

**ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ  
ВЕСОМОГО УПРУГОГО ЦИЛИНДРА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ**

**Торосян В.С.**

**Ключевые слова:** однородный упругий цилиндр, собственный вес, осесимметричная деформация, совокупность бесконечных систем, численный эксперимент.

**Key words:** homogenous elastic cylinder, own weight, axissymmetric deformation, set of infinite systems, numerical experiment.

**Թորոսյան Վ. Ս.**

**Վերջավոր երկարությամբ կշիռ ունեցող հոծ առաձգական գլանի կոնտակտային խնդրի թվային-անալիտիկ լուծումը**

Դիտարկված է սեփական կշռի ազդեցության տակ վերջավոր երկարությամբ հոծ առաձգական գլանի առանցքաախմետրիկ դեֆորմացիայի խնդիրը: Անալիտիկ լուծումը կառուցվել է Ֆուրյեի և Ֆուրյե-Դինիի երկու շարքերի գումարի տեսքով: Այնուհետև, բավարարելով եզրային պայմանները, խնդրի լուծումը բերվել է զծային հանրաշվական անվերջ հավասարումների համախմբի: Կատարվել է թվային հաշվարկ: Ստացված թվային արդյունքների հիման վրա կատարվել է թվային վերլուծություն:

**Torosyan V.S.**

**Numerical and analytical solution of the contact problem for an elastic heavy cylinder  
of finite length**

Axis-symmetric problem for a solid elastic cylinder of finite length is considered. The cylinder is deformed under its own weight. There are no displacements on the lower edge of the cylinder and no stresses on the upper edge and the lateral surface of the cylinder.

В предлагаемой работе рассматривается осесимметричная задача для сплошного упругого цилиндра конечной длины, деформирующегося под действием собственного веса, когда на нижнем торце цилиндра отсутствуют перемещения, а на другом торце и на боковой поверхности отсутствуют напряжения.

Решение задачи приведено к совокупности бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Приведён численный анализ.

Осесимметричная задача для сплошного упругого цилиндра конечной длины, находящегося под действием собственного веса, когда цилиндр закреплён своей боковой поверхностью, а основания цилиндра свободны от напряжений, решена в [1]. Аналогичная задача для конечного цилиндра, когда граничные условия заданы напряжениями, рассматривалась в работе [2]. Другие осесимметричные задачи для конечных цилиндров, когда на одном или двух торцах заданы перемещения, а на остальных поверхностях – напряжения или, когда перемещения заданы на боковой

поверхности, а на торцах – напряжения при отсутствии гравитационного поля, рассматривались в [3-7].

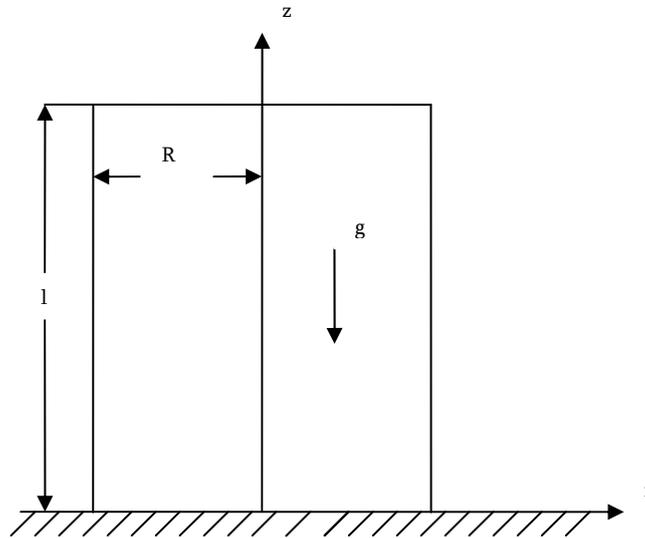
1. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат для случая осевой симметрии при наличии объемных сил в перемещениях имеют вид:

$$\nabla^2 u_r + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\rho R}{G} = 0 \quad (1.1) \quad \nabla^2 u_z + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \Delta}{\partial z} + \frac{\rho Z}{G} = 0 \quad (1.2)$$

Здесь  $u_r$  и  $u_z$  – компоненты перемещения,  $\rho$  – плотность материала цилиндра,  $G$  – модуль сдвига,  $R$  и  $Z$  – компоненты объемных сил.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad \Delta = \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Если ось  $z$  направить в обратную сторону действия силы тяжести для компонентов объемных сил (фиг.1), будем иметь:  $R = 0$ ,  $Z = -g$ .



