно, существование интерфейсных колебаний составной пластины зависит от существования краевого колебания правой полубесконечной пластины со свободным краем [9-10]: т.е. заведомо существуют интерфейсные колебания.

Если $B_{ij}^{(2)} / B_{ij}^{(1)} \approx 1,\ ij = 1,2,6;\ \rho^{(2)} / \rho^{(1)} \approx 1$, то мало шанса для существования интерфейсных колебаний.

Случай б): $R^{-2} = k^2 r_0 / 2\ (r_m = 0, m = \overline{1,+\infty})$, т.е. имеем безмоментную упругую круговую замкнутую составную цилиндрическую оболочку. В этом случае система (2.3) примет вид

$$\left(r_0 A_m^{(r)} - 2\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2\right) w_m^{(r)} = 0,\ m = \overline{1,+\infty},\ r = 1,2 \qquad (3.26)$$

Следовательно, уравнения (2.6) распадаются на две совокупности уравнений

$$r_{mm}^{(r)} = r_0 P_m^{(r)} - 2\frac{B_{66}^{(r)}}{B_{22}^{(r)}} C_m^{(r)} (\eta^{(r)})^2 = 0,\ m = \overline{1,+\infty},\ \ r = 1,2 \qquad (3.27)$$

или уравнений

$$\begin{gathered}\left((\eta^{(r)})^2 - \frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}\frac{r_0}{2}\right)(\chi^{(r)})^4 - (\eta^{(r)})^2\left(\frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}m^2 -\right. \\ \left. -\frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2 + \frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 + B_{22}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}\frac{r_0}{2}\right)(\chi^{(r)})^2 + \\ +(\eta^{(r)})^2(m^2 - (\eta^{(r)})^2)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2 + \frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}\frac{r_0}{2}\right) = 0,\ \ m = \overline{1,+\infty},\ \ r = 1,2\end{gathered} \qquad (3.28)$$

В этом случае, для нахождения безразмерных характеристик собственных частот $\eta^{(r)}\ (r = 1,2)$ в дисперсионных уравнениях (2.14) используются $x_1^{(r)} = \chi_1^{(r)} / m, x_2^{(r)} = \chi_2^{(r)} / m$ выражения, где $\chi_1^{(r)}$ и $\chi_2^{(r)}$ – корни уравнения (3.28) с положительными действительными частями. При $r_0 \to 0$ уравнения (3.28) преобразуются к виду:

$$\begin{gathered}(\chi^{(r)})^4 - \left(\frac{B_{11}^{(r)}B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - 2B_{12}^{(r)}B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}B_{66}^{(r)}}m^2 - \frac{B_{11}^{(r)} + B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2\right)(\chi^{(r)})^2 + \\ +(m^2 - (\eta^{(r)})^2)\left(\frac{B_{22}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}m^2 - \frac{B_{66}^{(r)}}{B_{11}^{(r)}}(\eta^{(r)})^2\right) = 0,\ m = \overline{1,+\infty},\ r = 1,2\end{gathered} \qquad (3.29)$$

Эти уравнения являются характеристическими уравнениями систем, моделирующих планарные колебания составной пластины-полосы ($k = n_0 2\pi / s$, $n_0 \in N$, где s – произвольное положительное число). Корни $\chi^{(r)} / m$ уравнения (3.29) с положительными действительными частями обозначим через $y_1^{(r)}, y_2^{(r)}$. Тогда, в этом случае для дисперсионных уравнений (2.14) справедливы следующие асимптотические представления:

