

**УЕДИНЁННЫЕ ВОЛНЫ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ  
СРЕДЕ КОССЕРА\***

**Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И.**

**Ключевые слова:** среда Коссера, солитоны, периодические волны  
**Key words:** Cosserat medium, solitary waves, periodic waves

**Վիճակագրող Յու. Վ., Երոֆեև Վ. Ի.**

**Առանձնացված ալիքներ Կոսսերայի երկրաչափորեն ոչ գծային միջավայրում**

Հոդվածում քննարկվում է ոչ գծային առանձնացված ալիքների առաջացման հնարավորությունը Կոսսերայի միջավայրում:

**Vinogradova Yu.V., Erofeyev V.I.**

**Solitary waves in the geometrically nonlinear Cosserat medium**

In this article we analyze the possibility of formation of nonlinear stationary solitary waves in the Cosserat medium

В статье рассматривается возможность формирования нелинейной уединённой стационарной волны в среде Коссера.

Динамические процессы в среде Коссера, характеризуемой вектором перемещений  $\vec{u}$  и вектором поворота  $\vec{\varphi}$ , описываются системой уравнений:

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_i = \sigma_{ji,j} + x_i, \\ J \ddot{\varphi}_i = \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + \mu_{ji,j} + y_i \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $u_i$  – компоненты вектора перемещения;  $\varphi_i$  – компоненты вектора поворота;  $\sigma_{ij}$  – тензор напряжений;  $\mu_{ij}$  – тензор моментов;  $x_i$  – компоненты вектора массовых сил;  $y_i$  – компоненты вектора массовых моментов;  $\rho$  – плотность;  $J$  – мера инерции при вращении;  $\epsilon_{ijk}$  – тензор Леви-Чивиты, т.е. антисимметричный тензор.

Напряжённое состояние среды Коссера описывается несимметричным тензором напряжений  $\sigma_{ji}$  и тензором моментных напряжений  $\mu_{ji}$ , вычисляемых по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + (\lambda \gamma_{kk} - \nu \theta) \delta_{ij} \\ \mu_{ji} = (\gamma + \varepsilon) \kappa_{ji} + (\gamma - \varepsilon) \kappa_{ij} + (\beta \kappa_{kk} - \chi \theta) \delta_{ij} \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mu, \lambda$  – постоянные Ламе,  $\nu, \chi$  – постоянные, зависящие как от механических, так и от тепловых свойств;  $\alpha, \gamma, \beta, \varepsilon$  – физические постоянные среды Коссера, характеризующие упругие свойства материала; удовлетворяющие ограничениям:  $\alpha \geq 0, (\gamma + \varepsilon) \geq 0, (3\beta + 2\gamma) \geq 0$ .

\* Статья доложена на Международной конференции научных трудов, посвящённой 100-летию академика Нагуша Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

Деформированное состояние среды Коссера определяется несимметричным тензором деформации  $\gamma_{ji}$  и тензором изгиба-кручения  $\kappa_{ji}$ .

В тензоре деформации и тензоре изгиба-кручения учтём как линейные, так и нелинейные слагаемые в градиентах поворота и перемещения (т.е. учтём геометрическую нелинейность).

$$\begin{cases} \gamma_{ji} = u_{i,j} + u_{i,j} \cdot u_{i,j} - \epsilon_{kji} \Phi_k \\ \kappa_{ji} = \phi_{i,j} + \phi_{i,j} \cdot \phi_{i,j} \end{cases} \quad (3)$$

Уравнение теплопроводности для несимметричной теории упругости идентично уравнению для симметричной термоупругости [1].

$$\theta_{,jj} - \frac{1}{\kappa} \dot{\theta} = \eta_0 \left( 1 + \frac{\theta}{T_0} \right) \text{div } \dot{u}, \quad (4)$$

где  $\theta$  – перепад температуры  $\theta = T - T_0$ ;  $T_0$  – температура естественного состояния;  $\eta_0$  – коэффициент вязкости  $\eta_0 = \frac{\nu T_0}{k}$ ;  $\kappa$  – константа  $\kappa = \frac{k}{c_\epsilon}$ , ( $k$  – коэффициент теплопроводности,  $c_\epsilon$  – теплопроводности при постоянной деформации).

В работе [2] было показано, что при изучении распространения плоских волн, система (1) – (4) может быть разбита на три независимых группы уравнений, одна из которых описывает нелинейную термоупругую продольно-ротационную волну, а две другие – нелинейные волны сдвига и вращения, поляризованные в плоскостях  $Oy$  и  $Oz$ .

В работе [3] при анализе первой группы уравнений, было показано, что в микрополярной среде может формироваться нелинейная стационарная упругая волна ротационного типа. Такая волна является периодической и движется быстрее, чем волна в линейной среде. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом её амплитуды.

