ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №4, 2012 Механика
УДК 539.3

ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ СЛОИСТЫХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Саркисян С.О., Фарманян А.Ж.

Ключевые слова: микрополярный, упругий, слоистый, пластинка, общая теория
Key words: micropolar, elastic, multilayered, plate, general theory**.**

Սարգսյան Ս.Հ., Ֆարմանյան Ա.Ժ.
Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական շերտավոր բարակ սալերի տեսությունը

Աշխատանքում սալի ողջ փաթեթի համար միկրոպոլյար դեպքի համար ընդհանրացված ուղիղ գծի վարկածի հիման վրա կառուցված է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական շերտավոր բարակ սալի ընդհանուր տեսությունը:

Sargsyan S.H., Farmanyan A.J.
Theory of Micropolar Orthotropic Elastic Multilayered Thin Plates

In the present paper general theory of micropolar orthotropic elastic multilayered thin plates is constructed on the basis of generalized for micropolar case kynemathic hypothesis of straight line for the whole package of the plate.

В данной работе на основе обобщённой на микрополярный случай кинематической гипотезы прямой линии для всего пакета пластинки построена общая теория микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин.

Введение. Теория анизотропных упругих слоистых тонких пластин и оболочек на основе классической теории упругости построены в работах [1-5 и др.].

В работах [6-11] построены общие математические модели микрополярных изотропных упругих тонких балок, пластин и оболочек. В данной работе, предполагая справедливость обобщённой на микрополярный случай гипотезы прямой линии для всего пакета пластинки в целом, из трёхмерной теории получены основные уравнения и граничные условия теории упругих тонких пластин, собранных из жёстко связанных между собой микрополярных ортотропных слоёв.

1. Постановка задачи.

Рассмотрим тонкие слоистые пластинки, собранные из n слоев. Материал каждого слоя пластинки подчиняется обобщённому закону Гука для микрополярного ортотропного упругого материала. Предполагается, что все слои пластинки жёстко связаны между собой и работают совместно без скольжения и отрыва.

В качестве исходной плоскости примем срединную плоскость какого-либо k-го слоя или одну из плоскостей контакта между слоями, которую отнесём к криволинейным ортогональным координатам α_1,α_2. Поперечную координату z будем отсчитывать в сторону возрастания внешней нормали к исходной плоскости. Введём некоторые обозначения: H_1, H_2 – параметры Ламе, которые зависят только от α_1,α_2; z_i – координата верхней границы i-го слоя; z_0, z_n – соответственно, координаты нижней и верхней граничных плоскостей.

Торцевые поверхности пластинки определяются уравнениями $\alpha_1 = \text{const}$ или $\alpha_2 = \text{const}$.

Для каждого слоя пластинки будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений [12].

Уравнения равновесия:

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{11}^i\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{21}^i\right)+\frac{\partial\sigma_{31}^i}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{12}^i-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{22}^i=0,$$

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{12}^i\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{22}^i\right)+\frac{\partial\sigma_{32}^i}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\sigma_{21}^i-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\sigma_{11}^i=0,$$

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\sigma_{13}^i\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\sigma_{23}^i\right)+\frac{\partial\sigma_{33}^i}{\partial z}=0, \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{11}^i\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{21}^i\right)+\frac{\partial\mu_{31}^i}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{12}^i-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{22}^i+\left(\sigma_{23}^i-\sigma_{32}^i\right)=0,$$

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{12}^i\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{22}^i\right)+\frac{\partial\mu_{32}^i}{\partial z}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\mu_{21}^i- \tag{1.2}$$

$$-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\mu_{11}^i+\left(\sigma_{31}^i-\sigma_{13}^i\right)=0,$$

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\mu_{13}^i\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\mu_{23}^i\right)+\frac{\partial\mu_{33}^i}{\partial z}+\sigma_{12}^i-\sigma_{21}^i=0.$$

Обобщённый закон Гука:

$$\sigma_{11}^i=A_{11}^i\gamma_{11}^i+A_{12}^i\gamma_{22}^i+A_{13}^i\gamma_{33}^i,\quad \sigma_{22}^i=A_{12}^i\gamma_{11}^i+A_{22}^i\gamma_{22}^i+A_{23}^i\gamma_{33}^i,\quad \sigma_{33}^i=A_{13}^i\gamma_{11}^i+A_{23}^i\gamma_{22}^i+A_{33}^i\gamma_{33}^i,$$

$$\sigma_{12}^i=A_{77}^i\gamma_{12}^i+A_{78}^i\gamma_{21}^i,\quad \sigma_{21}^i=A_{78}^i\gamma_{12}^i+A_{88}^i\gamma_{21}^i,\quad \sigma_{13}^i=A_{56}^i\gamma_{31}^i+A_{66}^i\gamma_{13}^i, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{31}^i=A_{55}^i\gamma_{31}^i+A_{56}^i\gamma_{13}^i,\quad \sigma_{23}^i=A_{44}^i\gamma_{23}^i+A_{45}^i\gamma_{32}^i,\quad \sigma_{32}^i=A_{45}^i\gamma_{23}^i+A_{55}^i\gamma_{32}^i,$$

$$\mu_{11}^i=B_{11}^i\chi_{11}^i+B_{12}^i\chi_{22}^i+B_{13}^i\chi_{33}^i,\quad \mu_{22}^i=B_{12}^i\chi_{11}^i+B_{22}^i\chi_{22}^i+B_{23}^i\chi_{33}^i,\quad \mu_{33}^i=B_{13}^i\chi_{11}^i+B_{23}^i\chi_{22}^i+B_{33}^i\chi_{33}^i,$$

$$\mu_{12}^i=B_{77}^i\chi_{12}^i+B_{78}^i\chi_{21}^i,\quad \mu_{21}^i=B_{78}^i\chi_{12}^i+B_{88}^i\chi_{21}^i,\quad \mu_{13}^i=B_{56}^i\chi_{31}^i+B_{66}^i\chi_{13}^i, \tag{1.4}$$

$$\mu_{31}^i=B_{55}^i\chi_{31}^i+B_{56}^i\chi_{13}^i,\quad \mu_{23}^i=B_{44}^i\chi_{23}^i+B_{45}^i\chi_{32}^i,\quad \mu_{32}^i=B_{45}^i\chi_{23}^i+B_{55}^i\chi_{32}^i,$$