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = \left(\frac{B_{11}^{(1)}}{B_{66}^{(1)}} \frac{B_{11}^{(2)}}{B_{66}^{(2)}} \frac{B_{11}^{(1)}}{(B_{12}^{(1)} + B_{66}^{(1)})} \frac{B_{11}^{(2)}}{(B_{12}^{(2)} + B_{66}^{(2)})} \right)^2 \times \tag{3.30}$$

$$\times \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) . N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 \operatorname{Det}\left\|m_{ij}^{*}\right\|_{ij=1}^{8} + O(r_0 / (2m^2)) = 0, \quad m = \overline{1, +\infty}$$

$$N^{(r)}(\eta_m^{(r)}) = \frac{B_{22}^{(r)}(B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(2)})^2)}{(B_{11}^{(r)})^3} + \frac{B_{12}^{(r)}(B_{11}^{(r)} B_{22}^{(r)} - (B_{12}^{(r)})^2 - B_{66}^{(r)} B_{12}^{(r)} - B_{66}^{(r)} B_{22}^{(r)})}{(B_{11}^{(r)})^3} (\eta_m^{(r)})^2 \tag{3.31}$$

Из уравнения (3.30) следует, что при $r_0 / m^2 \to 0$ уравнения (2.14) преобразуются в уравнения (3.17). Таким образом, уравнения (3.30) устанавливают асимптотическую связь между дисперсионными уравнениями рассматриваемой задачи и аналогичной задачи для составной пластины-полосы.

При $l^{(1)} \to \infty$ и $l^{(2)} \to \infty$, учитывая (3.18)-(3.20),(3.30), дисперсионные уравнения (2.14), в этом случае, можно написать в виде

$$\operatorname{Det}\left\|m_{ij}\right\|_{i,j=1}^{8} = \frac{\left(B_{11}^{(2)}\right)^2}{B_{11}^{(1)} B_{66}^{(1)}} \left(N^{(1)}(\eta_m^{(1)}) . N^{(2)}(\eta_m^{(2)}) \right)^2 Q^{(1)}(\eta_m^{(1)}) K_2^{(2)}(\eta_m^{(2)}) L(\eta_m^{(1)}, \eta_m^{(2)}) + \tag{3.32}$$

$$+ O\left(\frac{r_0}{2m^2} \right) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(1)})) + \sum_{j=1}^{2} O(\exp(z_j^{(2)})) = 0, \ m = \overline{1, +\infty}$$

Из (3.32) следует, что при $r_0 / m^2 \to 0$, $l^{(1)} \to \infty$ и $l^{(2)} \to \infty$ дисперсионные уравнения (3.32) распадаются на уравнения (3.24). Следовательно, при малых r_0 / m^2 и больших $l^{(1)}, l^{(2)}$ приближёнными значениями корней уравнения (3.32) являются корни уравнения (3.24) (табл. 1-2).

Случай в): $R^{-2} = k^2 (r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$, $r_m = 0$, $m = \overline{2, +\infty}$, т.е. имеем некруговую составную замкнутую цилиндрическую оболочку ($k = 2\pi / s$, где s – полная длина направляющей кривой). В этом случае системы уравнений (2.3) принимают вид:

$$r_1 P_{m-1}^{(r)} \omega_{m-1}^{(r)} + r_{mm}^{(r)} \omega_m^{(r)} + r_1 P_{m+1}^{(r)} \omega_{m+1}^{(r)} = 0, \ m = \overline{1, +\infty}, \ r = 1, 2 \tag{3.33}$$

$$\omega_m = w_m^{(r)} / c_m^{(r)}, \ r_{mm}^{(r)} = r_0 P_m^{(r)} - 2 B_{66}^{(r)} (\eta^{(r)})^2 C_m^{(r)} / B_{22}^{(r)} \tag{3.34}$$

Так как определители систем (3.33) относятся к нормальному типу, то для нахождения ненулевого решения приравняем их к нулю

$$D^{(r)}((\chi^{(r)})^2, (\eta^{(r)})^2, B_{11}^{(r)}, B_{22}^{(r)}, B_{12}^{(r)}, B_{66}^{(r)}, r_0, r_1) = 0, \ r = 1, 2 \tag{3.35}$$

Решения $(\chi^{(r)})^2$ уравнения (3.35) находятся аналогичным образом как в [6-9], [21].