Далее рассмотрим распространение нелинейной волны сдвига и вращения, поляризованной в плоскости  $Oz$ :

$$\begin{cases} \rho \ddot{u}_3 = u_{3,11} (\mu + \alpha) [1 + 2u_{3,1}] + 2\alpha \phi_{2,1} \\ J \ddot{\phi}_2 = \phi_{2,11} (\gamma + \epsilon) [1 + 2\phi_{2,1}] - 2\alpha u_{3,1} - 2\alpha u_{3,1}^2 - 4\alpha \phi_2 \end{cases} \quad (5)$$

Заметим, что на распространение такой волны изменение температуры влияние не оказывает.

Для анализа свойств волны в уравнениях системы (5) перейдём к «бегущей координате», сделав замену  $\xi = x - Vt$ . Через  $V$  обозначена скорость нелинейной стационарной волны. В общем случае эта скорость отлична от скоростей распространения линейных возмущений в микрополярной среде, а именно, от

$c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ,  $c_2 = \sqrt{\frac{\gamma + \epsilon}{J}}$  – скоростей, с которыми распространялись бы волны сдвига

и вращения, если бы они не были связаны между собой, а также скоростей

$$c_3 = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{\mu + \alpha}{\rho}}.$$

Для различных материалов соотношения между характерными скоростями линейных упругих волн могут быть различными.

Система уравнений (5) сводится к одному дифференциальному уравнению второго порядка для упругих деформаций в обыкновенных производных. Будем считать упругие деформации малыми. Проинтегрировав первое уравнение системы

(5) по  $\xi$ , введя обозначение  $\frac{du_3}{d\xi} = U$ , найдём его корни:

$$U_{1,2} = \frac{\rho V^2 - (\mu + \alpha)}{2(\mu + \alpha)} \pm \frac{\rho V^2 - (\mu + \alpha)}{2(\mu + \alpha)} \sqrt{1 - \frac{8\alpha(\mu + \alpha)}{(\rho V^2 - (\mu + \alpha))^2}} \varphi_2$$

Если формулу раскрыть со знаком «плюс», то полученное выражение не удовлетворяет физическому смыслу упругой деформации, поэтому раскроем её со

знаком «минус», предположив, что  $\alpha < \mu$ . Выражение  $\sqrt{1 - \frac{8\alpha(\mu + \alpha)}{(\rho V^2 - (\mu + \alpha))^2}} \varphi_2$

разложим в ряд Тейлора с точностью до  $O(x^2)$ , что позволит нам прийти к уравнению осциллятора с квадратичной нелинейностью:

$$\frac{d^2\varphi_2}{d\xi^2} + a\varphi_2 + b\varphi_2^2 = 0 \quad (6)$$

$$\text{где } a = \frac{4\alpha(V^2 - c_t^2)}{(V^2 - c_t^2)J[V^2 - c_t^2]} \text{ и } b = \frac{8\alpha c_3^4}{J[V^2 - c_t^2]^2 [V^2 - c_t^2]}$$

Рассмотрим случай формирования солитона без постоянной составляющей. Это возможно, если  $a < 0$   $b > 0$  и если  $a < 0$   $b < 0$ .

Если волна деформации будет иметь постоянную составляющую  $\frac{du_3}{d\xi} = \text{const}$ ,

то перемещение будет равно  $u_3 = \text{const} \cdot \xi$ . То есть, перемещение будет иметь неограниченный линейный рост, что противоречит физическому смыслу распространения волн, так как с течением времени волна должна затухать, если внутри нет источника (степень свободы, осциллятор), который может усилить волну. Поэтому волны с постоянной составляющей рассматривать не будем.

Проанализируем решения уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью в зависимости от знаков коэффициентов  $a$  и  $b$ .

1. Случай  $a < 0$ ,  $b > 0$ .

Этот случай возможен, если скорость нелинейной стационарной волны соотносится с характерными скоростями следующим образом:  $v > c_2$ ,  $v < c_t$ ,  $v > c_\tau$ .

Согласно работе [4], в этом случае функция потенциальной энергии

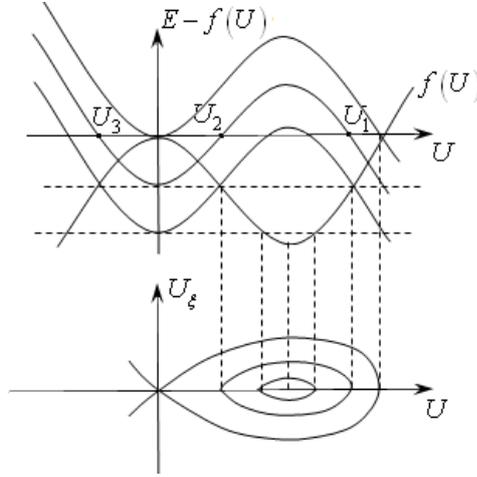
$f(U) = \frac{a}{2}U^2 + \frac{b}{2}U^3$  имеет локальный минимум  $f_{\min} = 0$  при  $U = 0$  и локальный

максимум  $f_{\max} = \frac{a^3}{6b^2}$  при  $U = -\frac{a}{b}$ . Точка  $(0, 0)$  на фазовой плоскости  $(U, U_\xi)$

является неустойчивым положением равновесия типа "узел", а точка  $\left(-\frac{a}{b}, 0\right)$  – устойчивым положением типа "центр".

