ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Асланян Н.С., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярный, ортотропный, термоупругость, тонкий, пластинка, математическая модель.
Key words: micropolar, orthotropic, thermoelasticity, thin, plate, mathematical model.

Ասլանյան Ն.Ս., Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար օրթոտրոպ բարակ սալերի ջերմաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելը

Աշխատանքում ասիմպտոտիկ ճիշտ վարկածների հիման վրա կառուցվում են միկրոպոլյար օրթոտրոպ բարակ սալերի ծռման և ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի ջերմաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելները:

Aslanyan N.S., Sargsyan S.H.

Mathematical model of thermoelasticity of micropolar orthotropic elastic thin plates

In the present paper on the basis of asymptotically confirmed hypotheses method mathematical models of thermoelasticity of bending and plane stress state of micropolar orthotropic elastic thin plates are constructed.

В работе на основе гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение, построены математические модели термоупругости задачи изгиба и обобщённого плоского напряжённого состояния микрополярных ортотропных тонких пластин.

Введение. Обзор исследований по общей теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек осуществлён в работах [1,2]. В работах [3-6] на основе качественных результатов асимптотического метода интегрирования трёхмерной краевой задачи микрополярной теории упругости в тонких областях сформулированы адекватные гипотезы и построены общие математические модели микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. В работе [7,8] асимптотическим методом изучена трёхмерная краевая задача микрополярной термоупругости. В данной работе развивается подход работ [3-6] на основе качественных сторон результата асимптотического метода [7,8], сформулированы соответствующие гипотезы и построена модель микрополярной термоупругости ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений. Отметим, что в работах [8,9] построена математическая модель термоупругости микрополярных упругих изотропных оболочек.

1. Постановка задачи. Рассмотрим микрополярную ортотропную упругую пластинку постоянной толщины $2h$, как тонкое трёхмерное тело. Оси α_1,α_2 криволинейной ортогональной системы координат отнесём к срединной плоскости пластинки, ось z будет перпендикулярна к срединной плоскости пластинки.

Будем исходить из основных уравнений трёхмерной несимметричной (микрополярной, моментной) теории статической термоупругости с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия [10]

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{11}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{21}\right)+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{22}=0,$$
$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{12}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{22}\right)+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{21}-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{11}=0,$$
$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{13}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{23}\right)+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}=0,\tag{1.1}$$
$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{11}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{21}\right)+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{12}-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{22}+\left(\sigma_{23}-\sigma_{32}\right)=0,$$
$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{12}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{22}\right)+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{21}-$$
$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{11}+\left(\sigma_{31}-\sigma_{13}\right)=0,$$
$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{13}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{23}\right)+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial z}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0.$$

Физические соотношения термоупругости [11]

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11}=a_{11}\sigma_{11}+a_{12}\sigma_{22}+a_{13}\sigma_{33}+\alpha_{1\Theta}\Theta, && \chi_{11}=b_{11}\mu_{11}+b_{12}\mu_{22}+b_{13}\mu_{33},\\
&\gamma_{22}=a_{12}\sigma_{11}+a_{22}\sigma_{22}+a_{23}\sigma_{33}+\alpha_{2\Theta}\Theta, && \chi_{22}=b_{12}\mu_{11}+b_{22}\mu_{22}+b_{23}\mu_{33},\\
&\gamma_{33}=a_{13}\sigma_{11}+a_{23}\sigma_{22}+a_{33}\sigma_{33}+\alpha_{3\Theta}\Theta, && \chi_{33}=b_{13}\mu_{11}+b_{23}\mu_{22}+b_{33}\mu_{33},\\
&\gamma_{23}=a_{44}\sigma_{23}+a_{45}\sigma_{32}, && \chi_{23}=b_{44}\mu_{23}+b_{45}\mu_{32},\\
&\gamma_{32}=a_{45}\sigma_{23}+a_{55}\sigma_{32}, && \chi_{32}=b_{45}\mu_{23}+b_{55}\mu_{32},\\
&\gamma_{31}=\tilde{a}_{55}\sigma_{31}+a_{56}\sigma_{13}, && \chi_{31}=\tilde{b}_{55}\mu_{31}+b_{56}\mu_{13},\\
&\gamma_{13}=a_{56}\sigma_{31}+a_{66}\sigma_{13}, && \chi_{13}=b_{56}\mu_{31}+b_{66}\mu_{13},\\
&\gamma_{12}=a_{77}\sigma_{12}+a_{78}\sigma_{21}, && \chi_{12}=b_{77}\mu_{12}+b_{78}\mu_{21},\\
&\gamma_{21}=a_{78}\sigma_{12}+a_{88}\sigma_{21}, && \chi_{21}=b_{78}\mu_{12}+b_{88}\mu_{21}.
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Геометрические соотношения [10]