Справедливо следующее утверждение: при фиксированном $m \ge 2$ и при $\lambda^{(r)} \notin [0, \lambda_0^{(r)}]$ уравнения (3.35) имеют формальные решения вида

$$(\chi_j^{(r)})^2 = (\chi_{mj}^{(r)})^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2 + \beta_{mj}^{(r)} r_1^4 + \dots, \ j = 1, 2, 3, 4; \ r = 1, 2 \tag{3.36}$$

где $\chi_{mj}^{(r)}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ – корни уравнения $r_{mm}^{(r)} = 0$ (т.е. уравнения (3.28)) и

$$\alpha_{mj}^{(r)} = \left. \frac{P_m^{(r)}(P_{m-1}^{(r)} r_{m+1\,m+1}^{(r)} + P_{m+1}^{(r)} r_{m-1\,m-1}^{(r)})}{r_{m-1\,m-1}^{(r)} r_{m+1\,m+1}^{(r)} r_{mm}^{(r)\prime}} \right|_{\chi^{(r)}=\chi_{mj}^{(r)}} \qquad j = 1,2,3,4 \;\; r = 1,2 \tag{3.37}$$

где $r_{mm}^{(r)\prime}$ – производная по $(\chi^{(r)})^2$.

Таким образом, в этом случае для нахождения коэффициентов затухания $k\chi_j^{(r)} / m$ $(j = 1,2)$ можно использовать приближённые формулы

$$\chi_j^{(r)} / m = ((\chi_{mj}^{(r)} / m)^2 + \alpha_{mj}^{(r)} r_1^2 / m^2)^{1/2}, \; (j = 1,2) \tag{3.38}$$

а для нахождения соответствующих характеристик собственных частот $\eta^{(r)} / m$ – уравнения (2.14).

4. Численные исследования. В табл. 1-2, используя дисперсионные уравнения (2.14), (3.17), приведены безразмерные характеристики собственных значений $\eta^{(1)} / m$ и характеристики коэффициентов затухания $\chi^{(r)} / m$ соответствующих форм в зависимости от m, a, b для замкнутых цилиндрических оболочек с направляющими

$$x = a\cos t, \; y = b\sin t, \; a = 2, b = 1.5; \; a = 2, b = 1. \tag{4.1}$$

В табл. 1,2 представлены результаты для вариантов 1,2,3 соответственно при $R^{-2} = k^2(r_0 / 2 + r_1 \cos k\beta)$; $R^{-2} = k^2 r_0 / 2$; $R^{-2} = 0$, применённые к замкнутым составным цилиндрическим оболочкам с направляющими (4.1), изготовленными из боропластика и бумаги с механическими параметрами [17], [27]:

Боропластик:

$$\rho^{(1)} = 2 \cdot 10^3 \, кг / м^3, E_1^{(1)} = 2.646 \cdot 10^{11} H / м^2, E_2^{(1)} = 1.323 \cdot 10^{10} H / м^2,$$

$$G^{(1)} = 9.604 \cdot 10^9 H / м^2, \;\; \nu_1^{(1)} = 0.2, \nu_2^{(1)} = 0.01, \tag{4.2}$$

Бумага:

$$\rho^{(2)} = 0.16 \, кг / м^3, E_1^{(2)} = 2.95281 \cdot 10^9 H / м^2, E_2^{(2)} = 2.2106 \cdot 10^9 H / м^2,$$

$$G^{(2)} = 9.77076 \cdot 10^8 H / м^2, \; \nu_1^{(2)} = \nu_2^{(2)} E_1^{(2)} / E_2^{(2)}, \nu_2^{(2)} = 0.23, \tag{4.3}$$

и геометрическими параметрами: в табл.1: $a = 2, b = 1.5, s = 5.52587$ (длина половины эллипса), $k = 4\pi / s$, $r_0 = 0.273895$, $r_1 = 0.033796$, $l^{(1)} = 5$, $l^{(2)} = 1.5$; $l^{(1)} = 1.5$, $l^{(2)} = 5$; в табл.2: $a = 2, b = 1, s = 4.84422$ (длина половины эллипса),

$k = 4\pi / s$, $r_0 = 0.407139$, $r_1 = 0.229356$, $l^{(1)} = 5, l^{(2)} = 1.5; l^{(1)} = 1.5, l^{(2)} = 5$.