либо в обратной форме

$$\gamma_{11}^i=a_{11}^i\sigma_{11}^i+a_{12}^i\sigma_{22}^i+a_{13}^i\sigma_{33}^i,\quad \gamma_{22}^i=a_{12}^i\sigma_{11}^i+a_{22}^i\sigma_{22}^i+a_{23}^i\sigma_{33}^i,\quad \gamma_{33}^i=a_{13}^i\sigma_{11}^i+a_{23}^i\sigma_{22}^i+a_{33}^i\sigma_{33}^i,$$

$$\gamma_{12}^i=a_{77}^i\sigma_{12}^i+a_{78}^i\sigma_{21}^i,\quad \gamma_{21}^i=a_{78}^i\sigma_{12}^i+a_{88}^i\sigma_{21}^i,\quad \gamma_{13}^i=a_{56}^i\sigma_{31}^i+a_{66}^i\sigma_{13}^i, \tag{1.5}$$

$$\gamma_{31}^i=\tilde{a}_{55}^i\sigma_{31}^i+a_{56}^i\sigma_{13}^i,\quad \gamma_{23}^i=a_{44}^i\sigma_{23}^i+a_{45}^i\sigma_{32}^i,\quad \gamma_{32}^i=a_{45}^i\sigma_{23}^i+a_{55}^i\sigma_{32}^i,$$

$$\chi_{11}^i=b_{11}^i\mu_{11}^i+b_{12}^i\mu_{22}^i+b_{13}^i\mu_{33}^i,\quad \chi_{22}^i=b_{12}^i\mu_{11}^i+b_{22}^i\mu_{22}^i+b_{23}^i\mu_{33}^i,\quad \chi_{33}^i=b_{13}^i\mu_{11}^i+b_{23}^i\mu_{22}^i+b_{33}^i\mu_{33}^i,$$

$$\chi_{12}^i=b_{77}^i\mu_{12}^i+b_{78}^i\mu_{21}^i,\quad \chi_{21}^i=b_{78}^i\mu_{12}^i+b_{88}^i\mu_{21}^i,\quad \chi_{13}^i=b_{56}^i\mu_{31}^i+b_{66}^i\mu_{13}^i, \tag{1.6}$$

$$\chi_{31}^i=\tilde{b}_{55}^i\mu_{31}^i+b_{56}^i\mu_{13}^i,\quad \chi_{23}^i=b_{44}^i\mu_{23}^i+b_{45}^i\mu_{32}^i,\quad \chi_{32}^i=b_{45}^i\mu_{23}^i+b_{55}^i\mu_{32}^i.$$

Геометрические соотношения:

$$\gamma_{11}^i=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_1^i}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_2^i,\quad \gamma_{22}^i=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_2^i}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_1^i,\quad \gamma_{33}^i=\frac{\partial V_3^i}{\partial z},$$

$$\gamma_{12}^i=\frac{1}{H_1}\frac{\partial V_2^i}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}V_1^i-\omega_3^i,\quad \gamma_{21}^i=\frac{1}{H_2}\frac{\partial V_1^i}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}V_2^i+\omega_3^i, \tag{1.7}$$

$$\gamma_{13}^i = \frac{1}{H_1}\frac{\partial V_3^i}{\partial \alpha_1} + \omega_2^i, \quad \gamma_{31}^i = \frac{\partial V_1^i}{\partial z} - \omega_2^i, \quad \gamma_{23}^i = \frac{1}{H_2}\frac{\partial V_3^i}{\partial \alpha_2} - \omega_1^i, \quad \gamma_{32}^i = \frac{\partial V_2^i}{\partial z} + \omega_1^i.$$

$$\chi_{11}^i = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_1^i}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\omega_2^i, \quad \chi_{22}^i = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_2^i}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\omega_1^i,$$

$$\chi_{33}^i = \frac{\partial \omega_3^i}{\partial z}, \quad \chi_{12}^i = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_2^i}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2}\omega_1^i, \quad \chi_{21}^i = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_1^i}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1}\omega_2^i, \tag{1.8}$$

$$\chi_{13}^i = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \omega_3^i}{\partial \alpha_1}, \ \chi_{31}^i = \frac{\partial \omega_1^i}{\partial z}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \chi_{23}^i = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \omega_3^i}{\partial \alpha_2}, \qquad \chi_{32}^i = \frac{\partial \omega_2^i}{\partial z}.$$

Здесь для i-го слоя $\hat{\sigma}^i, \hat{\mu}^i$ – тензоры силовых и моментных напряжений; $\hat{\gamma}^i, \hat{\chi}^i$ – тензоры деформаций и изгиба-кручений; $\vec{V}^i, \vec{\omega}^i$ – векторы перемещений и независимого поворота соответственно; $\hat{A}^i, \hat{B}^i$ или $\hat{a}^i, \hat{b}^i$ – тензоры модулей упругости для микрополярного ортотропного материала.