$$\gamma_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_2\,,\quad \gamma_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_1\,,$$

$$\gamma_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_1-\omega_3\,,\gamma_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_2+\omega_3\,,$$

$$\gamma_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_1}+\omega_2\,,\quad \gamma_{31}=\frac{\partial V_1}{\partial z}-\omega_2\,,\quad \gamma_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial\alpha_2}-\omega_1\,,$$

$$\gamma_{32}=\frac{\partial V_2}{\partial z}+\omega_1\,,\qquad \gamma_{33}=\frac{\partial V_3}{\partial z}\,,\tag{1.3}$$

$$\chi_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\omega_2\,,\quad \chi_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\omega_1$$

$$\chi_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\omega_1\,,\quad \chi_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\omega_2\,,$$

$$\chi_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_1},\qquad \chi_{31}=\frac{\partial\omega_1}{\partial z},\qquad \chi_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\omega_3}{\partial\alpha_2},$$

$$\chi_{32}=\frac{\partial\omega_2}{\partial z},\qquad \chi_{33}=\frac{\partial\omega_3}{\partial z}.$$

Уравнение стационарной теплопроводности [10,12]

$$\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial\Theta}{\partial\alpha_2}\right)\right]+\frac{\partial^2\Theta}{\partial z^2}=0\tag{1.4}$$

(для простоты здесь не учитывается термоупругое рассеивание энергии).

Здесь, $\hat{\sigma},\hat{\mu}$ – тензоры силовых и моментных напряжений ; $\hat{\gamma},\hat{\chi}$ – тензоры деформаций и изгибов-кручений. $\vec{V},\vec{\omega}$ – соответственно векторы перемещения и независимого поворота; Θ – функция температуры, $\hat{a},\hat{b}$ – матрицы упругих постоянных, а $\alpha_{k\Theta}$ (k =1,2,3) – линейные коэффициенты температурного расширения микрополярного ортотропного материала пластинки; $H_1=A_1$, $H_2=A_2$ – коэффициенты Ламе криволинейной ортогональной системы координат α_1,α_2, расположенной в срединной плоскости пластинки.

К основным уравнениям микрополярной теории термоупругости (1.1)-(1.4) присоединим соответствующие граничные условия.

На лицевых плоскостях пластинки $z=\pm h$ примем граничные условия первой граничной задачи микрополярной теории упругости:

$$\sigma_{3i}=\pm p_i^{\pm},\ \sigma_{33}=\pm p_3^{\pm},\ \mu_{3i}=\pm m_i^{\pm},\ \mu_{33}=\pm m_3^{\pm}\tag{1.5}$$

На поверхности края пластинки $\sum$ в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, граничные условия записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Для температурного поля пластинки как на лицевых плоскостях $z = \pm h$, так и на поверхности края $\sum$, для определённости будем считать заданными значения температурной функции.
Отметим, что в случае

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = \frac{1}{E}, \qquad a_{45} = a_{56} = a_{78} = -\frac{\mu - \alpha}{4\mu\alpha}$$

$$a_{12} = a_{13} = a_{23} = -\frac{\nu}{E}, \qquad a_{44} = a_{55} = \tilde{a}_{55} = a_{66} = a_{77} = a_{88} = \frac{\mu + \alpha}{4\mu\alpha}$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = \frac{\beta + \gamma}{\gamma(3\beta + 2\gamma)}, \quad b_{45} = b_{56} = b_{78} = -\frac{\gamma - \varepsilon}{4\gamma\varepsilon}, \tag{1.6}$$

$$b_{12} = b_{13} = b_{23} = -\frac{\beta}{2\gamma(3\beta + 2\gamma)}, \; b_{44} = b_{55} = \tilde{b}_{55} = b_{66} = b_{77} = b_{88} = \frac{\gamma + \varepsilon}{4\gamma\varepsilon},$$

$$\alpha_{k\Theta} = \alpha_{\Theta} \quad (k = 1,2,3),$$

вместо (1.2) получим физические соотношения термоупругости микрополярного изотропного материала [10], а при

$$a_{45} = a_{56} = a_{78} = 0, \qquad \tilde{a}_{55} = a_{66}, \qquad a_{44} = a_{55}, \qquad a_{77} = a_{88},$$

$$b_{11} = b_{22} = b_{33} = b_{12} = b_{13} = b_{23} = b_{44} = b_{45} = b_{55} = \\ = \tilde{b}_{55} = b_{56} = b_{66} = b_{77} = b_{78} = b_{88} = 0 \tag{1.7}$$

получим физические соотношения термоупругости классического ортотропного материала [13].

