ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 66, №1, 2013 Механика

УДК 539.3

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УПРУГОЙ БЕСКОНЕЧНОЙ ПЛАСТИНЫ, УСИЛЕННОЙ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ БЕСКОНЕЧНЫМ И ПОЛУБЕСКОНЕЧНЫМ СТРИНГЕРАМИ

Саркисян К.С., Оганисян Г.В., Мелтонян Б.А.

Ключевые слова: бесконечная пластина, контакт, стрингер, обобщенные функции, функциональное уравнение, факторизация, асимптотика.
Keywords: infinite plate, contact, stringer, generalized functions, functional equation, factorization, asymptotic.

Սարգսյան Կ.Ս., Հովհաննիսյան Հ.Վ., Մելտոնյան Բ.Ա.

Կոնտակտային խնդիր՝ անվերջ և կիսաանվերջ երկու զուգահեռ վերադիրներով ուժեղացված անվերջ առաձգական սալի համար

Աշխատանքում դիտարկված է իզոտրոպ համասեռ անվերջ առաձգական սալի համար կոնտակտային խնդիր, որն ուժեղացված է անվերջ և կիսաանվերջ երկու զուգահեռ առաձգական վերադիրներով: Սալ-վերադիր կոնտակտային զույգը դեֆորմացվում է կիսաանվերջ առաձգական վերադիրի ծայրում կիրառված կենտրոնացված ուժի շնորհիվ: Ֆուրիեի իրական ընդհանրացված ինտեգրալ ձևափոխության օգնությամբ ուսումնասիրվող կոնտակտային խնդրի լուծումը հանգում է իրական առանցքի վրա ֆունկցիոնալ հավասարման լուծմանը՝ անհայտ ֆունկցիաների Ֆուրիեի տրանսֆորմանտների նկատմամբ: Կառուցված է դիտարկվող կոնտակտային խնդրի փակ լուծումը: Որոշված են շոշափող կոնտակտային ուժերի բաշխման ինտենսիվությունները և վերադիրներում առաջացող առանցքային (նորմալ) լարումները: Կիսաանվերջ առաձգական վերադիրի շոշափող կոնտակտային ուժերի բաշխման ինտենսիվությունների և նրանում առաջացող առանցքային (նորմալ) լարումների համար ստացված են ասիմպտոտիկ բանաձևեր, որոնք բնութագրում են լարումների վարքը ինչպես ուժի կիրառման կետի շրջակայքում, այնպես էլ դրանից հեռու կետերում:

Sargsyan K.S., Hovhannisyan H.V., Meltonyan B.A.

A Contact Problem for an Infinite Elastic Plate, Strengthened by Two Parallel Infinite and Semi-Infinite Stringers

In this paper a contact problem for an isotropic homogeneous infinite elastic plate, strengthened by two parallel infinite and semi-infinite elastic stringers, is considered. The plate-stringer contacting pair is deformed by concentrated force, applied on the end of the semi-infinite elastic stringer. The solution of considered contact problem by means of Fourier generalized real integral transform is reduced to solution of a functional equation on the real axis with respect to unknown functions Fourier transforms. The closed-form solution of the contact problem is constructed. The intensities of tangential contact forces and axial (normal) stresses arising in stringers are determined. Asymptotic formulas for intensities of tangential contact forces and axial (normal) stresses arising in semi-infinite stringer describing their behavior as near, as well far from the force application point are obtained.

В работе рассматривается контактная задача для изотропной однородной упругой бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными бесконечным и полубесконечным упругими стрингерами. Контактная пара (пластина-стрингер) деформируется сосредоточенной силой, приложенной на конце полубесконечного упругого стрингера. При помощи действительного обобщённого интегрального преобразования Фурье решение рассматриваемой контактной задачи сводится к решению некоторого функционального уравнения на действительной оси относительно трансформантов Фурье неизвестных функций. Построено замкнутое решение поставленной контактной задачи. Определены распределения интенсивностей тангенциальных контактных усилий и осевые (нормальные) напряжения, возникающие в стрингерах. Получены асимптотические формулы для распределения интенсивностей тангенциальных контактных усилий и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в упругом полубесконечном стрингере, описывающие поведение напряжений как вблизи, так и вдали от точки приложения силы.

1. Пусть упругий сплошной изотропный лист в виде тонкой однородной бесконечной пластины малой постоянной толщины h на линиях $y=-a$ и $y=a$

$(a>0)$ своей верхней поверхности усилен двумя параллельными бесконечным и полубесконечным упругими стрингерами с одинаковыми достаточно малыми постоянными прямоугольными поперечными сечениями и модулями упругости.