Условия сопряжения слоёв для перемещений и свободных поворотов записываются в виде:

$$V_1^i = V_1^{i+1}, \quad V_2^i = V_2^{i+1}, \quad V_3^i = V_3^{i+1}, \tag{1.9}$$

$$\omega_1^i = \omega_1^{i+1}, \quad \omega_2^i = \omega_2^{i+1}, \quad \omega_3^i = \omega_3^{i+1} \tag{1.10}$$

при $z = z_i \left(i = 1, 2, ..., n-1\right)$,

а условия сопряжения слоёв для силовых и моментных напряжений формулируются так:

$$\sigma_{31}^i = \sigma_{31}^{i+1}, \quad \sigma_{32}^i = \sigma_{32}^{i+1}, \quad \sigma_{33}^i = \sigma_{33}^{i+1}, \tag{1.11}$$

$$\mu_{31}^i = \mu_{31}^{i+1}, \quad \mu_{32}^i = \mu_{32}^{i+1}, \quad \mu_{33}^i = \mu_{33}^{i+1} \tag{1.12}$$

при $z = z_i \left(i = 1, 2, ..., n-1\right)$.

На лицевых плоскостях пластинки $\left(z = z_n, \ z = z_0\right)$ выполняются условия первой граничной задачи:

$$\sigma_{31}^{n,0} = \pm q_1^{\pm}, \quad \sigma_{32}^{n,0} = \pm q_2^{\pm}, \quad \sigma_{33}^{n,0} = \pm q_3^{\pm}, \tag{1.13}$$

$$\mu_{31}^{n,0} = \pm m_1^{\pm}, \quad \mu_{32}^{n,0} = \pm m_2^{\pm}, \quad \mu_{33}^{n,0} = \pm m_3^{\pm}. \tag{1.14}$$

Граничные условия на торцевых плоскостях пластинки $\alpha_1 = \text{const}$, $\alpha_2 = \text{const}$ могут быть сформулированы в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

2. Основные гипотезы. Будем считать, что слоистая пластинка тонкая, т.е. $2h \ll a$, где $2h$ – общая толщина пластинки, a – характерный размер в плане пластинки. При построении теории многослойных микрополярных ортотропных упругих тонких пластин будем пользоваться гипотезами, суть которых состоит в следующем.

1) Примем, что для всего пакета пластинки в целом, как и для ранее рассмотренного случая однослойных изотропных пластин [7], справедлива обобщённая на микрополярный случай гипотеза прямой линии.

В соответствии с указанной гипотезой имеем линейный закон изменения перемещений и свободных вращений по толщине всего пакета:

$$V_1^i = u_1 + z\psi_1, \quad V_2^i = u_2 + z\psi_2, \; V_3^i = w, \tag{2.1}$$

$$\omega_1^i = \Omega_1, \; \omega_2^i = \Omega_2, \quad \omega_3^i = \Omega_3 + z\iota, \tag{2.2}$$

где $u_1, u_2, w -$ перемещения точек координатной плоскости в направлениях осей α_1, α_2, z; $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3 -$ свободные повороты этих же точек вокруг осей α_1, α_2, z соответственно; $\psi_1, \psi_2 -$ полные углы поворота первоначально нормального элемента; ι – интенсивность поворота точек нормального элемента вокруг оси z.

Отметим, что указанная кинематическая гипотеза – только для перемещений ((2.1)), это, по сути дела, известная гипотеза Тимошенко в классической теории пластин или оболочек [3,4]. С этой точки зрения гипотеза (2.1), (2.2) в целом в работах [6-11] была названа обобщённой на микрополярный случай кинематической гипотезой Тимошенко.

Кинематическая гипотеза (2.1), (2.2) дополняется следующими статическими гипотезами:

2) о малости для каждого i-го слоя силового напряжения σ_{33}^i по сравнению с другими компонентами тензора силовых напряжений в уравнениях обобщённого закона Гука (1.5);

3) о малости моментных напряжений μ_{31}^i, μ_{32}^i по сравнению с моментными напряжениями μ_{13}^i, μ_{23}^i (в соответствующих уравнениях обобщенного закон Гука (1.6) для каждого i-го слоя μ_{31}^i, μ_{32}^i пренебрегаются относительно μ_{13}^i, μ_{23}^i);

4) при определении в каждом слое деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений сначала для силовых напряжений $\sigma_{31}^i, \sigma_{32}^i$ и моментного напряжения μ_{33}^i примем

$$\sigma_{31}^i = \overset{0\,i}{\sigma_{31}}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \sigma_{32}^i = \overset{0\,i}{\sigma_{32}}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \mu_{33}^i = \overset{0\,i}{\mu_{33}}(\alpha_1, \alpha_2). \tag{2.3}$$

После определения указанных величин, окончательные выражения для $\sigma_{31}^i, \sigma_{32}^i, \mu_{33}^i$ определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования соответствующего уравнения равновесия из (1.1), (1.2) с требованием для последнего слагаемого условие: о равенстве нулю усреднённой по толщине пластинки величины.

Кинематическая гипотеза прямой линии, сформулированная для всего пакета пластинки в целом, привела к геометрическим соотношениям (2.1), (2.2), вследствие чего геометрические условия контакта (1.9), (1.10) выполняются автоматически.

3. Законы распределения компонентов тензоров деформаций и изгибов-кручений по толщине i-го слоя.

В соответствии с принятым законом распределения перемещений и свободных поворотов ((2.1), (2.2)), подставляя их в геометрические формулы (1.7), (1.8) и сохраняя в выражениях только линейные члены по z, находим:

$$\begin{gathered}
\gamma_{11}^i = \Gamma_{11}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{22}^i = \Gamma_{22}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{22}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{33}^i = 0, \\
\gamma_{12}^i = \Gamma_{12}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{12}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{21}^i = \Gamma_{21}(\alpha_1, \alpha_2) + zK_{21}(\alpha_1, \alpha_2), \qquad (3.1) \\
\gamma_{13}^i = \Gamma_{13}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{31}^i = \Gamma_{31}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{23}^i = \Gamma_{23}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \gamma_{32}^i = \Gamma_{32}(\alpha_1, \alpha_2), \\
\chi_{11}^i = k_{11}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{22}^i = k_{22}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{33}^i = k_{33}(\alpha_1, \alpha_2), \quad \chi_{12}^i = k_{12}(\alpha_1, \alpha_2),
\end{gathered}$$

