

**ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С  
ДВУМЯ СВОБОДНЫМИ КРАЯМИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА,  
НАБЕГАЮЩИМ НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ**

**Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.**

**Ключевые слова:** устойчивость неконсервативных систем, прямоугольная упругая пластинка, дивергентная неустойчивость, сверхзвуковое обтекание.

**Key words:** the stability of non-conservative systems, an elastic rectangular plate, the divergence instability, supersonic gas flow.

**Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ր.**

**Գազի զերձայնային հոսքում երկու ազատ եզրով ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդրի մասին, երբ հոսքը սալի ազատ եզրին վրավազք է կատարում**

Դիտարկված է զերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի հակադիր ազատ եզրը գուգահեռ մյուս երկու հողակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը:

**Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.**

**On the problem of the stability of a rectangular plate with two free edges, when the supersonic gas flow is in a direction perpendicular to the free edges**

The linear problem of the static stability of an elastic rectangular plate in a supersonic flow of gas is investigated. The flow is in a direction from the free edge to on the contrary free edge, and at the two edges parallel to the flow are hinge joint supported. Its solution shows that the divergence is possible.

Рассматривается задача устойчивости упругой прямоугольной пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа. Скорость потока направлена от свободного края пластинки к противоположному свободному краю параллельно остальным двум шарнирно закреплённым краям. Показана возможность возникновения как дивергенции, так и локализованной дивергенции в зависимости от значения параметров задачи. Найдена критическая скорость потока, при которой пластинка теряет статическую устойчивость.

В предлагаемой работе в линейной постановке исследуется задача устойчивости прямоугольной упругой пластинки с двумя свободными краями, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. Скорость обтекающего потока направлена от свободного края пластинки к противоположному свободному краю параллельно двум остальным шарнирно опёртым краям. С помощью численно-аналитических методов анализа показана возможность возникновения, как дивергенции, так и локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки в зависимости от значений параметров задачи.

Найдена критическая скорость потока газа, при которой пластинка теряет статическую устойчивость. Показана существенная зависимость критической скорости потока от коэффициента Пуассона и от относительной длины и ширины пластины.

Установлено, что в случае, в котором ширина пластинки превосходит её длину более чем в пять раз, наблюдается явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки, которое имеет место при

обтекании полубесконечной пластины–полосы сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. А в случае, в котором отношение ширины пластинки к её длине примерно порядка одной десятичной и меньше, то можно полагать, что поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа аналогично поведению обтекаемой удлиненной пластинки.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим прямоугольную тонкую упругую пластинку, которая в декартовой системе координат  $Oxyz$  занимает область  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ ,  $-h \leq z \leq h$ . Декартова система координат  $Oxyz$  выбирается так, что оси  $Ox$  и  $Oy$  лежат в плоскости невозмущенной пластинки, а ось  $Oz$  перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку в направлении оси  $Ox$  с невозмущенной скоростью  $V$ . Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А также будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромки  $x = 0$  и  $x = a$  пластинки свободны, а кромки  $y = 0$  и  $y = b$  шарнирно закреплены.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущенной формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривленная форма равновесия (изогнутая пластинка), когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] дифференциальное уравнение изгиба пластинки описывается соотношением [2]

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w = w(x, y). \quad (1.1)$$

Здесь  $w = w(x, y)$  – прогиб точек срединной поверхности пластинки;  $\rho_0$  – плотность невозмущенного потока газа;  $a_0$  – скорость звука в невозмущенной газовой среде;  $D$  – цилиндрическая жёсткость пластинки на изгиб.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0, \quad x = 0 \text{ и } x = a; \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0 \text{ и } y = b; \quad (1.3)$$

где  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

Требуется найти значения критической скорости потока газа  $V_{cr}$ , при превышении которых возникает дивергентная неустойчивость. Иными словами, требуется определить значения параметра  $V$ , при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2), (1.3).

Среди первых публикаций в области устойчивости прямоугольных пластинок, обтекаемых сверхзвуковым потоком газа, отметим работу А.А. Мовчана [3]. А монография [4] содержит всеобщий обзор, посвященный данному вопросу.