Педположим, что толщина пластинки мала по сравнению с другими размерами пластинки в плане. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае общее термоупругое состояние тонкого трёхмерного тела, образующее пластинку, состоит из внутреннего состояния, охватывающего всю пластинку и пограничные слои, локализирующиеся вблизи поверхности края пластинки $\sum$. Построение общей прикладной –двумерной модели термоупругости микрополярных упругих тонких пластин тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить модель термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин на основе метода гипотез. Сами гипотезы будем формулировать на основе результата асимптотического анализа поставленной пространственной граничной задачи микрополярной теории термоупругости в тонкой трёхмерной области пластинки [7,8].

2. Исходные гипотезы. С учётом качественных результатов [7,8] асимптотического решения систем уравнений (1.1)-(1.7) с указанными выше граничными условиями и самого процесса асимптотического интегрирования этой граничной задачи, в основу предлагаемой ниже модели микрополярной термоупругости ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений можем принять следующие достаточно общие гипотезы [3-6]:

1) В качестве кинематической вводится предположение о линейном распределении компонентов векторов перемещения и независимого поворота по координате z следующего характера:

$$V_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2) + z\psi_i(\alpha_1,\alpha_2), \qquad V_3 = w(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (i=1,2), \tag{2.1}$$

$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1,\alpha_2), \quad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1,\alpha_2) + z\,\iota(\alpha_1,\alpha_2) \qquad (i=1,2), \tag{2.2}$$

где u_i, w –перемещения точек срединной плоскости по направлениям α_i и z; ψ_i – полные углы поворота нормального к срединной плоскости элемента вокруг оси α_i; Ω_i – свободные повороты точек трёхмерной пластинки вокруг осей α_i; Ω_3 – поворот точек срединной плоскости вокруг оси z, а ι – интенсивность поворота точек трёхмерной пластинки вокруг оси z.

Кинематическая гипотеза (2.1), (2.2) в работах [3–6] названа обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в теории микрополярных балок, пластин и оболочек.

К статическим относятся следующие гипотезы:

2) Силовое напряжение σ_{33} в обобщённом законе Гука (1.2) в формулах для γ_{ii} можно пренебрегать относительно силовых нормальных напряжений σ_{ii}; в обобщённом законе Гука (1.2) – в формулах для χ_{i3} $(i=1,2)$, моментное напряжение μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} $(i=1,2)$.

3) Для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем:

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(\alpha_1,\alpha_2) \quad (i=1,2), \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2) \tag{2.3}$$

После определения указанных величин, значения σ_{3i} и μ_{33} определим, соответственно, как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первых двух и шестого из (1.1) уравнений равновесия, для которых потребуем условия, чтобы усреднённые по толщине пластинки величины были равны нулю.

4) Для температурной функции Θ примем закон линейного изменения по толщине пластинки [7,8,12]:

$$\Theta = \Theta_0(\alpha_1,\alpha_2) + \frac{z}{2h}\Theta_1(\alpha_1,\alpha_2), \tag{2.4}$$

где $\Theta_0 = \dfrac{\Theta^+ + \Theta^-}{2}, \quad \Theta_1 = \Delta\Theta = \Theta^+ - \Theta^-$.

Принятые кинематические, статические гипотезы и гипотеза о распределении температурной функции по толщине пластинки позволяют задачу об определении пространственного напряжённо-деформированного состояния (НДС) микрополярной пластинки свести к двумерной задаче.