В качестве коэффициентов затухания приведены значения следующих величин:

$$k\chi_0^{(1)} / m = \min\{k \operatorname{Re}\chi_1^{(1)} / m, k \operatorname{Re}\chi_2^{(1)} / m\}, \; k\chi_0^{(2)} / m = \pm\min\{k \operatorname{Re}\chi_1^{(2)} / m, k \operatorname{Re}\chi_2^{(2)} / m\} \tag{4.4}$$

В равенствах (4.4) знак плюс соответствует интерфейсным колебаниям у линии раздела материала оболочки: $\alpha = 0$, а знак минус – колебаниям рэлеевского типа у торца оболочки $\alpha = -l^{(2)}$. Отметим, что связь между $\eta^{(1)}$ и $\eta^{(2)}$ имеет вид

$$\eta^{(2)} = \frac{\rho^{(2)}}{\rho^{(1)}} \cdot \frac{B_{66}^{(1)}}{B_{66}^{(2)}} \eta^{(1)} \tag{4.5}$$

Таблица 1

$\ell^{(1)}/\ell^{(2)}$	m	Вариант 1			Вариант 2		
		$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
$5/1.5$	21	0.0554 iq	1.4818 -0.8460	0.99301in 32.6557e(2)	-0.0554 iq	1.4818 -0.8585	0.99301 in 32.5583 e(2)
	22	0.0664 iq	1.4960 -0.8463	0.98993 in 32.6542 e(2)	0.0677 iq	1.4944 -0.8463	0.98949 in 32.6542 e(2)
	23	0.0708 iq	1.5097 -0.8465	0.98852 in 32.6529 e(2)	0.0713 iq	1.5083 -0.8465	0.98835 in 32.6529 e(2)
	25	0.0750 iq	1.5351 -0.8526	0.98707 in 32.6063 e(2)	0.0752 iq	1.5538 -0.8526	0.98707 in 32.6063 e(2)
	30	0.0792 iq	1.5872 -0.8536	0.98559 in 32.5998 e(2)	0.0792 iq	1.5861 -0.8536	0.98559 in 32.5998 e(2)
	50	0.0838 iq	1.7021 -0.8596	0.98380 in 32.5594 e(2)	0.0827 iq	1.7016 -0.8590	0.98423 in 32.5594 e(2)
	100	0.0838 iq	1.7854 -0.8598	0.98380 in 32.5560 e(2)	0.0838 iq	1.7853 -0.8596	0.98380 in 32.5560 e(2)
	250	0.0841 iq	1.8187 -0.8598	0.98369 in 32.5548 e(2)	0.0841 iq	1.8187 -0.8598	0.98369 in 32.5548 e(2)
	m	Вариант 3	$k\chi_0^{(1)}/m$ =0.1163 $k\chi_0^{(1)}/m$ =iq		$k\chi_0^{(2)}/m$ =2.5225 $k\chi_0^{(2)}/m$ =-1.1877		$\eta^{(1)}/m$ =0.98367 in $\eta^{(1)}/m$ =32.5548 e(2)
$1.5/5$	21	0.0517 iq	1.4821 0.8383	0.99392 32.7147	0.0581 iq	1.4802 -0.8440	0.99232 in 32.6711 e(2)
	22	0.0646 iq	1.4961 -0.8411	0.99046 in 32.6940 e(2)	0.0661 iq	1.4946 -0.8465	0.99000 in 32.6522 e(2)
	23	0.0697 iq	1.6098 -0.8436	0.98888 in 32.6749 e(2)	0.0702 iq	1.5004 -0.8488	0.98870 in 32.6348 e(2)
	25	0.0745 iq	1.5351 -0.8481	0.98726 in 32.6413 e(2)	0.0746 iq	1.5339 -0.8529	0.98722 in 32.6045 e(2)
	30	0.0790 iq	1.5872 -0.8487	0.98563 in 32.6382 e(2)	0.0790 iq	1.5862 -0.8566	0.98563 in 32.5769 e(2)
	50	0.0827 iq	1.7021 -0.8587	0.98423 in 32.5769 e(2)	0.0827 iq	1.7016 -0.8596	0.98423 in 32.5553 e(2)
	100	0.0838 iq	1.7854 -0.8588	0.98380 in 32.5631 e(2)	0.0838 iq	1.7853 -0.8597	0.98380 in 32.5549 e(2)
	250	0.0841 iq	1.8187 -0.8598	0.98369 in 32.5548 e(2)	0.0841 iq	1.8187 -0.8598	0.98369 in 32.5548 e(2)