Требуется определить законы распределения интенсивностей тангенциальных

контактных усилий вдоль линии крепления бесконечного и полубесконечного упругих стрингеров с бесконечной упругой пластиной и осевых (нормальных) напряжений, возникающих в стрингерах, когда контактирующая пара (пластина-стрингер) деформируется сосредоточенной силой $R\delta(x)\delta(y-a)$, приложенной на конце полубесконечного упругого стрингера.

В исследуемой контактной задаче относительно стрингеров принимается во внимание модель контакта по линии, то есть предполагается, что распределение интенсивностей тангенциальных контактных усилий сосредоточены вдоль средней линии контактного участка, а для изотропной однородной бесконечной упругой пластины считается справедливой модель обобщённого плоского напряжённого состояния [1-9], благодаря чему она деформируется как плоскость.

Обращаясь теперь к получению разрешающих уравнений рассматриваемой контактной задачи заметим, что стрингеры растягиваются или сжимаются в горизонтальном направлении, находясь в одноосном напряжённом состоянии. Тогда, на основе вышесказанного, дифференциальное уравнение равновесия элемента бесконечного упругого стрингера на линии $y=-a$ будет иметь следующий вид:

$$\frac{d^2u_S(x;-a)}{dx^2}-\frac{p(x;-a)}{E_SF_S}=0 \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{1.1}$$

где $p(x;-a)$ и $u_S(x;-a)$ – соответственно интенсивность распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий и горизонтальные перемещения точек упругого бесконечного стрингера на линии $y=-a$.

Далее, имея в виду вышесказанное, дифференциальное уравнение равновесия элемента полубесконечного упругого стрингера на линии $y=a$ запишем в виде:

$$\frac{d^2u_S(x;a)}{dx^2}-\frac{p(x;a)}{E_SF_S}=0 \qquad (-\infty<x<0), \tag{1.2}$$

при этом граничное условие имеет следующий вид:

$$\left.\frac{du_S(x;a)}{dx}\right|_{x=-0}=\frac{R}{E_SF_S}, \tag{1.3}$$

здесь $p(x;a)$ и $u_S(x;a)$ – соответственно интенсивность распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий и горизонтальные перемещения точек упругого полубесконечного стрингера на линии $y=a$. Отметим, что в формулах (1.1) − (1.3) $(E_S;F_S)$ – модуль упругости и площадь поперечного сечения упругих стрингеров; R – интенсивность сосредоточенной силы, приложенной на конце полубесконечного упругого стрингера в точке $(0;a)$.

Теперь, чтобы написать дифференциальное уравнение (1.2) с граничным условием (1.3) одним уравнением для всех x $(-\infty<x<\infty)$, введём функцию:

$$u_S^-(x)=\theta(-x)u_S(x;a) \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{1.4}$$

где $\theta(t)$ – единичная ступенчатая функция Хэвисайда.

Применив к (1.4) операцию дифференцирования в смысле теории обобщённых функций, при этом учитывая дифференциальное уравнение (1.2) и граничное условие (1.3), относительно функции $u_S^-(x)$ получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u_S^-(x)}{dx^2} = \frac{p^-(x)}{E_S F_S} - \frac{R\delta(x)}{E_S F_S} - u_S(0;a)\delta'(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{1.5}$$

где $p^-(x) = \theta(-x)\,p(x;a)$, а $\delta'(x)$ – производная дельта-функции Дирака $\delta(x)$.

Если теперь применить к уравнениям (1.1) и (1.5) действительное обобщённое интегральное преобразование Фурье в смысле теории обобщённых функций, то соответственно получим:

$$-\sigma^2 \bar{u}_S(\sigma;-a) = \frac{\bar{p}(\sigma;-a)}{E_S F_S} \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \tag{1.6}$$

$$-\sigma^2 \bar{u}_S^-(\sigma) = \frac{\bar{p}^-(\sigma)}{E_S F_S} - \frac{R}{E_S F_S} + i\sigma u_S(0;a) \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \tag{1.7}$$

где

$$\bar{A}(\sigma) = \int_{-\infty}^{\infty} A(x) e^{i\sigma x} dx; \; A(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(\sigma) e^{-i\sigma x} d\sigma, \tag{1.8}$$

а $\sigma\ (-\infty < \sigma < \infty)$ – спектральный параметр преобразования Фурье.