Фиг. 1

Для построения общего решения уравнений (1.1)-(1.2), при отсутствии объемных сил бигармоническую функцию  $\Delta$  Лява примем в виде [1]

$$\begin{aligned} \phi(r, z) = & A_0 r^2 z^2 + B_0 z^4 + C_0 r^4 + F_0 z^2 + E_0 z^3 + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \cos \lambda_k z \left[ \varepsilon_k I_0(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) \right] + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\mu_k r) \left[ A_k \operatorname{sh} \mu_k z + B_k \operatorname{ch} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

где введены обозначения

$$C_0 = -\frac{1-2\nu}{16(1-\nu)}A_0, \quad B_0 = -\frac{3-2\nu}{6(1-\nu)}A_0$$

$J_n(x)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода от действительного аргумента,  
 $I_n(t)$  – функция Бесселя  $n$ -го порядка первого рода от мнимого аргумента,  
 $\lambda_k = k\pi/l$ ,  $\mu_k$  – корни уравнения  $J_1(\mu_k R) = 0$

Используя формулы А. Лява, представляющие перемещения и напряжения через функцию  $\phi(r, z)$ , а также частное решение уравнений равновесия с наличием массовых членов [1], для перемещений и напряжений будем иметь выражения:

$$\begin{aligned} 2GU_r(r, z) &= \left( \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \rho g - 4A_0 \right) rz + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \sin \lambda_k z \left[ \varepsilon_k I_1(\lambda_k r) + G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r) \right] + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_1(\mu_k r) \left[ (A_k + D_k) \operatorname{ch} \mu_k z + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \mu_k z + \right. \\ &\left. + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k \operatorname{sh} \mu_k z \right] \\ 2GU_z(r, z) &= \left( \frac{1-2\nu}{3-2\nu} \rho g + \frac{2A_0}{1-2\nu} \right) z^2 + \\ &+ 6(1-2\nu)E_0 z + 2(1-2\nu)F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \cos \lambda_k z \left[ G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + \right. \\ &\left. + (E_k + 4(1-2\nu)G_k) I_0(\lambda_k r) \right] + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 J_0(\mu_k r) \left[ (2(1-2\nu)D_k - A_k) \operatorname{sh} \mu_k z + \right. \\ &\left. - 2(1-2\nu)C_k \operatorname{ch} \mu_k z + B_k \operatorname{ch} \mu_k z - C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z - D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \right] \\ 2G\sigma_z(r, z) &= 2 \left( \frac{\rho g}{3-2\nu} + 2A_0 \right) z + 6(1-\nu)E_0 - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \sin \lambda_k z \left\{ G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) + [E_k + 2(2-\nu)G_k] I_0(\lambda_k r) \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_0(\mu_k r) \left\{ [D_k(1-2\nu) - A_k] \operatorname{ch} \mu_k z + [C_k(1-2\nu) - B_k] \operatorname{sh} \mu_k z - \right. \\ &\left. - C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z - D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \right\} \\ 2G\sigma_r(r, z) &= \left( \frac{1+2\nu}{3-2\nu} \rho g - \frac{4A_0}{1-2\nu} \right) z + 6\nu E_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \sin \lambda_k z \left\{ G_k \lambda_k r I_1(\lambda_k r) - E_k \frac{I_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} + \right. \\ &\left. + [B_k + (1+2\nu)C_k] \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \right\} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k^2 J_1(\mu_k r)}{r} \{ (A_k + D_k) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z + \\
& + (B_k + C_k) \operatorname{sh} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z \} \\
\tau_{rz}(r, z) = & \left( \frac{1-2\nu}{2(3-2\nu)} \rho g - 2A_0 \right) r + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \cos \lambda_k z \{ G_k \lambda_k r I_0(\lambda_k r) + [E_k + 2(1-\nu)G_k] I_1(\lambda_k r) \} + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 J_1(\mu_k r) \{ (A_k + 2\nu D_k) \operatorname{sh} \mu_k z + C_k \mu_k z \operatorname{sh} \mu_k z + \\
& + (B_k + 2\nu C_k) \operatorname{ch} \mu_k z + D_k \mu_k z \operatorname{ch} \mu_k z \}
\end{aligned}$$