Вариант 3 ($1.5/5$)

m	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$	m	$k\chi_0^{(1)}/m$	$k\chi_0^{(2)}/m$	$\eta^{(1)}/m$
21	0.1161 iq	2.5225 -1.1877	0.98371 in 32.5548 e(2)	25	0.1163 iq	2.5225 -1.1877	0.98368 in 32.5548 e(2)
22	0.1162 iq	2.5225 -1.1877	0.98370 in 32.5548 e(2)	250	0.1163 iq	2.5225 -1.1877	0.98367 in 32.5548 e(2)

В таблицах 1-2 после характеристик собственных частот указан тип поверхностных волн: $e(r), r = 1,2$ – волны Рэлея у торца составляющей цилиндра индексом (r), in – интерфейсные колебания, через iq отмечены те коэффициенты затухания, которые чисто мнимые. Данные для вариантов 3 приведены для тех волновых чисел, которые отмечены в таблицах. Для малых волновых чисел они могут отличаться от приведённых. Здесь $s = 4$.

Таблица 2

$\ell^{(1)}/\ell^{(2)}$	m	Вариант 1			Вариант 2		
		$k\chi_0^{(1)}\ /\ m$	$k\chi_0^{(2)}\ /\ m$	$\eta^{(1)}\ /\ m$	$k\chi_0^{(1)}\ /\ m$	$k\chi_0^{(2)}\ /\ m$	$\eta^{(1)}\ /\ m$
$5/1.5$	25	0.0211 iq	1.7161 -0.9563	0.99923 in 32.7139 e(2)	0.0613 iq	1.6799 -0.9563	0.99342 in 32.7139 e(2)
	26	0.0480 iq	1.7288 -0.9606	0.99600 in 32.6861 e(2)	0.0728 iq	1.6936 -0.9606	0.99070 in 32.6861 e(2)
	27	0.0639 iq	1.7408 -0.9658	0.99285 in 32.6515 e(2)	0.0780 iq	1.7071 -0.9658	0.98929 in 32.6515 e(2)
	28	0.0731 iq	1.7524 -0.8584	0.99061 in 32.5615 e(2)	0.0812 iq	1.7200 -0.9783	0.98838 in 32.5601 e(2)
	30	0.0823 iq	1.7744 -0.9756	0.98807 in 32.5856 e(2)	0.0851 iq	1.7442 -0.9756	0.98723 in 32.9856 e(2)
	50	0.0936 iq	1.9132 -0.9764	0.98448 in 32.5806 e(2)	0.0934 iq	1.8965 -0.9767	0.98455 in 32.5806 e(2)
	100	0.0959 iq	2.0216 -0.9774	0.98385 in 32.5770 e(2)	0.0955 iq	2.0175 -0.9774	0.98386 in 32.5770 e(2)
	250	0.0959 iq	2.0709 -0.9804	0.98370 in 32.5574 e(2)	0.0959 iq	2.0707 -0.9804	0.98370 in 32.5574 e(2)
$1.5/5$	25	- iq	- -0.9652	- 32.6540 e(2)	0.0601 iq	1.67997 -0.9652	0.99368 in 32.6540 e(2)
	26	0.0455 iq	1.7289 -0.9672	0.99639 in 32.6412 e(2)	0.0723 iq	1.6937 -0.9672	0.99083 in 32.6412 e(2)
	27	0.0632 iq	1.7408 -0.9691	0.99301 in 32.6291 e(2)	0.0777 iq	1.7071 -0.9691	0.98937 in 32.6291 e(2)
	28	0.0728 iq	1.7524 -0.9796	0.99069 in 32.5574 e(2)	0.0811 iq	1.7201 -0.9796	0.98843 in 32.5574 e(2)
	30	0.0822 iq	1.7744 -0.9778	0.98810 in 32.5706 e(2)	0.0850 iq	1.7442 -0.9778	0.98726 in 32.5706 e(2)
	50	0.0936 iq	1.9132 -0.9780	0.98448 in 32.5652 e(2)	0.0934 iq	1.8965 -0.9790	0.98455 in 32.5652 e(2)
	100	0.0955 iq	2.0216 -0.9807	0.98385 in 32.5549 e(2)	0.0955 iq	2.0175 -0.9807	0.98386 in 32.5549 e(2)
	250	0.0959 iq	2.0709 -0.9807	0.98370 in 32.5548 e(2)	0.0959 iq	2.0707 -0.9807	0.98370 in 32.5548 e(2)