3.Определение компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений. Используя кинематическую гипотезу (2.1), (2.2) для компонентов тензора деформации $\hat{\gamma}$ и тензора изгибов-кручений $\hat{\chi}$, из (1.3) получим:

$$\begin{aligned} &\gamma_{11} = \Gamma_{11}(\alpha_1,\alpha_2) + zK_{11}(\alpha_1,\alpha_2), && \gamma_{12} = \Gamma_{12}(\alpha_1,\alpha_2) + zK_{12}(\alpha_1,\alpha_2), \\ &\gamma_{22} = \Gamma_{22}(\alpha_1,\alpha_2) + zK_{22}(\alpha_1,\alpha_2), && \gamma_{21} = \Gamma_{21}(\alpha_1,\alpha_2) + zK_{21}(\alpha_1,\alpha_2), \\ &\gamma_{13} = \Gamma_{13}(\alpha_1,\alpha_2), && \gamma_{31} = \Gamma_{31}(\alpha_1,\alpha_2), \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\gamma_{32} = \Gamma_{32}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \gamma_{23} = \Gamma_{23}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \gamma_{33} = 0,$$
$$\chi_{11} = k_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \chi_{12} = k_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \chi_{31} = 0,$$
$$\chi_{22} = k_{22}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \chi_{21} = k_{21}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad \chi_{32} = 0, \tag{3.2}$$
$$\chi_{33} = k_{33}(\alpha_1, \alpha_2),$$
$$\chi_{13} = k_{13}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + z l_{13}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{23} = k_{23}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + z l_{23}(\alpha_1, \alpha_2), \tag{3.3}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_2, \qquad \Gamma_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_1,$$
$$\Gamma_{12} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}u_1 - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}u_2 + \Omega_3, \tag{3.4}$$

$$\Gamma_{13} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \Omega_2, \qquad \Gamma_{23} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial \alpha_2} - \Omega_1,$$
$$\Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \qquad \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1. \tag{3.5}$$

$$K_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi_2, \qquad K_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\psi_1,$$
$$K_{12} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\psi_1 - \iota, \quad K_{21} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \psi_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\psi_2 + \iota, \tag{3.6}$$

$$k_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\Omega_2, \qquad k_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\Omega_1, \; k_{33} = \iota,$$
$$k_{12} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \Omega_2}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}\Omega_1, \qquad k_{21} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \Omega_1}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}\Omega_2, \tag{3.7}$$

$$k_{13} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_1}, \qquad k_{23} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \Omega_3}{\partial \alpha_2}, \tag{3.8}$$

$$l_{13} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \iota}{\partial \alpha_1}, \qquad l_{23} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial \iota}{\partial \alpha_2} \tag{3.9}$$

4. Определение компонентов тензоров силовых и моментных напряжений. Если иметь в виду физические соотношения (1.2), то на основе формул для деформаций, изгибов–кручений (3.1)-(3.3), имея в виду те же статические гипотезы 2)-4), для силовых и моментных напряжений получим:

$$\sigma_{11}=\left(\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{11}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{22}+\frac{a_{12}\alpha_{2\Theta}-a_{22}\alpha_{1\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Theta_0\right)+$$
$$+z\left(\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\mathrm{K}_{11}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\mathrm{K}_{22}+\frac{a_{12}\alpha_{2\Theta}-a_{22}\alpha_{1\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\frac{\Theta_1}{2h}\right),$$
$$\sigma_{22}=\left(\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Gamma_{11}+\frac{a_{12}\alpha_{1\Theta}-a_{11}\alpha_{2\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\Theta_0\right)+$$
$$+z\left(\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\mathrm{K}_{22}-\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\mathrm{K}_{11}+\frac{a_{12}\alpha_{1\Theta}-a_{11}\alpha_{2\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}\frac{\Theta_1}{2h}\right), \tag{4.1}$$

$$\sigma_{12}=\left(\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21}\right)+z\left(\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\mathrm{K}_{12}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\mathrm{K}_{21}\right)$$
$$\sigma_{21}=\left(\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{21}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\Gamma_{12}\right)+z\left(\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\mathrm{K}_{21}-\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}\mathrm{K}_{12}\right),$$
$$\sigma_{13}=\frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{13}-\frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{31},$$
$$\sigma_{23}=\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{23}-\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{32},$$
$$\overset{0}{\sigma}_{31}=\frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{31}-\frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}\Gamma_{13}, \tag{4.2}$$
$$\overset{0}{\sigma}_{32}=\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{32}-\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}\Gamma_{23},$$
$$\sigma_{31}=\overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1,\alpha_2)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{z^2}{2}\right)\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{1}{\sigma}_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{1}{\sigma}_{21}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{\sigma}_{12}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{\sigma}_{22}\right]-z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{21}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\sigma}_{12}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\sigma}_{22}\right],$$
$$\sigma_{32}=\overset{0}{\sigma}_{32}(\alpha_1,\alpha_2)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{z^2}{2}\right)\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{1}{\sigma}_{12}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{1}{\sigma}_{22}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{1}{\sigma}_{21}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{1}{\sigma}_{11}\right]-z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{0}{\sigma}_{12}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{0}{\sigma}_{22}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\overset{0}{\sigma}_{21}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\overset{0}{\sigma}_{11}\right], \tag{4.3}$$