$$\chi_{21}^{i}=k_{21}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \chi_{13}^{i}=k_{13}(\alpha_1,\alpha_2)+zl_{13}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \chi_{31}^{i}=0, \tag{3.2}$$
$$\chi_{23}^{i}=k_{23}(\alpha_1,\alpha_2)+zl_{23}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \chi_{32}^{i}=0.$$
где
$$\Gamma_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}u_2,$$
$$\Gamma_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}u_1,\ \Gamma_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}u_1-\Omega_3,$$
$$\Gamma_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}u_2+\Omega_3,\quad \Gamma_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial w}{\partial\alpha_1}+\Omega_2,$$
$$\Gamma_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha_2}-\Omega_1,\qquad \Gamma_{31}=\psi_1-\Omega_2,\ \Gamma_{32}=\psi_2+\Omega_1. \tag{3.3}$$
$$K_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\psi_2,\qquad K_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\psi_1,$$
$$K_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\psi_1-\iota,\ K_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\psi_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\psi_2+\iota,$$
$$k_{11}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_2,\qquad k_{22}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\Omega_1, \tag{3.4}$$
$$k_{33}=\iota,\quad k_{12}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\Omega_2}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\Omega_1,\ k_{21}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\Omega_1}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\Omega_2,$$
$$k_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_1},\quad l_{13}=\frac{1}{H_1}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_1},\quad k_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_2},\quad l_{23}=\frac{1}{H_2}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_2}.$$

Здесь $\Gamma_{11},\Gamma_{22},\Gamma_{12},\Gamma_{21}-$ компоненты тангенциальной деформации в исходной плоскости; $\Gamma_{13},\Gamma_{23},\Gamma_{31},\Gamma_{32}-$ компоненты сдвиговой деформации; $K_{11},K_{22},K_{12},K_{21},\ k_{11},k_{22},k_{33},k_{12},\ k_{21},k_{13},k_{31},k_{23},k_{32}-$ компоненты изгибно-крутильных деформаций исходной плоскости; $l_{13},l_{23}-$ компоненты гипер-крутильно- сдвиговых деформаций.

4. Законы распределения компонентов тензоров силовых и моментных напряжений по толщине i-го слоя.

На основе обобщённого закона Гука (1.5), (1.6), имея в виду статические гипотезы 2-4, для силовых и моментных напряжений для i-го слоя пластинки получим:

$$\sigma_{11}^{i}=\overset{0\,i}{\sigma_{11}}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1\,i}{\sigma_{11}}(\alpha_1,\alpha_2),\qquad \sigma_{22}^{i}=\overset{0\,i}{\sigma_{22}}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1\,i}{\sigma_{22}}(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$\sigma_{12}^{i}=\overset{0\,i}{\sigma_{12}}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1\,i}{\sigma_{12}}(\alpha_1,\alpha_2),\qquad \sigma_{21}^{i}=\overset{0\,i}{\sigma_{21}}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{0\,i}{\sigma_{21}}(\alpha_1,\alpha_2),$$
$$\sigma_{13}^{i}=\overset{0\,i}{\sigma_{13}}(\alpha_1,\alpha_2),\ \sigma_{23}^{i}=\overset{0\,i}{\sigma_{23}}(\alpha_1,\alpha_2),\ \mu_{11}^{i}=\overset{0\,i}{\mu_{11}}(\alpha_1,\alpha_2),\ \mu_{22}^{i}=\overset{0\,i}{\mu_{22}}(\alpha_1,\alpha_2), \tag{4.1}$$

$$\sigma_{31}^{i}=\overset{0}{\sigma}_{31}(\alpha_1,\alpha_2)+\left[z-\frac{z_i+z_{i-1}}{2}\right]\overset{1\,i}{\sigma}_{31}(\alpha_1,\alpha_2)+\left[z^2-\frac{z_{i-1}^2+z_{i-1}z_i+z_i^2}{3}\right]\overset{2\,i}{\sigma}_{31}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\sigma_{32}^{i}=\overset{0}{\sigma}_{32}(\alpha_1,\alpha_2)+\left[z-\frac{z_i+z_{i-1}}{2}\right]\overset{1\,i}{\sigma}_{32}(\alpha_1,\alpha_2)+\left[z^2-\frac{z_{i-1}^2+z_{i-1}z_i+z_i^2}{3}\right]\overset{2\,i}{\sigma}_{32}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mu_{12}^{i}=\overset{0\,i}{\mu}_{12}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \mu_{21}^{i}=\overset{0\,i}{\mu}_{21}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \sigma_{33}^{i}=\overset{0\,i}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1\,i}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mu_{31}^{i}=\overset{0\,i}{\mu}_{31}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1\,i}{\mu}_{31}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \mu_{32}^{i}=\overset{0\,i}{\mu}_{32}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1\,i}{\mu}_{32}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mu_{13}^{i}=\overset{0\,i}{\mu}_{13}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1\,i}{\mu}_{13}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \mu_{23}^{i}=\overset{0\,i}{\mu}_{23}(\alpha_1,\alpha_2)+z\overset{1\,i}{\mu}_{23}(\alpha_1,\alpha_2),\quad (4.2)$$

$$\mu_{33}^{i}=\overset{0}{\mu}_{33}+\left[z-\frac{z_i+z_{i-1}}{2}\right]\overset{1\,i}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)+\left[z^2-\frac{z_{i-1}^2+z_{i-1}z_i+z_i^2}{3}\right]\overset{2\,i}{\mu}_{33}(\alpha_1,\alpha_2),$$