На фиг.1а) показана функция потенциальной энергии  $f(U)$  и полином

$E - f(U)$  при различных значениях константы интегрирования  $E$ . На фиг. 1б) показаны фазовые траектории.



Фиг.1

Решение уравнения осциллятора с квадратичной нелинейностью [5] позволяет сказать, что сепаратрисе соответствует уединённая стационарная волна (солитон), а замкнутым траекториям, окружающим особую точку равновесия типа "центр", соответствует периодическая волна.

Физический смысл имеет солитон, так как у него нет постоянной составляющей.

Решение системы (5) запишется в следующем виде:

$$\varphi(\xi) = -\frac{3(V^2\rho - \mu)(V^2\rho - (\mu + \alpha))}{4\alpha^2} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\xi\sqrt{\frac{\alpha(V^2\rho - \mu)}{J(V^2\rho - (\mu + \alpha))(V^2\rho - (\gamma + \varepsilon))}}\right)}$$

$$u_3 = -\frac{3(V^2\rho - \mu)}{2\alpha} \operatorname{th}\left(\xi\sqrt{\frac{\alpha(V^2\rho - \mu)}{J(V^2\rho - (\mu + \alpha))(V^2\rho - (\gamma + \varepsilon))}}\right) + \operatorname{const} \quad (7)$$

Последние соотношения показывают, что вращательная составляющая уединённой стационарной волны имеет колоколообразную форму и ведёт себя как солитон положительной полярности, сдвиговая составляющая имеет форму перепада (кинк).

Обозначим через  $A_{\text{угла}}$  – амплитуду угла уединённой волны,  $A_{\text{деф}}$  – амплитуду деформации уединённой волны, через  $\Delta$  – её ширину.

В данном случае они примут следующий вид:

$$A_{\text{угла}} = -\frac{3a}{2b} = -\frac{3(v^2 - c_\tau^2)(v^2 - c_t^2)}{4c_3^4}, \quad A_{\text{деф}} = \frac{c_3^4}{(v^2 - c_t^2)} A_{\text{угла}} = -\frac{3(v^2 - c_\tau^2)}{4c_3^2}$$

$$\Delta = \sqrt{-\frac{J(v^2 - c_t^2)(v^2 - c_\tau^2)}{\alpha(v^2 - c_\tau^2)}}$$

Оценим скорость распространения волны с учётом ограничений, наложенных на амплитуду деформации:  $0 < A_{\text{деф}} < 10^{-4}$ . В результате получим условия на скорость уединённой волны:

$$c_{\tau}^2 < v^2 < c_{\tau}^2 + \frac{4}{3}c_3^2 \cdot 10^{-4} \quad (8)$$

Оценим поведение графиков для амплитуды угла и амплитуды деформации, пренебрегая величиной  $\frac{c_{\tau}^2}{v^2}$  ввиду её малости:

$$A_{\text{угла}} = -\frac{3v^2 \left(1 - \frac{c_{\tau}^2}{v^2}\right) v^2 \left(1 - \frac{c_t^2}{v^2}\right)}{4c_3^4} \approx -\frac{3v^2 v^2 \left(-\frac{c_t^2}{v^2}\right)}{4c_3^4} \approx \frac{3v^2 c_t^2}{4c_3^4}$$

$$A_{\text{деф}} = -\frac{3(v^2 - c_{\tau}^2)}{4c_3^2} = -\frac{3v^2 \left(1 - \frac{c_{\tau}^2}{v^2}\right)}{4c_3^2} \approx -\frac{3v^2}{4c_3^2}$$

Из полученных оценок видим, что амплитуда угла возрастает пропорционально  $v^2$ , а амплитуда деформации убывает пропорционально  $v^2$ .

Ширина уединённой стационарной волны при увеличении скорости (8) убывает.

2. Случай  $a < 0$ ,  $b < 0$ .

Этот случай не реализуется, так как возникают противоречия между условием на скорость и условием на амплитуду деформации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №12-08-00888, №12-08-90032-Бел)

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872с.
2. Виноградова Ю.В., Ерофеев В.И. Вывод уравнений динамики нелинейной среды Коссера. // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2009. № 6 (1). С.159-162
3. Виноградова Ю.В. Распространение нелинейной стационарной волны ротационного типа в среде Коссера. // Вторая Всероссийская школа молодых ученых-механиков «Современные методы механики». Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского университета, 2011. С.31-32
4. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность М.: Физматлит, 2002. 208с.

#### Сведения об авторах:

**Виноградова Юлия Валерьевна** – аспирант кафедры теории упругости и пластичности, Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского, факультет механико-математический. Тел.: +7-960-185-96-32.

**E-mail:** [yuvinog@gmail.com](mailto:yuvinog@gmail.com)

**Ерофеев Владимир Иванович** – доктор физ.-мат. наук, профессор, зам.директора Нижегородского филиала Института машиноведения им. А.А.Благонравова РАН

Тел.: +7(831)-432-05-76. **E-mail:** [erf04@simm.ru](mailto:erf04@simm.ru)

Поступила в редакцию 12.10.2012