Граничные условия для этой задачи можно представить равенствами (отсутствие перемещений на нижнем торце и напряжений на других поверхностях цилиндра).

$$\begin{aligned}
U_r(r, 0) = U_z(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \\
\sigma_z(r, l) = \tau_{rz}(r, l) = 0 \quad (0 \leq r \leq R) \\
\sigma_r(R, z) = \tau_{rz}(R, z) = 0 \quad (0 < z < l)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Полагая  $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ ,  $J_1(\mu_k R) = 0$  и удовлетворяя условиям (1.4), найдём

$$\begin{aligned}
A_0 = \frac{1-2\nu}{4(3-2\nu)} \rho g, \quad E_0 = \frac{\rho g l}{6(1-\nu)} \\
F_0 = \frac{2\nu}{1-2\nu} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k G_k I_1(\lambda_k R), \quad A_k = -D_k
\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$\begin{aligned}
E_k = -G_k \left[ 2(1-\nu) + \frac{\lambda_k R I_0(\lambda_k R)}{I_1(\lambda_k R)} \right] \\
B_k = C_k [1-2\nu - \mu_k l \operatorname{cth} \mu_k l] + D_k [2(1-\nu) \operatorname{cth} \mu_k l - \mu_k l]
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Введём обозначения

$$\begin{aligned}
X_k = \mu_k^3 J_0(\mu_k R) \operatorname{sh} \mu_k l \left[ D_k \operatorname{cth} \frac{\mu_k l}{2} + C_k \right] \\
Y_k = \mu_k^3 J_0(\mu_k R) \operatorname{sh} \mu_k l \left[ D_k \operatorname{th} \frac{\mu_k l}{2} + C_k \right] \\
Z_k = \frac{l G_m \lambda_m^3 I_1(\lambda_m R)}{R}
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Тогда, после несложных преобразований, для определения коэффициентов  $C_k, D_k, G_k$  получаем совокупность из трёх бесконечных систем линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$Z_m = \sum_{k=1}^{\infty} A_{km} X_k + \sum_{k=1}^{\infty} B_{km} Y_k + M_m \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

$$X_m = \sum_{k=1}^{\infty} C_{km} Z_k \quad m = 1, 2, \dots \quad (1.9)$$

$$Y_m = \sum_{k=1}^{\infty} D_{km} Z_k \quad m = 1, 2, \dots, \quad (1.10)$$

где введены следующие обозначения:

$$A_{km} = \begin{cases} A_{km}^{(1)}, & m = 1, 3, \dots \\ A_{km}^{(2)}, & m = 2, 4, \dots \end{cases}, \quad B_{km} = \begin{cases} B_{km}^{(1)}, & m = 1, 3, \dots \\ B_{km}^{(2)}, & m = 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$C_{km} = \begin{cases} C_{km}^{(1)}, & m = 1, 3, \dots \\ C_{km}^{(2)}, & m = 2, 4, \dots \end{cases}, \quad D_{km} = \begin{cases} D_{km}^{(1)}, & m = 1, 3, \dots \\ D_{km}^{(2)}, & m = 2, 4, \dots \end{cases}$$

$$A_{km}^{(1)} = -B_{km}^{(2)} = \frac{2}{\Delta_m R^2} \frac{(1+\nu)\lambda_m^2 - (1-\nu)\mu_k^2}{(\mu_k^2 + \lambda_m^2)^2}, \quad B_{km}^{(1)} = -A_{km}^{(2)} = \frac{2(1-\nu)}{R^2} \frac{1}{\mu_k^2 + \lambda_m^2}$$