где

$$\overset{0\,i}{\sigma}_{11}=\frac{a_{22}^i}{a_{11}^ia_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\Gamma_{11}-\frac{a_{12}^i}{a_{11}^ia_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\Gamma_{22},\quad \overset{1\,i}{\sigma}_{11}=\frac{a_{22}^i}{a_{11}^ia_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}K_{11}-\frac{a_{12}^i}{a_{11}^ia_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}K_{22},$$

$$\overset{0\,i}{\sigma}_{22}=\frac{a_{11}^i}{a_{11}^ia_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\Gamma_{22}-\frac{a_{12}^i}{a_{11}^ia_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\Gamma_{11},\quad \overset{1\,i}{\sigma}_{22}=\frac{a_{11}^i}{a_{11}^ia_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}K_{22}-\frac{a_{12}^i}{a_{11}^ia_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}K_{11},$$

$$\overset{0\,i}{\sigma}_{12}=\frac{a_{88}^i}{a_{77}^ia_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\Gamma_{12}-\frac{a_{78}^i}{a_{77}^ia_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\Gamma_{21},\ \overset{1\,i}{\sigma}_{12}=\frac{a_{88}^i}{a_{77}^ia_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}K_{12}-\frac{a_{78}^i}{a_{77}^ia_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}K_{21},\ (4.3)$$

$$\overset{0\,i}{\sigma}_{21}=\frac{a_{77}^i}{a_{77}^ia_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\Gamma_{21}-\frac{a_{78}^i}{a_{77}^ia_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\Gamma_{12},\quad \overset{1\,i}{\sigma}_{21}=\frac{a_{77}^i}{a_{77}^ia_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}K_{21}-\frac{a_{78}^i}{a_{77}^ia_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}K_{12},$$

$$\overset{0\,i}{\sigma}_{13}=\frac{\tilde{a}_{55}^i}{\tilde{a}_{55}^ia_{66}^i-\left(a_{56}^i\right)^2}\Gamma_{13}-\frac{a_{56}^i}{\tilde{a}_{55}^ia_{66}^i-\left(a_{56}^i\right)^2}\Gamma_{31},\ \overset{0\,i}{\sigma}_{23}=\frac{a_{55}^i}{a_{44}^ia_{55}^i-\left(a_{45}^i\right)^2}\Gamma_{23}-\frac{a_{45}^i}{a_{44}^ia_{55}^i-\left(a_{45}^i\right)^2}\Gamma_{32},$$

$$\overset{1\,i}{\sigma}_{31}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{0\,i}{\sigma}_{11}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{0\,i}{\sigma}_{21}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\overset{0\,i}{\sigma}_{12}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_2}\overset{0\,i}{\sigma}_{22},$$

$$\overset{2\,i}{\sigma}_{31}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{1\,i}{\sigma}_{11}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{1\,i}{\sigma}_{21}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\overset{1\,i}{\sigma}_{12}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\overset{1\,i}{\sigma}_{22}\right\},$$

$$\overset{1\,i}{\sigma}_{32}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{0\,i}{\sigma}_{12}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{0\,i}{\sigma}_{22}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\overset{0\,i}{\sigma}_{21}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\overset{0\,i}{\sigma}_{11},$$

$$\overset{2\,i}{\sigma}_{32}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{1\,i}{\sigma}_{12}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{1\,i}{\sigma}_{22}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\overset{1\,i}{\sigma}_{21}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\overset{1\,i}{\sigma}_{11}\right\},$$

$$\overset{1\,i}{\sigma}_{33}(\alpha_1,\alpha_2)=-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{0\,i}{\sigma}_{13}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{0\,i}{\sigma}_{23}\right),$$

$$\overset{0\,i}{\sigma}_{31}=\frac{a_{66}^i}{\tilde{a}_{55}^ia_{66}^i-\left(a_{56}^i\right)^2}\Gamma_{31}-\frac{a_{56}^i}{\tilde{a}_{55}^ia_{66}^i-\left(a_{66}^i\right)^2}\Gamma_{13},\quad \overset{0\,i}{\sigma}_{32}=\frac{a_{44}^i}{a_{44}^ia_{55}^i-\left(a_{45}^i\right)^2}\Gamma_{32}-\frac{a_{45}^i}{a_{44}^ia_{55}^i-\left(a_{45}^i\right)^2}\Gamma_{23},$$

$$\overset{0\,i}{\mu}_{11}=\frac{b_{22}^ib_{33}^i-\left(b_{23}^i\right)^2}{\Delta}k_{11}+\frac{b_{13}^ib_{23}^i-b_{12}^ib_{33}^i}{\Delta}k_{22}+\frac{b_{12}^ib_{23}^i-b_{22}^ib_{13}^i}{\Delta}\iota,$$

$$\overset{0\,i}{\mu}_{22}=\frac{b_{13}^{i}b_{23}^{i}-b_{12}^{i}b_{33}^{i}}{\Delta}k_{11}+\frac{b_{11}^{i}b_{33}^{i}-\left(b_{13}^{i}\right)^{2}}{\Delta}k_{22}+\frac{b_{12}^{i}b_{13}^{i}-b_{11}^{i}b_{23}^{i}}{\Delta}\iota,$$

$$\overset{0\,i}{\mu}_{33}=\frac{b_{12}^{i}b_{23}^{i}-b_{13}^{i}b_{22}^{i}}{\Delta}k_{11}+\frac{b_{12}^{i}b_{13}^{i}-b_{11}^{i}b_{23}^{i}}{\Delta}k_{22}+\frac{b_{11}^{i}b_{22}^{i}-\left(b_{12}^{i}\right)}{\Delta}\iota,\quad \Delta=\begin{vmatrix} b_{11}^{i} & b_{12}^{i} & b_{13}^{i}\\ b_{12}^{i} & b_{22}^{i} & b_{23}^{i}\\ b_{13}^{i} & b_{23}^{i} & b_{33}^{i}\end{vmatrix},$$

$$\overset{0\,i}{\mu}_{12}=\frac{b_{88}^{i}}{b_{77}^{i}b_{88}^{i}-\left(b_{78}^{i}\right)^{2}}k_{12}-\frac{b_{78}^{i}}{b_{77}^{i}b_{88}^{i}-\left(b_{78}^{i}\right)^{2}}k_{21},$$