$$\sigma_{33} = -z\left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\sigma_{13}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\sigma_{23}\right)\right)+\overset{0}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=$$

$$= z\frac{p_3^{+}+p_3^{-}}{2h}+\frac{p_3^{+}-p_3^{-}}{2}$$

$$\mu_{11} = \frac{\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{11}-\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{22}+\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{33},$$

$$\mu_{22} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{13} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{22}-\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{23} \\ b_{13} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{11}-\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13} \\ b_{12} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{33}, \qquad (4.4)$$

$$\overset{0}{\mu}_{33} = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{33}+\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{11}-\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{13} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{22}, \Delta_b = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} \\ b_{13} & b_{23} & b_{33}\end{vmatrix}$$

$$\mu_{12} = \frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{12}-\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{21},$$

$$\mu_{21} = \frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{21}-\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{12}, \qquad (4.5)$$

$$\mu_{13} = \frac{1}{b_{66}}k_{13}+z\frac{1}{b_{66}}l_{13}, \qquad \mu_{23} = \frac{1}{b_{44}}k_{23}+z\frac{1}{b_{44}}l_{23},$$

$$\mu_{31} = -z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\mu_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\mu_{21}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\mu_{12}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\mu_{22}+\left(\sigma_{23}-\overset{0}{\sigma}_{32}\right)\right]+\overset{0}{\mu}_{31}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=z\frac{m_1^{+}+m_1^{-}}{2h}+\frac{m_1^{+}-m_1^{-}}{2} \qquad (4.6)$$

$$\mu_{32} = -z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\mu_{12}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\mu_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\mu_{21}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\mu_{11}+\left(\overset{0}{\sigma}_{31}-\sigma_{13}\right)\right]+\overset{0}{\mu}_{32}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=z\frac{m_2^{+}+m_2^{-}}{2h}+\frac{m_2^{+}-m_2^{-}}{2}$$

$$\mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{z^2}{2}\right)\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{1}{\mu}_{13}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{1}{\mu}_{23}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\overset{1}{\sigma}_{12}-\overset{1}{\sigma}_{21}\right)\right]-z\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\overset{0}{\mu}_{13}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\overset{0}{\mu}_{23}\right)+\left(\overset{0}{\sigma}_{12}-\overset{0}{\sigma}_{21}\right)\right] \qquad (4.7)$$

Здесь $\overset{0}{\sigma}_{11},\overset{0}{\sigma}_{22},\overset{0}{\sigma}_{12},\overset{0}{\sigma}_{21},\overset{0}{\mu}_{13},\overset{0}{\mu}_{23}-$ постоянная часть, а $\overset{1}{\sigma}_{11},\overset{1}{\sigma}_{22},\overset{1}{\sigma}_{12},\overset{1}{\sigma}_{21},\overset{1}{\mu}_{13},\overset{1}{\mu}_{23}-$ линейная часть от поперечной координаты z в соотношениях (4.1) и (4.5) соответственно.

5.Усреднённые усилия, моменты и гипермоменты. С целью приведения трёхмерной задачи микрополярной термоупругости для тонкой пластинки к двумерной, что уже выполнено для деформаций, изгибов–кручений, силовых и моментных напряжений, вводим статически эквивалентные им интегральные по толщине пластинки характеристики – усилия, моменты и гипермоменты [4-6]:

$$T_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dz, \quad T_{22} = \int_{-h}^{h} \sigma_{22} dz, \quad S_{12} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dz, \quad S_{21} = \int_{-h}^{h} \sigma_{21} dz \tag{5.1}$$

$$N_{13} = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dz, \quad N_{23} = \int_{-h}^{h} \sigma_{23} dz, \quad N_{31} = \int_{-h}^{h} \sigma_{31} dz, \quad N_{32} = \int_{-h}^{h} \sigma_{32} dz \tag{5.2}$$