$$M_m = -\frac{2\rho g l \nu}{K_0 \Delta_m \lambda_m^2 R^2 (1-\nu)}, \quad \Delta_m = \frac{I_0^2(\lambda_m r)}{I_1^2(\lambda_m r)} - 1 - \frac{2(1-\nu)}{\lambda_m^2 R^2}$$

$$C_{km}^{(1)} = \frac{4\mu_m}{l\omega_m} \left\{ \frac{(1-\nu)^2 \operatorname{sh} 2\mu_m l [(1-2\nu)\operatorname{sh}\mu_m l + \mu_m l]}{\lambda_k^2 + \mu_m^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\operatorname{ch}\mu_m l + 1) [(1-2\nu)\operatorname{sh}\mu_m l + \mu_m l]}{(\lambda_k^2 + \mu_m^2)^2} [(1+\nu)\lambda_k^2 - (1-\nu)\mu_m^2] \right\}$$

$$C_{km}^{(2)} = \frac{4(1-\nu)\mu_m}{l\omega_m} \left\{ \frac{\operatorname{sh} 2\mu_m l}{(\lambda_k^2 + \mu_m^2)^2} [(1-\nu)\mu_m^2 - (1+\lambda_k^2)] - \right.$$

$$\left. \frac{(\operatorname{ch}\mu_m l + 1) [(1-2\nu)\operatorname{sh}\mu_m l + \mu_m l]}{\lambda_k^2 + \mu_m^2} \right\}$$

$$D_{km}^{(1)} = \frac{4(1-\nu)\mu_m}{l\omega_m} \left\{ \frac{(\text{ch}\mu_m l - 1)[(1-2\nu)\text{sh}\mu_m l - \mu_m l]}{\lambda_k^2 + \mu_m^2} + \frac{\text{sh}2\mu_m l}{(\lambda_k^2 + \mu_m^2)^2} [(1+\nu)\lambda_k^2 - (1-\nu)\mu_m^2] \right\}$$

$$D_{km}^{(2)} = \frac{4\mu_m}{l\omega_m} \left\{ \frac{(\text{ch}\mu_m l - 1)[(1-2\nu)\text{sh}\mu_m l - \mu_m l]}{(\lambda_k^2 + \mu_m^2)^2} [(1-\nu)\mu_m^2 - (1+\nu)\lambda_k^2] - \frac{(1-\nu)^2 \text{sh}2\mu_m l}{\lambda_k^2 + \mu_m^2} \right\}$$

$$\omega_m = (3-4\nu)\text{ch}^2\mu_m l + (1-2\nu)^2 + \mu_m^2 l^2$$

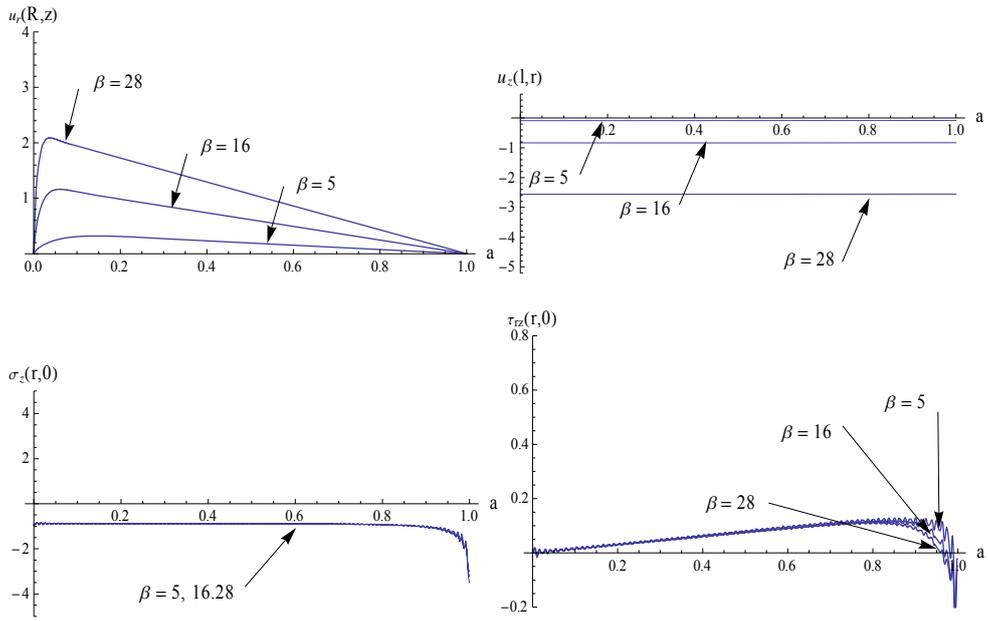
Легко убедиться в том, что условие равновесия выполнено. Действительно, из формулы для определения нормальных напряжений  $\sigma_z$  при  $z = 0$  будем иметь