$$\overset{0\,i}{\mu}_{21}=\frac{b_{77}^{i}}{b_{77}^{i}b_{88}^{i}-\left(b_{78}^{i}\right)^{2}}k_{21}-\frac{b_{78}^{i}}{b_{77}^{i}b_{88}^{i}-\left(b_{78}^{i}\right)^{2}}k_{12},$$

$$\overset{1\,i}{\mu}_{31}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{0\,i}{\mu}_{11}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{0\,i}{\mu}_{21}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\overset{0\,i}{\mu}_{12}+ \tag{4.4}$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\overset{0\,i}{\mu}_{22}-\left(\overset{0\,i}{\sigma}_{23}-\overset{0\,i}{\sigma}_{32}\right),$$

$$\overset{1\,i}{\mu}_{32}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{0\,i}{\mu}_{12}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{0\,i}{\mu}_{22}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\overset{0\,i}{\mu}_{21}+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\overset{0\,i}{\mu}_{11}-\left(\overset{0\,i}{\sigma}_{31}-\overset{0\,i}{\sigma}_{13}\right),$$

$$\overset{1\,i}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{0\,i}{\mu}_{13}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{0\,i}{\mu}_{23}\right)-\left(\overset{0\,i}{\sigma}_{12}-\overset{0\,i}{\sigma}_{21}\right),$$

$$\overset{2\,i}{\mu}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2\right)=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\overset{1\,i}{\mu}_{13}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\overset{1\,i}{\mu}_{23}\right)+\left(\overset{1\,i}{\sigma}_{12}-\overset{1\,i}{\sigma}_{21}\right)\right],$$

$$\overset{0\,i}{\mu}_{13}=\frac{1}{b_{66}^{i}}k_{13},\qquad \overset{1\,i}{\mu}_{13}=\frac{1}{b_{66}^{i}}l_{13},\qquad \overset{0\,i}{\mu}_{23}=\frac{1}{b_{44}^{i}}k_{23},\qquad \overset{1\,i}{\mu}_{23}=\frac{1}{b_{44}^{i}}l_{23}.$$

5. Внутренние усилия, моменты и гипермоменты.

С целью приведения трёхмерной задачи к двумерной, что уже выполнено для перемещений, поворотов, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных слоистых пластин вместо компонент тензоров напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные по толщине пакета пластинки характеристики – усилия, моменты и гипермоменты:

$$T_{11}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i}\sigma_{11}^{i}dz,\quad T_{22}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i}\sigma_{22}^{i}dz,\ S_{12}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i}\sigma_{12}^{i}dz,\ S_{21}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i}\sigma_{21}^{i}dz, \tag{5.1}$$

$$M_{11}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} z\sigma_{11}^i dz,\ M_{22}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} z\sigma_{22}^i dz,\ H_{12}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} z\sigma_{12}^i dz,\ H_{21}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} z\sigma_{21}^i dz,$$

$$L_{11}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{11}^i dz,\ L_{22}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{22}^i dz,\ L_{12}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{12}^i dz,\ L_{21}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{21}^i dz,$$

$$L_{33}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{33}^i dz,\ L_{13}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{13}^i dz,\ L_{23}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} \mu_{23}^i dz,$$

$$\Lambda_{13}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} z\mu_{13}^i dz,\quad \Lambda_{23}=\sum_{i=1}^{n}\int_{z_{i-1}}^{z_i} z\mu_{23}^i dz. \tag{5.2}$$

6. Основная система уравнений микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Двумерная система уравнений равновесия может быть получена из равенств, определяющих силовые и моментные напряжения $\sigma_{31},\sigma_{32},\sigma_{33},\mu_{31},\mu_{32},\mu_{33}$, в результате удовлетворения статических условий сопряжения слоёв (1.11), (1.12) и статических граничных условий на лицевых плоскостях пластинки $z=z_0$, $z=z_n$ (1.13), (1.14).

Таким образом, будем иметь следующие

уравнения равновесия:

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial T_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(T_{11}-T_{22}\right)+\frac{1}{H_2}\frac{\partial S_{21}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(S_{21}+S_{12}\right)=-\left(q_1^+ +q_1^-\right),$$

$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial T_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(T_{22}-T_{11}\right)+\frac{1}{H_1}\frac{\partial S_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(S_{12}+S_{21}\right)=-\left(q_2^+ +q_2^-\right),$$

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2N_{13}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1N_{23}\right)=-\left(q_3^+ +q_3^-\right), \tag{6.1}$$

$$N_{31}-\frac{1}{H_1}\frac{\partial M_{11}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(M_{11}-M_{22}\right)-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_{21}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(H_{21}+H_{12}\right)=z_nq_1^+ +z_0q_1^-,$$

$$N_{32}-\frac{1}{H_2}\frac{\partial M_{22}}{\partial\alpha_2}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(M_{22}-M_{11}\right)-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(H_{12}+H_{21}\right)=z_nq_2^+ +z_0q_2^-,$$

$$\frac{1}{H_1}\frac{\partial L_{11}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_2}\frac{\partial L_{21}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{11}-L_{22}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{21}+L_{12}\right)+N_{23}-N_{32}=-\left(m_1^+ +m_1^-\right),$$

$$\frac{1}{H_2}\frac{\partial L_{22}}{\partial\alpha_2}+\frac{1}{H_1}\frac{\partial L_{12}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\left(L_{22}-L_{11}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}\left(L_{12}+L_{21}\right)+N_{31}-N_{13}=-\left(m_2^+ +m_2^-\right),$$

$$\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2L_{13}\right)+\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1L_{23}\right)+S_{12}-S_{21}=-\left(m_3^+ +m_3^-\right), \tag{6.2}$$

$$L_{33}-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(H_2\Lambda_{13}\right)-\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(H_1\Lambda_{23}\right)-\left(H_{12}-H_{21}\right)=z_nm_3^+ +z_0m_3^-.$$