$$M_{11} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{11} dz, \quad M_{22} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{22} dz, \quad M_{12} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{12} dz, \quad M_{21} = \int_{-h}^{h} z\sigma_{21} dz \tag{5.3}$$

$$L_{11} = \int_{-h}^{h} \mu_{11} dz, \quad L_{22} = \int_{-h}^{h} \mu_{22} dz, \quad L_{12} = \int_{-h}^{h} \mu_{12} dz, \quad L_{21} = \int_{-h}^{h} \mu_{21} dz \tag{5.4}$$

$$L_{33} = \int_{-h}^{h} \mu_{33} dz, \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13} dz, \quad L_{23} = \int_{-h}^{h} \mu_{23} dz \tag{5.5}$$

$$\Lambda_{13} = \int_{-h}^{h} z\mu_{13} dz, \quad \Lambda_{23} = \int_{-h}^{h} z\mu_{23} dz. \tag{5.6}$$

6. Основные уравнения и граничные условия прикладных теорий изгиба и обобщённого плоского напряжённого состояния термоупругости микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Уравнения равновесия в двумерном случае получим из равенств, определяющих силовые напряжения $\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}$ и моментные напряжения $\mu_{31}, \mu_{32}, \mu_{33}$, в результате удовлетворения статическим граничным условиям (1.5) на лицевых плоскостях пластинки $z = \pm h$. Отметим, что система двумерных уравнений равновесия распадается на две отдельные системы – для задачи изгиба и обобщённого плоского напряжённого состояния.

Физические соотношения термоупругости получим на основании формул (5.1)-(5.6) для усреднённых усилий, моментов и гипермоментов с использованием соответствующих формул (4.1)-(4.7) для силовых и моментных напряжений.

Основная система уравнений задачи термоупругого изгиба микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(A_2 N_{13}\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(A_1 N_{23}\right) = -\left(p_3^+ + p_3^-\right)$$

$$N_{31}-\left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2M_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1M_{21}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{12}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{22}\right)=$$
$$=h\left(p_1^+-p_1^-\right)$$

$$N_{32}-\left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2M_{12}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1M_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}M_{21}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}M_{11}\right)=$$
$$=h\left(p_2^+-p_2^-\right)$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2L_{11}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1L_{21}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}L_{12}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}L_{22}+ \qquad (6.1)$$
$$+\left(N_{23}-N_{32}\right)=-\left(m_1^++m_1^-\right)$$
$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2L_{12}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1L_{22}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}L_{21}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}L_{11}+$$
$$+\left(N_{31}-N_{13}\right)=-\left(m_2^++m_2^-\right)$$
$$L_{33}-\left(\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2\Lambda_{13}\right)+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1\Lambda_{23}\right)+(M_{12}-M_{21})\right)=h\left(m_3^+-m_3^-\right).$$

Физические соотношения термоупругости

$$N_{13}=\tilde{C}_{55}\Gamma_{13}+C_{56}\Gamma_{31}, \qquad N_{31}=C_{66}\Gamma_{31}+C_{56}\Gamma_{13},$$
$$N_{23}=C_{55}\Gamma_{23}+C_{45}\Gamma_{32}, \qquad N_{32}=C_{44}\Gamma_{32}+C_{45}\Gamma_{23},$$
$$M_{11}=D_{11}K_{11}+D_{12}K_{22}+M_{1\Theta}, \qquad M_{1\Theta}=D_{1\Theta}\frac{\Delta\Theta}{2h},$$
$$M_{22}=D_{22}K_{22}+D_{12}K_{11}+M_{2\Theta}, \qquad M_{2\Theta}=D_{2\Theta}\frac{\Delta\Theta}{2h}, \qquad (6.2)$$
$$M_{12}=D_{88}K_{12}+D_{78}K_{21}, \qquad M_{21}=D_{77}K_{21}+D_{78}K_{12},$$
$$L_{11}=d_{11}k_{11}+d_{12}k_{22}+d_{13}k_{33}, \qquad L_{12}=d_{88}k_{12}+d_{78}k_{21},$$
$$L_{22}=d_{22}k_{22}+d_{21}k_{11}+d_{23}k_{33}, \qquad L_{21}=d_{77}k_{21}+d_{78}k_{12},$$
$$L_{33}=d_{33}k_{33}+d_{31}k_{11}+d_{32}k_{22}, \qquad \Lambda_{13}=\lambda_{66}l_{13}, \quad \Lambda_{23}=\lambda_{44}l_{23}.$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\Omega_2, \qquad \Gamma_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\Omega_1,$$
$$\Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2, \qquad \Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1,$$
$$K_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_2, \qquad K_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_1,$$

$$K_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\psi_1-\iota,\qquad K_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\psi_2+\iota,\qquad(6.3)$$

$$k_{11}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2,\qquad k_{22}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_1,\quad k_{33}=\iota,$$

$$k_{12}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1,\qquad k_{21}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2,$$

$$l_{13}=\frac{1}{A_1}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_1},\qquad l_{23}=\frac{1}{A_2}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_2},$$