Заключение: В статье показано, что у линии раздела материалов составной безмоментной конечной цилиндрической оболочки с произвольной гладкой направляющей могут существовать колебания, затухающие от линии раздела материалов вдоль её образующих. Показано, что у свободного торца цилиндрической оболочки могут появляться волны типа Рэлея. Частоты собственных интерфейсных и краевых колебаний составной цилиндрической оболочки, составленной из конечных ортотропных безмоментных цилиндрических оболочек с разными упругими коэффициентами, определяются совокупностью уравнений (2.14). Для круговой цилиндрической оболочки коэффициенты затухания χ определяются совокупностью уравнений (3.28), а для пластины – уравнений (3.29). Частоты собственных интерфейсных колебаний для составной пластины-полосы определяются из совокупности уравнений (3.17). Существование интерфейсных и краевых колебаний зависит от кривизны направляющей кривой, коэффициентов упругости, плотностей материалов и длины конечных составляющих оболочек. При больших m или при малой кривизне направляющей кривой все характеристики собственных интерфейсных и краевых колебаний безмоментной замкнутой цилиндрической оболочки стремятся к характеристикам планарных интерфейсных и краевых колебаний пластины-полосы. Численный анализ показывает, что с увеличением квадрата кривизны направляющей кривой цилиндрической оболочки первые частоты интерфейсных и краевых колебаний появляются при более больших m с увеличением соответствующих частот, а процесс затухания зависит от свойств материалов и геометрических параметров.