С другой стороны, на основе вышесказанного, для трансформанты Фурье функции горизонтальных перемещений точек изотропной однородной бесконечной упругой пластины, когда на линиях $y = a$ и $y = -a$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностями $p(x,a)\ (-\infty < x < 0)$ и $p(x,-a)\ (-\infty < x < \infty)$, соответственно имеем [6-8]:

$$\bar{u}(\sigma;a) = \bar{u}^-(\sigma) + \bar{u}^+(\sigma) = \frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)|\sigma|}\frac{\bar{p}^-(\sigma)}{h} +$$

$$+\left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)} a\right] e^{-2a|\sigma|}\frac{\bar{p}(\sigma;-a)}{h} \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \tag{1.9}$$

$$\bar{u}(\sigma;-a) = \left[\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)|\sigma|} - \frac{\lambda^* + \mu}{2\mu(\lambda^* + 2\mu)} a\right] e^{-2a|\sigma|}\frac{\bar{p}^-(\sigma)}{h} +$$
$$+\frac{\lambda^* + 3\mu}{4\mu(\lambda^* + 2\mu)|\sigma|}\frac{\bar{p}(\sigma;-a)}{h} \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \tag{1.10}$$

здесь $\bar{u}^+(\sigma) = F\left[u^+(x;a)\right]$ и $\bar{u}^-(\sigma) = F\left[u^-(x;a)\right]$ – трансформанты Фурье функций $u^+(x;a) = \theta(x)u(x;a)$ и $u^-(x;a) = \theta(-x)u(x;a)$, соответственно; $F[\bullet]$ – оператор Фурье; $u(x;-a)$ и $u(x;a)$ – горизонтальные перемещения точек бесконечной упругой пластины на линиях $y = -a$ и $y = a$, соответственно; $\lambda^* = 2\lambda\mu(\lambda + \mu)^{-1}$, где λ и μ – упругие характеристики изотропной однородной бесконечной пластины.

Если теперь иметь в виду, что на линиях крепления $y = -a$ и $y = a$ упругих бесконечного и полубесконечного стрингеров с упругой бесконечной пластиной имеют место следующие контактные условия:

$$\bar{u}_S(\sigma;-a) = \bar{u}(\sigma;-a); \quad \bar{u}_S^-(\sigma) = \bar{u}^-(\sigma) \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \tag{1.11}$$

то на основе (1.6), (1.7), (1.9) и (1.10) относительно трансформантов Фурье функций интенсивностей распределения неизвестных тангенциальных контактных усилий $\bar{p}(\sigma;-a)$ и $\bar{p}^-(\sigma)\ (-\infty < \sigma < \infty)$, которые являются основными неизвестными функциями рассматриваемой контактной задачи, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sigma^2\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu\left(\lambda^*+2\mu\right)|\sigma|}-\frac{\lambda^*+\mu}{2\mu\left(\lambda^*+2\mu\right)}a\right]e^{-2a|\sigma|}\,\overline{p}^-(\sigma)+$$

$$+\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu\left(\lambda^*+2\mu\right)}|\sigma|+\frac{h}{E_SF_S}\right]\overline{p}(\sigma;-a)=0\qquad(-\infty<\sigma<\infty),\tag{1.12}$$

$$\sigma^2\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu\left(\lambda^*+2\mu\right)|\sigma|}-\frac{\lambda^*+3\mu}{2\mu\left(\lambda^*+2\mu\right)}a\right]e^{-2a|\sigma|}\,\overline{p}(\sigma;-a)+\qquad(-\infty<\sigma<\infty),$$

$$+\left[\frac{\lambda^*+3\mu}{4\mu\left(\lambda^*+2\mu\right)}|\sigma|+\frac{h}{E_SF_S}\right]\overline{p}^-(\sigma)=\frac{Rh}{E_SF_S}-i\sigma hu_S(0;a)+\sigma^2h\overline{u}^+(\sigma).\tag{1.13}$$

Решая систему уравнений (1.12) и (1.13) относительно $\overline{p}^-(\sigma)$ и $\overline{p}(\sigma;-a)$, получим:

$$\overline{K}(\sigma)\overline{p}^-(\sigma)=TR-TE_SF_Su_S(0;a)i\sigma+TE_SF_S\overline{u}^+(\sigma)\sigma^2\qquad(-\infty<\sigma<\infty),\tag{1.14}$$

$$\overline{p}(\sigma;-a)=\frac{RT}{T+|\sigma|}-\left[\frac{\overline{K}_1(\sigma)}{T+|\sigma|}-1\right]\overline{p}^-(\sigma)\qquad(-\infty<\sigma<\infty).\tag{1.15}$$

где введены следующие обозначения:

$$\overline{K}(\sigma)=\frac{\overline{K}_1(\sigma)\overline{K}_2(\sigma)}{T+|\sigma|};\quad \overline{K}_1(\sigma)=T+2|\sigma|\operatorname{ch}(a|\sigma|)e^{-a|\sigma|}-ak\sigma^2e^{-2a|\sigma|},\tag{1.16}$$

$$\overline{K}_2(\sigma)=T+2|\sigma|\operatorname{sh}(a|\sigma|)e^{-a|\sigma|}+ak\sigma^2e^{-2a|\sigma|};T=\frac{4\mu\left(\lambda^*+2\mu\right)}{\lambda^*+3\mu}\frac{h}{E_SF_S};\; k=\frac{2\left(\lambda^*+\mu\right)}{\lambda^*+3\mu}.$$

Здесь особенно нужно подчеркнуть, что при $a\to\infty$ функциональное уравнение (1.14) совпадает с соответсвующим уравнением работы [3], а (1.15)– работы [1].