Усилия, моменты и гипермоменты, приложенные к исходной плоскости пакета пластинки определим, используя для силовых и моментных напряжений формулы (4.1)-(4.4) и применяя зависимости (5.1), (5.2). Будем иметь следующие соотношения упругости:

$$T_{11}=C_{11}\Gamma_{11}+C_{12}\Gamma_{22}+R_{11}K_{11}+R_{12}K_{22},\qquad T_{22}=C_{12}\Gamma_{11}+C_{22}\Gamma_{22}+R_{12}K_{11}+R_{22}K_{22},$$
$$S_{12}=C_{88}\Gamma_{12}+C_{78}\Gamma_{21}+R_{88}K_{12}+R_{78}K_{21},\qquad S_{21}=C_{77}\Gamma_{21}+C_{78}\Gamma_{12}+R_{77}K_{21}+R_{78}K_{12},$$
$$N_{13}=\tilde{C}_{55}\Gamma_{13}+C_{56}\Gamma_{31},\qquad N_{23}=C_{55}\Gamma_{23}+C_{45}\Gamma_{32},\qquad N_{31}=C_{66}\Gamma_{31}+C_{56}\Gamma_{13},\tag{6.3}$$
$$N_{32}=C_{44}\Gamma_{32}+C_{45}\Gamma_{23},\qquad M_{11}=D_{11}K_{11}+D_{12}K_{22}+R_{11}\Gamma_{11}+R_{12}\Gamma_{22},$$
$$M_{22}=D_{12}K_{11}+D_{22}K_{22}+R_{12}\Gamma_{11}+R_{22}\Gamma_{22},\qquad H_{12}=D_{88}K_{12}+D_{78}K_{21}+R_{88}\Gamma_{12}+R_{78}\Gamma_{21},$$
$$H_{21}=D_{77}K_{21}+D_{78}K_{12}+R_{77}\Gamma_{21}+R_{78}\Gamma_{12},$$

$$L_{11}=d_{11}k_{11}+d_{12}k_{22}+d_{13}\iota,\quad L_{22}=d_{12}k_{11}+d_{22}k_{22}+d_{23}\iota,\quad L_{33}=d_{13}k_{11}+d_{23}k_{22}+d_{33}\iota,$$
$$L_{12}=d_{88}k_{12}+d_{78}k_{21},\qquad L_{21}=d_{78}k_{12}+d_{77}k_{21},\qquad L_{13}=d_{66}k_{13}+\eta_{66}l_{13},\tag{6.4}$$
$$L_{23}=d_{44}k_{23}+\eta_{44}l_{23},\qquad \Lambda_{13}=\lambda_{66}l_{13}+\eta_{66}k_{13},\qquad \Lambda_{23}=\lambda_{44}l_{23}+\eta_{44}k_{23},$$

где приняты следующие обозначения:

$$C_{11}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),\qquad C_{12}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),$$

$$R_{11}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{22}^i}{a_{11}^i a_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\frac{1}{2}\left(z_i^2-z_{i-1}^2\right),\qquad R_{12}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{12}^i}{a_{11}^i a_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\frac{1}{2}\left(z_i^2-z_{i-1}^2\right),$$

$$C_{22}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),\qquad R_{22}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{11}^i}{a_{11}^i a_{22}^i-\left(a_{12}^i\right)^2}\frac{1}{2}\left(z_i^2-z_{i-1}^2\right),$$

$$C_{88}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),\qquad C_{78}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),\tag{6.5}$$

$$R_{88}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{88}^i}{a_{77}^i a_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\frac{1}{2}\left(z_i^2-z_{i-1}^2\right),\qquad R_{78}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{78}^i}{a_{77}^i a_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\frac{1}{2}\left(z_i^2-z_{i-1}^2\right),$$

$$C_{77}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{77}^i}{a_{77}^i a_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),\qquad R_{77}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{77}^i}{a_{77}^i a_{88}^i-\left(a_{78}^i\right)^2}\frac{1}{2}\left(z_i^2-z_{i-1}^2\right),$$

$$\tilde{C}_{55}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\tilde{a}_{55}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i-\left(a_{56}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),\qquad C_{56}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{56}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i-\left(a_{56}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),$$

$$C_{55}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{55}^i}{a_{44}^i a_{55}^i-\left(a_{45}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),\qquad C_{45}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{45}^i}{a_{44}^i a_{55}^i-\left(a_{45}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),$$

$$C_{44}=\sum_{i=1}^{n}\left(z_i-z_{i-1}\right)\frac{a_{44}^i}{a_{44}^i a_{55}^i-\left(a_{45}^i\right)^2},\qquad C_{66}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{66}^i}{\tilde{a}_{55}^i a_{66}^i-\left(a_{56}^i\right)^2}\left(z_i-z_{i-1}\right),$$

$$D_{11}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{22}^{i}}{a_{11}^{i}a_{22}^{i}-\left(a_{12}^{i}\right)^{2}}\frac{1}{3}\left(z_{i}^{3}-z_{i-1}^{3}\right),\qquad D_{12}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{12}^{i}}{a_{11}^{i}a_{22}^{i}-\left(a_{12}^{i}\right)^{2}}\frac{1}{3}\left(z_{i}^{3}-z_{i-1}^{3}\right),$$

$$D_{22}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{11}^{i}}{a_{11}^{i}a_{22}^{i}-\left(a_{12}^{i}\right)^{2}}\frac{1}{3}\left(z_{i}^{3}-z_{i-1}^{3}\right),\qquad D_{88}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{88}^{i}}{a_{77}^{i}a_{88}^{i}-\left(a_{78}^{i}\right)^{2}}\frac{1}{3}\left(z_{i}^{3}-z_{i-1}^{3}\right),$$