Работа выполнена при поддержке гранта "БРФФИ–ГКН Арм. 2011" №Ф11АРМ-010 / 11РБ-007.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pietraszkiewicz W., Szymczak Cz. (Eds.) Shell Structures, Theory and Applications //Proceedings of the 8th International conference on shell structures (SSTA 2005).
2. Rayleigh J.W. On waves propagated along the plate surface of an elastic solids // Proc. London Math. Soc. 1885. 17. Pp.4-11.
3. Викторов И.А. Звуковые поверхностные волны в твердых телах.М.: Наука. 1981. 288с.
4. Гринченко В.Т., Мелешко В.В. Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова думка, 1981. 284с.
5. Piliposian G.T., Belubekyan M.V., Ghazaryan K.B. Lokalized bending waves in a transversely isotropic plate.// J. of Sound and Vibration 329 (2010) Pp.3596-3605.
6. Багдасарян Р.А., Белубекян М.В., Казарян К.Б. Волны типа Рэлея в полубесконечной замкнутой цилиндрической оболочке//Волновые задачи механики. Нижний Новгород. 1992. С.118-124.
7. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Колебания, локализованные у свободного края полубесконечной незамкнутой безмоментной цилиндрической оболочки //Акуст. Вісник АН Украины. 1999. Т.2. № 4. С.42-48.
8. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г. Волны типа Рэлея в полубесконечной гофрированной цилиндрической оболочке // Изв. РАН. МТТ. 2001. № 3. С.151-158.
9. Gulgazaryan G.R., Gulgazaryan L.G. Vibrations of a corrugated orthotropic cylindrical shells with free edges // Int. Appl. Mechanics. 2006. 42 (12). PP. 1398-1413.
10. Гулгазарян Г.Р. Колебания безмоментной консольной незамкнутой ортотропной цилиндрической оболочки переменной кривизны // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 1. С.84-99.
11. Зильбергейт А.С., Суслова И.Б. Контактные волны изгиба в тонких пластинках // Акуст. журнал. 1985. Т.29. № 2. С.186-191.
12. Гертман И.П., Лисицкий О.Н. Отражение и прохождение звуковых волн через границу раздела двух состыкованных упругих полуполос // Прикл. математика и механика. 1988. Т.52. № 6. С.1044-1048.
13. Stoneley R. The elastic waves at the interface of tho solids // Proc. Roy Soc. London A. 1924. V.106. Pp. 416-429.
14. Kaplunov J.D., Wilde M.V. free interfacial vibrations in cylindrical shells // J. Acoust. Soc. Am. June 2002. V.111 (6). Pp. 2692-2704.
15. Kaplunov J.D. and Wilde M.V. Edge and interfacial vibrations in elastic shells of revolution // ZAMP. 2000. Vol. 51. Pp. 530-549.
16. Ермоленко В.М. Влияние параметров ортотропии на спектр в задачах колебаний оболочек // ПМТФ. 1980. № 1. С.163-170.
17. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Гос.изд.физ.мат.лит, 1961. 384с.
18. Гольденвейзер А.Л., Лидский В.Б., Товстик П.Е. Свободные колебания тонких упругих оболочек. М.: Наука, 1979. 383с.
19. Лионс Ж.Л., Модженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971. 371с.
20. Солонников В.А. Об общих краевых задач для систем, эллиптических в смысле А.

Дуглиса-Л. Ниренберга// Изв. АН СССР. Математика. 1964. Т.28. №3. С.665-706.
21. Гулгазарян Г.Р., Гулгазарян Л.Г., Миклашевич И.А., Плетежов А.А., Хачанян А.А. Свободные интерфейсные колебания бесконечной безмоментной цилиндрической оболочки с произвольной направляющей// Вестник фонда фундаментальных исследований. 2012. № 1. С.59-80.
22. Лопатинский Я.Б. Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегралыным уравнениям // Укр. мат. ж. 1953. Т.5. № 2. С.123-151.
23. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б., Эскин Г.И. Спектр безмоментной системы в случае тонкой оболочки произвольного очертания // Сиб. мат. ж. 1973. Т.4. № 5. С. 978-986.
24. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.3. М.: Физматгиз, 1966. 656с.
25. Конторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа М.-Л.: Гостехиздат, 1952. 695с.
26. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин М.: Наука, 1967. 266с.
27. Гулгазарян Г.Р., Лидский В.Б. Плотность частот свободных колебаний тонкой анизотропной оболочки, составленной из анизотропных слоев // Изв. АН СССР. МТТ. 1982. № 3. С.171-174.

Сведения об авторах:

Гулгазарян Гурген Рубенович, профессор, доктор физ.-мат. наук
Армянский государственный педагогический университет имени Х. Абовяна.
Профессор кафедры мат. анализа и теории функций. Ул. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения.
Тел.: (+37410) 64-91-21, (+37491) 706700, **e-mail:** ghulgr@yahoo.com

Гулгазарян Лусине Гургеновна, доцент, кандидат физ.-мат. наук
Институт механики НАН Армении, старший научный сотрудник. Армянский государственный педагогический университет
имени Х. Абовяна. Доцент кафедры мат. анализа и теории функций.
Ул. Тигран Мец 17, 0010, Ереван, Армения.
Тел.: (+37410) 61-81-55, (+37491) 302554, **e-mail:** lusina@mail.ru

Миклашевич Игорь Александрович, доцент, доктор физ.-мат. наук
Беларусский национальный техический университет
220013 г. Минск, пр. Независимости, 65, Беларусь.
Заведущий лабораторией динамики систем и механики материалов
Тел.: (017) 247-24-30, 8(029)400-24-30, **e-mail:** miklashevich@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.11.2012