Таким образом, решение рассматриваемой контактной задачи при принятых выше предположениях свелось к решению функционального уравнения (1.14) на действительной оси относительно неизвестных функций $\overline{p}^-(\sigma)$ и $\overline{u}^+(\sigma)$. Здесь надо отметить, что так как функции $\overline{p}^-(\sigma)$ и $\overline{u}^+(\sigma)$ являются граничными значениями аналитических функций $\overline{p}^-(\alpha)$ и $\overline{u}^+(\alpha)$ $(\alpha=\sigma+i\tau)$, регулярных соответственно в нижней и верхней полуплоскостях, то функциональное уравнение (1.14) можно рассмотреть как краевую задачу Римана в теории аналитических функций. Поступая аналогичным [3,9] образом, факторизуем ядро $\overline{K}(\sigma)$ функционального уравнения (1.14), представив его в следующей форме:

$$\overline{K}(\sigma)=\overline{K}^+(\sigma)\overline{K}^-(\sigma)\qquad(-\infty<\sigma<\infty),\tag{1.17}$$

где $\overline{K}^+(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha>0$, а $\overline{K}^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\operatorname{Im}\alpha<0$ $(\alpha=\sigma+i\tau)$, и соответственно имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}&\overline{K}^+(\sigma)=(\sigma+i0)^{\frac{1}{2}}\,\overline{m}^+(\sigma)\overline{M}_1^+(\sigma)\overline{M}_2^+(\sigma),\\&\overline{K}^-(\sigma)=(\sigma-i0)^{\frac{1}{2}}\,\overline{m}^-(\sigma)\overline{M}_1^-(\sigma)\overline{M}_2^-(\sigma);\end{aligned}\tag{1.18}$$

здесь имеется в виду, что

$$\left\{\overline{m}^\pm(\sigma);\overline{M}_1^\pm(\sigma);\overline{M}_2^\pm(\sigma)\right\}=\exp\left\{\overline{f}^\pm(\sigma);\overline{F}_1^\pm(\sigma);\overline{F}_2^\pm(\sigma)\right\};\tag{1.19}$$

$$\left\{\bar{f}^{+}(\sigma);\bar{F}_1^{+}(\sigma);\bar{F}_2^{+}(\sigma)\right\}=\int_0^{\infty}\left\{f(x);F_1(x);F_2(x)\right\}e^{i(\sigma+i0)x}dx,$$
$$\left\{\bar{f}^{-}(\sigma);\bar{F}_1^{-}(\sigma);\bar{F}_2^{-}(\sigma)\right\}=\int_{-\infty}^{0}\left\{f(x);F_1(x);F_2(x)\right\}e^{i(\sigma-i0)x}dx, \tag{1.20}$$

$(\sigma+i0)^{\beta}=\sigma_+^{\beta}+e^{i\beta\pi}\sigma_-^{\beta};\ (\sigma-i0)^{\beta}=\sigma_+^{\beta}+e^{-i\beta\pi}\sigma_-^{\beta};\ \sigma_+^{\beta}=\theta(\sigma)|\sigma|^{\beta};\ \sigma_-^{\beta}=\theta(-\sigma)|\sigma|^{\beta}$,

а функции $f(x)$, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ соответственно имеют следующий вид:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{T}{|\sigma|}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma;\ F_1(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1+\frac{|\sigma|-ak\sigma^2}{T+|\sigma|}e^{-2a|\sigma|}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

$$F_2(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\left(1-\frac{|\sigma|-ak\sigma^2}{T+|\sigma|}e^{-2a|\sigma|}\right)e^{-i\sigma x}d\sigma \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{1.21}$$

Легко видеть, что функции $\bar{m}^{\pm}(\sigma)$, $\bar{M}_1^{\pm}(\sigma)$ и $\bar{M}_2^{\pm}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ стремятся к единице в своих областях регулярности. После представления ядра $\bar{K}(\sigma)$ в виде (1.17), функциональное уравнение (1.14) можно привести к следующему виду:

$$\bar{L}_1^{-}(\sigma)\overset{def}{=}\bar{K}^{-}(\sigma)\bar{p}^{-}(\sigma)=\frac{TR}{\bar{K}^{+}(\sigma)}-\frac{TE_SF_Su_S(0;a)i\sigma-TE_SF_S\bar{u}^{+}(\sigma)\sigma^2}{\bar{K}^{+}(\sigma)}\overset{def}{=}\bar{L}_2^{+}(\sigma). \tag{1.22}$$
$$(-\infty<\sigma<\infty).$$