здесь

$$\tilde{C}_{55}=2h\frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},\quad C_{66}=2h\frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},\quad C_{56}=-2h\frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2},$$

$$C_{55}=2h\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\quad C_{44}=2h\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2},\quad C_{45}=-2h\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}$$

$$D_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\quad D_{22}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\quad D_{12}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

$$D_{77}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\quad D_{88}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},\quad D_{78}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2},$$

$$D_{1\Theta}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}\alpha_{2\Theta}-a_{22}\alpha_{1\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},\quad D_{2\Theta}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}\alpha_{1\Theta}-a_{11}\alpha_{2\Theta}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2},$$

$$d_{11}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{22}&b_{23}\\b_{23}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\quad d_{12}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}\\b_{23}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\quad d_{13}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{13}\\b_{22}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}\qquad(6.4)$$

$$d_{22}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\b_{13}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\quad d_{21}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{23}\\b_{13}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\quad d_{23}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\b_{12}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}$$

$$d_{33}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{12}&b_{22}\end{vmatrix}}{\Delta_b},\quad d_{31}=2h\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{22}\\b_{13}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta},\quad d_{32}=-2h\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{13}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}$$

$$d_{88}=2h\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\quad d_{77}=2h\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\quad d_{78}=-2h\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}$$

$$\lambda_{66}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{66}},\quad \lambda_{44}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{44}}.$$

К системе уравнений (6.1)-(6.3) присоединим граничные условия (при $\alpha_1=\mathrm{const}$) [5,6]:

$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^* \;;\; M_{12} = M_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*,$$
$$N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*; \qquad (6.5)$$
$$L_{12} = L_{12}^* \text{ или } k_{12} = k_{12}^* \;;\; \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*.$$

Система уравнений (6.1)-(6.4) и граничные условия (6.5) представляют собой математическую модель термоупругой изгибной деформации микрополярных ортотропных тонких пластин.

Отметим, что в случае (1.6) вместо (6.2), (6.4) получим физические соотношения термоупругости изгибной деформации пластинки для микрополярного изотропного материала, в случае (1.7) получим физические соотношения термоупругости изгиба пластин в классическом случае [13-15] для ортотропного материала, когда учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Основная система уравнений обобщённого плоского напряжённого состояния термоупругости микрополярных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения равновесия

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2T_{11}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1S_{21}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}S_{12} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}T_{22} = -\left(p_1^+ + p_1^-\right),$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2S_{12}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1T_{22}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}S_{21} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}T_{11} = -\left(p_2^+ + p_2^-\right), \qquad (6.6)$$

$$\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(A_2L_{13}\right) + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(A_1L_{23}\right) + S_{12} - S_{21} = -\left(m_3^+ + m_3^-\right).$$

Физические соотношения термоупругости

$$T_{11} = C_{11}\Gamma_{11} + C_{12}\Gamma_{22} + T_{1\Theta},\ \mathrm{T}_{1\Theta} = C_{1\Theta}\Theta_0,\quad T_{22} = C_{22}\Gamma_{22} + C_{12}\Gamma_{11} + T_{2\Theta},\ \mathrm{T}_{2\Theta} = C_{2\Theta}\Theta_0$$
$$S_{12} = C_{88}\Gamma_{12} + C_{78}\Gamma_{21},\qquad S_{21} = C_{77}\Gamma_{21} + C_{78}\Gamma_{12}, \qquad (6.7)$$
$$L_{12} = d_{66}k_{13}\qquad L_{23} = d_{44}k_{23}.$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_2,\qquad \Gamma_{22} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_1,$$
$$\Gamma_{12} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}u_1 - \Omega_3,\qquad \Gamma_{21} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2} - \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}u_2 + \Omega_3, \qquad (6.8)$$
$$k_{13} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_1},\qquad k_{23} = \frac{1}{A_2}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_2},$$