$$\sigma_z(r, 0) = -\rho g l + 2(1-\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 D_k J_0(\mu_k r), \quad (1.11)$$

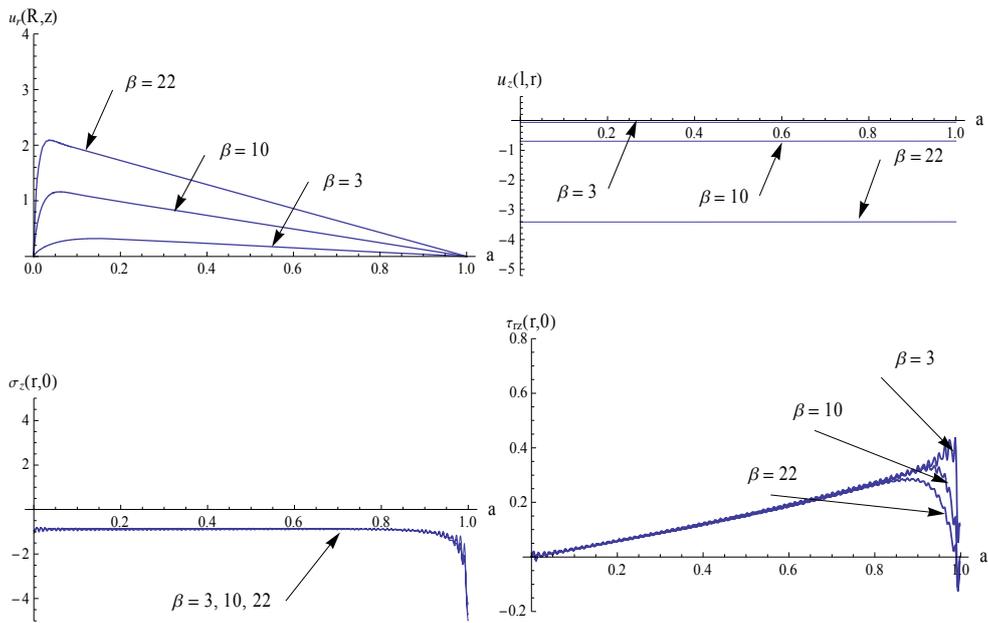
откуда получим

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sigma_z(r, 0) r dr = 2\pi \int_0^R \sigma_z(r, 0) r dr = -\frac{2\pi\rho g l R^2}{2} + 2\pi(1-\nu) \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 D_k \int_0^R r J_0(\mu_k r) dr = -\pi\rho g l R^2 = -mg \quad (1.12)$$

2. В численном примере решаются укороченные бесконечные системы из  $\approx 750$  уравнений для двух значений коэффициентов Пуассона ( $\nu = 0.3$  и  $\nu = 0.42$ ) и для различных значений  $\beta = \frac{l}{R}$ . Используя значения найденных неизвестных коэффициентных систем (1.8)-(1.10), построены графики для контактного давления  $\sigma_z(r, 0)/\rho g l$ , касательного напряжения  $\tau_{rz}(r, 0)/\rho g l$  и компонентов перемещений  $2Gu_r(R, z)/\rho g l^2$ ,  $2Gu_z(r, l)/\rho g l^2$ . Эти графики показаны на фиг.2. А в таблице представлены максимальные значения  $2Gu_r(R, z)/\rho g l^2$  в зависимости от коэффициентов Пуассона  $\nu$  и отношения  $\beta = \frac{l}{R}$ .