$$D_{78}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{78}^{i}}{a_{77}^{i}a_{88}^{i}-\left(a_{78}^{i}\right)^{2}}\frac{1}{3}\left(z_{i}^{3}-z_{i-1}^{3}\right),\quad D_{77}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{77}^{i}}{a_{77}^{i}a_{88}^{i}-\left(a_{78}^{i}\right)^{2}}\frac{1}{3}\left(z_{i}^{3}-z_{i-1}^{3}\right),\quad (6.6)$$

$$R_{88}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{88}^{i}}{a_{77}^{i}a_{88}^{i}-\left(a_{78}^{i}\right)^{2}}\frac{1}{2}\left(z_{i}^{2}-z_{i-1}^{2}\right),\qquad R_{78}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{78}^{i}}{a_{77}^{i}a_{88}^{i}-\left(a_{78}^{i}\right)^{2}}\frac{1}{2}\left(z_{i}^{2}-z_{i-1}^{2}\right),$$

$$d_{11}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{22}^{i}b_{33}^{i}-\left(b_{23}^{i}\right)^{2}}{\Delta}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),\qquad d_{12}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{13}^{i}b_{23}^{i}-b_{12}^{i}b_{33}^{i}}{\Delta}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),$$

$$d_{13}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{12}^{i}b_{23}^{i}-b_{22}^{i}b_{13}^{i}}{\Delta}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),\qquad d_{22}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{11}^{i}b_{33}^{i}-\left(b_{13}^{i}\right)}{\Delta}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),\qquad (6.7)$$

$$d_{23}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{12}^{i}b_{13}^{i}-b_{11}^{i}b_{23}^{i}}{\Delta}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),\qquad d_{33}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{11}^{i}b_{22}^{i}-\left(b_{12}^{i}\right)^{2}}{\Delta}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),$$

$$d_{77}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{77}^{i}}{b_{77}^{i}b_{88}^{i}-\left(b_{78}^{i}\right)^{2}}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),\quad d_{78}=-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{78}^{i}}{b_{77}^{i}b_{88}^{i}-\left(b_{78}^{i}\right)^{2}}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),$$

$$d_{88}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_{88}^{i}}{b_{77}^{i}b_{88}^{i}-\left(b_{78}^{i}\right)^{2}}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),$$

$$d_{66}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_{66}^{i}}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),\ d_{44}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_{44}^{i}}\left(z_{i}-z_{i-1}\right),\quad \eta_{66}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{1}{b_{66}^{i}}\left(z_{i}^{2}-z_{i-1}^{2}\right),$$

$$\eta_{44}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\frac{1}{b_{44}^{i}}\left(z_{i}^{2}-z_{i-1}^{2}\right),\ \lambda_{66}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\frac{1}{b_{66}^{i}}\left(z_{i}^{3}-z_{i-1}^{3}\right),\ \lambda_{44}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3}\frac{1}{b_{44}^{i}}\left(z_{i}^{3}-z_{i-1}^{3}\right).\qquad (6.8)$$

7. Граничные условия. Отметим, что в построенной теории микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких пластин, когда для всего пакета пластинки в целом справедлива обобщённая гипотеза прямой линии, граничные условия (естественные) ничем не будут отличаться от соответствующих граничных условий теории микрополярных изотропных однослойных оболочек [8-11].

Граничные условия (при $\alpha_1=\text{const}$)

$$T_{11}=T_{11}^{*}\ \text{ или }\ u_1=u_1^{*},\quad S_{12}=S_{12}^{*}\ \text{ или }\ u_2=u_2^{*},\quad N_{13}=N_{13}^{*}\ \text{ или }\ w=w^{*},$$

$$M_{11}=M_{11}^{*}\ \text{ или }\ K_{11}=K_{11}^{*},\quad H_{12}=H_{12}^{*}\ \text{ или }\ K_{12}=K_{12}^{*},\qquad (6.9)$$

$$L_{11}=L_{11}^{*}\ \text{ или }\ \kappa_{11}=\kappa_{11}^{*},\quad L_{12}=L_{12}^{*}\ \text{ или }\ \kappa_{12}=\kappa_{12}^{*},$$

$$L_{13}=L_{13}^{*}\ \text{ или }\ \kappa_{13}=\kappa_{13}^{*},\quad \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^{*}\ \text{ или }\ l_{13}=l_{13}^{*}.\qquad (6.10)$$

8. Заключение. Основной результат работы представляет собой построение общей теории микрополярных упругих ортотропных слоистых тонких пластин (основные уравнения – это уравнения равновесия (6.1), (6.2); соотношения упругости (6.3), (6.4); геометрические соотношения (3.3), (3.4); граничные условия: (6.9), (6.10)).

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армении в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. М.: Наука,1974. 446с.
3. Григоренко Я.М., Василенко А.Т. Теория оболочек переменной жёсткости. Киев: Наукова думка, 1981. 544с.
4. Григолюк Э.И., Куликов Г.М. Многослойные армированные оболочки. Расчёт пневматических шин. М.: Машиностроение, 1988. 288с.
5. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций М.: Машиностроение, 1980. 376с.
6. Sargsyan S.H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micro polar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering. 2012. Vol.2. №1. P.98-108.
7. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №1. С.58-67.
8. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Физическая мезомеханика. 2011.Т.14. №1.С.55-66.
9. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН. 2011. Т.436. №2. С.195-198.
10. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells //Advanced Structured Materials. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer.2011.Vol.15. P.91-100.
11. Саркисян С.О., Фарманян А.Ж. Математическая модель микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких оболочек //Вестник Перьмского национально-исследовательского политехнического университета. Механика. 2011. №3. С.128-145.
12. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович,
Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.
Тел.: (093) 15 16 98
E-mail: slusin@yahoo.com

Фарманян Анаит Жораевна,
Кандидат физ-мат. наук, доцент, проректор по науке и внешним связям Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.
Тел.: (077) 80 24 25
E-mail: afarmanyan@yahoo.com

Поступила в редакцию 17.04.2012