Дальнейший ход рассуждений проводится аналогично как в работе [3]. Если теперь применить к (1.22) обратное интегральное преобразование Фурье, получим:

$$L_1^{-}(x)=L_2^{+}(x) \qquad (-\infty<x<\infty). \tag{1.23}$$

В таком случае будем иметь [3,10,11]:

$$L_1^{-}(x)=L_2^{+}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}(x) \qquad (-\infty<x<\infty), \tag{1.24}$$

где $\delta^{(0)}(x)=\delta(x)$, $\delta^{(n)}(x)-$ n-я производная дельта-функции Дирака $\delta(x)$.

Если теперь применить к (1.24) преобразование Фурье, будем иметь:

$$\bar{L}_1^{-}(\sigma)=\bar{L}_2^{+}(\sigma)=\sum_{k=0}^{n}a_k(-i\sigma)^k \qquad (-\infty<\sigma<\infty). \tag{1.25}$$

Далее, как известно [6,7], $\bar{L}_1^{-}(\sigma)=\bar{L}_2^{+}(\sigma)=O(1)$ при $|\sigma|\to\infty$, следовательно из (1.25) вытекает, что $a_k=0$ $\left(k=\overline{1;n}\right)$. Таким образом, для неизвестной функции $\bar{p}^{-}(\sigma)$ из равенства (1.22) получим:

$$\bar{p}^{-}(\sigma)=\frac{a_0}{\bar{K}^{-}(\sigma)} \qquad (-\infty<\sigma<\infty), \tag{1.26}$$

где a_0-неизвестная постоянная, подлежащая определению из условия равновесия полубесконечного упругого стрингера $\bar{p}^{-}(0)=R$.

Таким образом, построено замкнутое решение рассматриваемой контактной задачи, а искомые величины соответственно имеют вид (1.15) и (1.26).

2. Теперь приступим к получению асимптотических формул для функции распределения интенсивности неизвестных тангенциальных контактных усилий

$p^-(x)$ и осевых (нормальных) напряжений $q^-(x)$, которые возникают в упругом полубесконечном стрингере, характеризующее их поведение при $|x|\to 0$ и $|x|\to\infty$.

Сначала получим асимптотические формулы для функций $p^-(x)$ и $q^-(x)$ при $x\to-\infty$. Для этой цели нужно получить разложение функции $\bar{p}^-(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$. Как известно, при $|\sigma|\to 0$ поведение функции $\bar{f}^-(\sigma)$ можно описать следующим асимптотическим представлением [6]:

$$\bar{f}^-(\sigma)=-\frac{1}{2}\ln\frac{\sigma-i0}{T}-\frac{i\pi}{4}+\bar{f}_0^-(\sigma), \tag{2.1}$$

где

$$\bar{f}_0^-(\sigma)=\frac{\sigma}{i\pi T}\left(\ln\frac{\sigma-i0}{T}-1\right)+\frac{\sigma^3}{3i\pi T^3}\left(\ln\frac{\sigma-i0}{T}-\frac{1}{3}\right)+\frac{\sigma}{2T}-\frac{\sigma^2}{4T^2}+\frac{\sigma^3}{6T^3}+\mathrm{O}\left(\sigma^4\right), \tag{2.2}$$

то для функции $\bar{p}^-(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$ получим следующую асимптотическую формулу:

$$\bar{p}^-(\sigma)=\frac{a_0e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{T}}\exp\left\{-\bar{f}_0^-(\sigma)-\bar{F}_1^-(\sigma)-\bar{F}_2^-(\sigma)\right\}. \tag{2.3}$$

С другой стороны известно, что при $|\sigma|\to 0$ для функций $\bar{F}_1^-(\sigma)$ и $\bar{F}_2^-(\sigma)$ имеем [6]

$$\begin{aligned}\bar{F}_1^-(\sigma)&=\frac{\sigma}{i\pi T}\left[\ln 2a(\sigma-i0)-\psi(1)+\frac{i\pi}{2}+A_1\right]+\mathrm{O}\left(\sigma^3\ln 2a(\sigma-i0)\right),\\ \bar{F}_2^-(\sigma)&=-\frac{\sigma}{i\pi T}\left[\ln 2a(\sigma-i0)+\psi(1)-\frac{i\pi}{2}-A_2\right]+\mathrm{O}\left(\sigma^3\ln 2a(\sigma-i0)\right),\end{aligned} \tag{2.4}$$

где приняты следующие обозначения:

$$A_1=\int_0^\infty\left[se^{-2T^*s}-\ln\left(1+\frac{s-kT^*s^2}{1+s}e^{-2T^*s}\right)\right]\frac{ds}{s^2};\ A_2=\int_0^\infty\left[se^{-2T^*s}+\ln\left(1-\frac{s-kT^*s^2}{1+s}e^{-2T^*s}\right)\right]\frac{ds}{s^2}, \tag{2.5}$$

$T^*=aT$, а $\psi(x)-$ известная пси-функция.