Фиг.2.  $\nu = 0.3$



Фиг. 3.  $\nu = 0.42$

Таблица

$\beta \backslash \theta$	0.05	0.3	0.42	0.45
2	0.0197 a=0.2779	0.1018 a=0.2537	0.1341 a=0.2438	0.1416 a=0.2435
5	0.0644 a=0.1681	0.3204 a=0.1452	0.4159 a=0.1351	0.4379 a=0.1348
8	0.1111 a=0.1172	0.5472 a=0.1051	0.7070 a=0.1033	0.74331 a=0.1033
10	0.1426 a=0.0977	0.6997 a=0.0909	0.9039 a=0.0842	0.9502 a=0.0842
15	0.2215 a=0.0764	1.0840 a=0.0666	1.3965 a=0.0635	1.4679 a=0.0558
18	0.2696 a=0.0614	1.3159 a=0.0560	1.6936 a=0.0547	1.7791 a=0.0544
20	0.3014 a=0.0574	1.4711 a=0.0516	1.8938 a=0.0447	1.9902 a=0.0447
24	0.3649 a=0.0438	1.7816 a=0.0437	2.2903 a=0.0438	2.4050 a=0.0438
30	0.46154 a=0.0381	2.2479 a=0.0359	2.8900 a=0.0354	3.0349 a=0.0353

Легко установить, что на нижнем закреплённом торце цилиндра имеет место равенство

$$\sigma_r(r, 0) = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z(r, 0) \quad (0 \leq r \leq R) \quad (2.1)$$

3. Полученные численные результаты позволяют сделать следующие выводы :

а) В средней части контактной зоны ( $r < 0.9R$ ) нормальное напряжение отрицательно и распределяется практически равномерно, а при приближении к границе оно возрастает и стремится к бесконечности. Высота цилиндра существенно не влияет на характер нормальных напряжений.

б) В той же части контактной зоны касательные напряжения, будучи положительными, распределяются почти по линейному закону, а вблизи границы бесконечное число раз меняют знак, т.е. имеет место осцилляция. На оси цилиндра касательные напряжения равны нулю.

в) Боковая поверхность цилиндра претерпевает максимальное радиальное перемещение на некотором небольшом расстоянии от основания. При этом, это расстояние практически не зависит от значения коэффициента Пуассона и уменьшается с увеличением высоты цилиндра.

г) Верхний торец цилиндра вследствие деформации опускается, практически сохраняя форму и тем больше, чем больше коэффициент Пуассона и высота цилиндра. При этом, эта зависимость является нелинейной.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамян Б.Л. Об одной осесимметричной задаче для сплошного вращающегося цилиндра конечной длины. // Изв. АН СССР. МТТ. 1983. №1. С.55-62.
2. Абрамян Б.Л. К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. // Докл. Арм. ССР. 1954. Т.19. №1. С.3-12.
3. Валов Г.М. Осесимметричная задача о сжатии упругого цилиндра, покоящегося на гладком жёстком основании. // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1961. №6. С.151-154.
4. Валов Г.М. Об осесимметричной деформации сплошного круглого цилиндра конечной длины. // ПММ. 1962. Т.26. Вып. 4. С.650-667.
5. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф. О точном решении осесимметричной задачи теории упругости для круглой жёстко закреплённой плиты. // Изв. Арм. ССР. Сер. физ.-мат.н. 1963. Т.16. №1. С.13-32.
6. Баблоян А.А., Тоноян В.С. Изгиб двухслойной толстой плиты осесимметричной нагрузкой. // Изв. Арм. ССР. Сер. физ.-мат. н. Т.16. №1. С.13-32.
7. Гринченко В.Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. Киев: Наукова думка, 1978. 264с.
8. Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Т. Функциональный анализ в полупорядоченных пространствах. М.-Л.: Гостехиздат, 1950 .

### **Сведения об авторе:**

Торосян Вардан Стёпаевич – научный сотрудник Института механики НАН Армении

**E-mail:** mechins@sci.am

Поступила в редакцию 07.11.2012