здесь

$$C_{11} = 2h\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},\qquad C_{22} = 2h\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},\quad C_{12} = -2h\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2},$$

$$C_{77} = 2h\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2}\ , \quad C_{78} = -2h\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2}\ , \ C_{88} = 2h\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2}\ ,$$

$$C_{1\Theta} = 2h\frac{a_{12}\alpha_{2\Theta} - a_{22}\alpha_{1\Theta}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\ , \ C_{2\Theta} = 2h\frac{a_{12}\alpha_{1\Theta} - a_{11}\alpha_{2\Theta}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}\ , \tag{6.9}$$

$$d_{66} = 2h\frac{1}{b_{66}}\ , \quad d_{44} = 2h\frac{1}{b_{44}}\ ,$$

К системе уравнений (6.5)-(6.7) присоединим следующие усреднённые граничные условия $(\alpha_1 = \text{const})$ [5,6]:

$$T_{11} = T_{11}^* \ \text{или}\ u_1 = u_1^*\ ;\ S_{12} = S_{12}^* \ \text{или}\ u_2 = u_2^*;\ L_{13} = L_{13}^* \ \text{или}\ k_{13} = k_{13}^*. \tag{6.10}$$

Система уравнений (6.6)-(6.9) и граничные условия (6.10) представляют собой математическую модель обобщённого плоского напряжённого состояния термоупругости микрополярных тонких пластин.

Отметим, что в случае (1.6) вместо (6.7), (6.9) получим физические соотношения термоупругости обобщённого плоского напряжённого состояния для изотропного материала, а в случае (1.7) – физические соотношения термоупругости классического случая для ортотропного материала [16].

Заключение. Основные результаты работы: 1) построена математическая модель изгибной термоупругой деформации микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений; 2) построена математическая модель термоупругости обобщёного плоского напряжённого состояния микрополярных ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

В дальнейшем на основе построенных прикладных моделей будут изучаться некоторые конкретные задачи термоупругого деформирования микрополярных пластин.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армения в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2. С.84-95.
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. A. 2009. “On generalized Cosserat-tape theories of plates and shells: a short review and bibliography”. // Arch. Mech. (Special Issue) DOI 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
3. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars // Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
4. Саркисян С.О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жёсткостных характеристик //Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып.2. С.148-156.
5. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells// Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011.Vol.15. P.91-100.
6. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.

7. Варданян С.А., Саркисян С.О. Асимптотический анализ уравнений и граничных условий термоупругости микрополярных тонких пластин. // Изв.НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. № 3. С.64-77.
8. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Thermoelasticiti of Micropolar Elastic Thin Shells // 9 th International Congress on Thermal Stresses 2011, June 5-9, Budapest. Budapest University of Technology and Economics and Hungarian Academy of Sciences.
9. Саркисян С.О. Термоупругость микрополярных тонких оболочек //В сб. научных трудов международной конференции: «Актуальные проблемы механики сплошной среды», посв. 100-летию со дня рождения академика Нагуша Арутюняна. 08-12 октября 2012, Цахкадзор, Армения. Т.2. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2012. С.184-188.
10. Nowacki W. Couple-Stresses in the Theory of Thermoelasticity // Irreversible Aspects of Continuum Mechanics and Transfer of Physical Characteristics in Moving Fluids// IUTAM Symposia.Vienna, 1966. Editors H.Parkus, L.I.Sedov.Springer-Verlag.Wien;New York.1966.P.259-278.
11. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders // ZAMM. 1974.V.54. №12. P.773-779.
12. Боли Б., Уэйнер Дм. Теория температурных напряжений. М.: Изд-во «Мир», 1964. 518с.
13. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально- изотропных пластин. Киев: «Наукова думка», 1977. 183с.
14. Швец П.Н., Лунь Е.И. Некоторые вопросы теории термоупругости ортотропных оболочек с учётом инерции вращения и поперечного сдвига //Прикладная механика. 1971. Т.7. №10. С.121-125.
15. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. Киев: «Наукова думка», 1981. 544с.
16. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 364с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович,
Член-коор. НАН Армении, доктор физ-мат наук, профессор, зав. кафедрой мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М.Налбандяна**.**
Тел.: (093)151698
E-mail: slusin@yahoo.com

Асланян Наира Самвеловна – аспирант кафедры мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М.Налбандяна**.**
Тел.: (055)73-57-24
E-mail: asnaira73@mail.ru

Поступилп в редакцию 19.10.2012