Теперь имея в виду, что при $|\sigma|\to 0$ имеет место асимптотическая формула

$$\begin{aligned}\exp\left\{-\bar{f}_0^-(\sigma)-\bar{F}_1^-(\sigma)-\bar{F}_2^-(\sigma)\right\}&=1-\left[\bar{f}_0^-(\sigma)+\bar{F}_1^-(\sigma)+\bar{F}_2^-(\sigma)\right]+\\&+\frac{1}{2}\left[\bar{f}_0^-(\sigma)+\bar{F}_1^-(\sigma)+\bar{F}_2^-(\sigma)\right]^2-\cdots,\end{aligned} \tag{2.6}$$

для $\bar{p}^-(\sigma)$ при $|\sigma|\to 0$ будем иметь следующее асимптотическое представление:

$$\begin{aligned}\bar{p}^-(\sigma)=\frac{a_0e^{\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{T}}&\left[1+\frac{B_1}{\pi T}i\sigma-\frac{B_1^2}{2\pi^2T^2}\sigma^2+\frac{2}{\pi T}i\sigma\ln 2a(\sigma-i0)-\frac{2B_1}{\pi^2T^2}\sigma^2\ln 2a(\sigma-i0)-\right.\\&\left.-\frac{2}{\pi^2T^2}\sigma^2\ln^2 2a(\sigma-i0)\right]+\mathrm{O}\left(\sigma^3\ln 2a(\sigma-i0)\right),\end{aligned} \tag{2.7}$$

где

$$B_1=i\pi+A_1-1-\psi(1)-\ln(2aT). \tag{2.8}$$

После чего, при $|\sigma|\to 0$ из (2.7) на основе условия $\bar{p}^-(0)=R$ получим значение неизвестной постоянной a_0:

$$a_0=e^{-\frac{i\pi}{4}}\sqrt{T}R. \tag{2.9}$$

Подставляя значение постоянной a_0 из (2.9) в (2.7), для функции $\bar{p}^{-}(\sigma)$ при $|\sigma| \to 0$ окончательно получим следующую асимптотическую формулу:

$$\bar{p}^{-}(\sigma) = R\left[1 + \frac{B_1}{\pi T} i\sigma - \frac{B_1^2}{2\pi^2 T^2}\sigma^2 + \frac{2}{\pi T} i\sigma \ln 2a(\sigma - i0) - \frac{2B_1}{\pi^2 T^2}\sigma^2 \ln 2a(\sigma - i0) - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{\pi^2 T^2}\sigma^2 \ln^2 2a(\sigma - i0)\right] + \mathrm{O}\left(\sigma^3 \ln 2a(\sigma - i0)\right). \quad (2.10)$$

Теперь применив к (2.10) обратное обобщённое интегральное преобразование Фурье, имея в виду свойства интеграла Фурье, для функции $p^{-}(x)$ при $|x| \to \infty$ получим:

$$p^{-}(x) = R\left[\frac{2}{\pi T}\frac{1}{x^2} + \frac{4}{\pi^2 T^2}\left(1 + \psi(1) + \ln(2aT) - A_1 - \Gamma'(3) + 2\ln\frac{|x|}{2a}\right)\frac{1}{|x|^3}\right] + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^4}\right). \quad (2.11)$$

Здесь были использованы следующие формулы [6,11]:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma - i0)^{\beta} e^{-i\sigma x} d\sigma = -\frac{e^{-\frac{i\pi\beta}{2}}\sin(\pi\beta)}{\pi x_{-}^{1+\beta}}\Gamma(1+\beta),$$
$$\frac{d}{d\beta}(\sigma - i0)^{\beta} = (\sigma - i0)^{\beta}\ln(\sigma - i0); \quad x_{-} = \begin{cases} 0; & x > 0 \\ |x|; & x \le 0, \end{cases} \quad (2.12)$$

причём $\Gamma(x)$ – известная гамма-функция Эйлера. Если теперь использовать формулу

$$q^{-}(x) = \frac{1}{F_S}\int_{-\infty}^{x} p^{-}(s)\,ds, \quad (2.13)$$

то на основе (2.11) получим поведение нормальных (осевых) напряжений $q^{-}(x)$, возникающих в упругом полубесконечном стрингере при $x \to -\infty$:

$$q^{-}(x) = \frac{R}{F_S}\left[-\frac{2}{\pi}\frac{1}{Tx} + \frac{2}{\pi^2}\left(\psi(1) + 2 - A_1 - \Gamma'(3) + \ln(T|x|) + \ln\frac{|x|}{2a}\right)\frac{1}{(Tx)^2}\right] + \mathrm{O}\left(\frac{1}{(Tx)^3}\right). \quad (2.14)$$

Теперь приступим к получению асимптотической формулы для функций $p^{-}(x)$ и $q^{-}(x)$ при $x \to -0$. Для этой цели после громоздких и трудоёмких алгебраических преобразований представим функцию $\dfrac{1}{\bar{K}^{-}(\sigma)}$ при $|\sigma| \to \infty$ в следующей форме:

$$\frac{1}{\bar{K}^{-}(\sigma)} = \bar{m}_1^{-}(\sigma) + \bar{m}_2^{-}(\sigma) + \mathrm{O}\left((\sigma - i0)^{-\frac{7}{2}}\ln^2 2a(\sigma - i0)\right), \quad (2.15)$$

причём для функций $\bar{m}_1^{-}(\sigma)$ и $\bar{m}_2^{-}(\sigma)$ введены следующие обозначения:

$$\bar{m}_1^{-}(\sigma) = (\sigma - i0)^{-\frac{1}{2}} + \frac{T}{i\pi}(\sigma - i0)^{-\frac{3}{2}}\left(\ln 2a(\sigma - i0) + c\right) + \frac{T^2}{4}(\sigma - i0)^{-\frac{5}{2}} -$$
$$- \frac{T^2}{2\pi^2}(\sigma - i0)^{-\frac{5}{2}}\left(\ln^2 2a(\sigma - i0) + 2c\ln 2a(\sigma - i0) + c^2\right), \quad (2.16)$$
$$\bar{m}_2^{-}(\sigma) = i(D_1 + D_2)(\sigma - i0)^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}(D_1 + D_2)^2(\sigma - i0)^{-\frac{5}{2}} -$$
$$- \frac{T}{\pi}(D_1 + D_2)(\sigma - i0)^{-\frac{5}{2}}\left(\ln 2a(\sigma - i0) + c\right),$$

где

$$c=1-\ln\left(2T^*\right)+\frac{i\pi}{2};\quad D_1=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(1+\frac{\sigma-ak\sigma^2}{T+\sigma}e^{-2a\sigma}\right)d\sigma,$$

$$D_2=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \ln\left(1-\frac{\sigma-ak\sigma^2}{T+\sigma}e^{-2a\sigma}\right)d\sigma. \tag{2.17}$$

Подставляя (2.9) и (2.16) в (1.26), для функции $\overline{p}^{\,-}(\sigma)$ при $|\sigma|\to\infty$ окончательно получим следующее асимптотическое представление:

$$\overline{p}^{\,-}(\sigma)=R\sqrt{T}e^{-\frac{i\pi}{4}}\left[(\sigma-i0)^{-\frac{1}{2}}+\frac{T}{i\pi}(\sigma-i0)^{-\frac{3}{2}}\left(\ln 2a(\sigma-i0)+c-\frac{\pi}{T}(D_1+D_2)\right)+\right.$$
$$+\left(\frac{T^2}{4}-\frac{1}{2}(D_1+D_2)^2\right)(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}-(\sigma-i0)^{-\frac{5}{2}}\left(\frac{T^2}{2\pi^2}\ln^2 2a(\sigma-i0)+\frac{T^2c^2}{2\pi^2}+\right. \tag{2.18}$$
$$\left.\left.+\left(\frac{T^2c}{\pi^2}+\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)\right)\ln 2a(\sigma-i0)+\frac{Tc}{\pi}(D_1+D_2)\right)\right]+\mathrm{O}\left((\sigma-i0)^{-\frac{7}{2}}\ln^2\left(2a(\sigma-i0)\right)\right).$$

Если теперь применить к (2.18) обратное обобщённое интегральное преобразование Фурье, а также учитывать свойства интеграла Фурье, окончательно для функции $p^-(x)$ при $x\to-0$ получим следующее асимптотическое представление:

$$p^-(x)=R\sqrt{T}\left[\frac{1}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x|^{-\frac{1}{2}}-\frac{T}{\pi^2}\left\{\left(1-\frac{\pi}{T}(D_1+D_2)-\ln\left(T|x|\right)\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}|x|^{\frac{1}{2}}+\right.$$
$$+\left\{\left[-\frac{7}{8}T^2+\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)\left(1-\ln\left(T|x|\right)\right)+\frac{T^2}{2\pi^2}\left(1+\frac{\pi^2}{4}-2\ln\left(T|x|\right)+\ln^2\left(T|x|\right)\right)\right]\frac{1}{\pi}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\frac{(D_1+D_2)^2}{2}-\left[\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)+\frac{T^2}{\pi^2}\left(1-\ln\left(T|x|\right)\right)\right]\frac{1}{\pi}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{T^2}{2\pi^3}\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}|x|^{\frac{3}{2}}\right]+\mathrm{O}\left(|x|^{\frac{5}{2}}\right). \tag{2.19}$$

Теперь пользуясь формулой

$$q^-(x)=\frac{1}{F_S}\int_0^x p^-(s)\,ds+\frac{R}{F_S}, \tag{2.20}$$

с учётом разложения (2.19), для нормальных (осевых) напряжений $q^-(x)$, которые возникают в упругом полубесконечном стрингере при $x\to-0$, получим следующее асимптотическое представление:

$$q^-(x)=\frac{R\sqrt{T}}{F_s}\left[-\frac{2}{\pi}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)|x|^{\frac{1}{2}}+\frac{2T}{3\pi^2}\left\{\left(\frac{5}{3}-\frac{\pi}{T}(D_1+D_2)\right)\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\Gamma'\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}|x|^{\frac{3}{2}}-\right.$$
$$-\frac{2}{5}\left\{\left(-\frac{3}{4}T^2+\left(\frac{D_1+D_2}{2}\right)^2+\frac{7T}{5\pi}(D_1+D_2)+\frac{53T^2}{50\pi^2}\right)\frac{1}{\pi}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2T^2}{\pi^2}+\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)\right)\frac{1}{\pi}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{T^2}{2\pi^3}\Gamma''\left(-\frac{3}{2}\right)\right\}|x|^{\frac{5}{2}}+$$
$$+\left\{-\frac{2T}{3\pi^2}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{5}\left(\left(\frac{T}{\pi}(D_1+D_2)+\frac{7T^2}{5\pi^2}\right)\frac{1}{\pi}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)-\frac{T^2}{\pi^3}\Gamma'\left(-\frac{3}{2}\right)\right)\right\}|x|^{\frac{5}{2}}\ln\left(T|x|\right)-$$

$$-\frac{T^2}{5\pi^3}\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)|x|^{\frac{5}{2}}\ln^2\left(T|x|\right)\Bigg]+\frac{R}{F_S}+O\left(|x|^{\frac{7}{2}}\right). \qquad (2.21)$$

Следует отметить, что первые слагаемые асимптотических разложений (2.11) и (2.21) совпадают с первыми членами соответствующих разложений из [1,2].

Таким образом, построено замкнутое решение рассматриваемой контактной задачи и получены асимптотические формулы для распределения интенсивности тангенциальных контактных усилий $p^-(x)$ и осевых (нормальных) напряжений $q^-(x)$, возникающих в упругом полубесконечном стрингере, которые характеризуют их поведение как вблизи, так и вдали от точки приложения сосредоточенной силы R.

ЛИТЕРАТУРА

1. Melan E. Ein Beitrag zur Theoric gesehweisster Verbindungen. // Ingenieur Archiv, Bd. 3. Heft 2. 1932. S.123-129.
2. Koiter W.T. On the Diffusion of Load from a Stiffener into a Sheet. // The Quart. J. Mech. and Appl. Math. V.8. № 2. 1955. P.164-178.
3. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости. // Уч. записки ЕГУ. Естеств. науки. 1979. № 3.С.29-34.
4. Арутюнян Н.Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. //ПММ. 1968. Т.32. № 4. С.632-646.
5. Саркисян В.С. Контактные задачи для полуплоскостей и полос с упругими накладками. Ереван: Изд.-во ЕГУ, 1983. 260с.
6. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя параллельными полубесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. № 2. С.16-27.
7. Григорян Э.Х., Саркисян К.С. Контактная задача для упругой пластины, усиленной двумя бесконечными стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. № 2. С.3-10.
8. Григорян Э.Х., Оганисян Г.В. Контактная задача для упругой кусочно-однородной бесконечной пластины, усиленной двумя параллельными различными бесконечными упругими стрингерами. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. № 3. С.29-43.
9. Гахов Д.Ф. Краевые задачи. М.: Госиздат, 1963. 639с.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М.: Наука, 1965. 327с.
11. Справочная математическая библиотека. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544с.

Сведения об авторах

Саркисян Карен Самсонович – кандидат физ.-мат. наук, доцент. Декан факультета механики и машиноведения Армянского Государственного Инженерного Университета (Политехник).
Тел: (+374 91) 49-54-55.
E-mail: sarkarmm@seua.am

Оганисян Гамлет Вараздатович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник, преподаватель кафедры механики факультета математики и механики Ереванского Государственного Университета. Ереван, Алека Манукяна, 1.
Тел: (+374 93) 27-26-26.
E-mail: HovhannisyanHamlet@yandex.ru

Поступила в редакцию 22.10.2012