Для нахождения решения задачи устойчивости пластинки (1.1) - (1.3) сведём её к задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2), (1.3), будем искать в виде

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\lambda_n px) \cdot \sin(\lambda_n y), \quad \lambda_n = \pi n b^{-1}. \quad (1.4)$$

Подставляя выражение (1.4) в уравнение (1.1), получим характеристическое уравнение

$$p^4 - 2p^2 + \alpha_n^3 p + 1 = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0,$$

которое перепишем в виде

$$(p^2 - 1)^2 + \alpha_n^3 p = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}, \quad \alpha_n^3 > 0. \quad (1.5)$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (1.5) имеет два отрицательных действительных корня  $p_1 < 0$ ,  $p_2 < 0$  и пару комплексных сопряженных корней  $p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$  с положительной вещественной частью  $\alpha > 0$ . Корни характеристического уравнения (1.5) определяются выражениями [5]

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} - \frac{q_1-1}{2}}, \quad p_1 < 0, \quad p_2 < 0; \quad (1.6)$$

$$p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm i \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} + \frac{q_1-1}{2}} = \alpha \pm i\beta, \quad \alpha^3 > 0.$$

Здесь  $q_1$  – единственный действительный корень кубического уравнения [5]

$$q^3 + q^2 - q - 1 - \frac{\alpha_n^6}{8} = 0, \quad \alpha_n^3 = a_0 \rho_0 V D^{-1} \lambda_n^{-3}. \quad (1.7)$$

Из представления уравнения (1.7) в виде

$$8 \cdot (1+q)^2 (q-1) = \alpha_n^6 \quad (1.8)$$

и положительности её дискриминанта  $Q = \alpha_n^6 \left( \frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256} \right)$  следует, что кубическое уравнение (1.7) при условии  $\alpha_n^3 > 0$  имеет один действительный корень  $q_1$  и пару комплексных сопряженных корней [5]. При этом

$$q_1 > 1. \quad (1.9)$$

2. Корням (1.6) соответствует следующее решение дифференциального уравнения (1.1) при граничных условиях (1.2), (1.3):

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ C_{n1} \exp((-0.5\sqrt{2(q+1)} - \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)})\pi n b^{-1} x) + \right. \\ + C_{n2} \exp((-0.5\sqrt{2(q+1)} + \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)})\pi n b^{-1} x) + \\ + \exp(0.5\sqrt{2(q+1)})\pi n b^{-1} x \cdot \left( C_{n3} \cos \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1)} \cdot \pi n b^{-1} x + \right. \\ \left. \left. + C_{n4} \sin \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1)} \cdot \pi n b^{-1} x \right) \right\} \sin(\pi n b^{-1} y), \quad (2.1)$$

где  $q$  – единственный действительный корень кубического уравнения (1.7);

$C_{nk}$ ,  $k = \overline{1, 4}$  – произвольные постоянные.

Подставляя выражение (2.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных  $C_{nk}$ . Приравняв нулю определитель полученной системы, получаем следующее дисперсионное уравнение относительно параметров  $q$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $n$  и  $v$  задачи (1.1) – (1.3):

$$\begin{aligned}
F(q, \gamma, n, v) = & \quad (2.2) \\
= & 2B_1B_2 \left( \exp(-2\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} + B_1)) + 1 - \right. \\
& \left. - 2 \exp(-\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} + B_1)) \cdot \cos(\pi n\gamma B_2) \right) \cdot \\
& \cdot \left[ 2(q+1)(q + \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2 \right] \cdot \left[ 2(q+1)(q - \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2 \right] + \\
& + \left( \exp(-\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} - B_1)) - \exp(-\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} + B_1)) \right) \cdot \\
& \cdot \left( (k_2k_3 - k_1k_4) \cdot (\exp(-\pi n\gamma(\sqrt{2(q+1)} + B_1)) - \cos(\pi n\gamma B_2)) - \right. \\
& \left. - (k_1k_3 + k_2k_4) \cdot \sin(\pi n\gamma B_2) \right) = 0,
\end{aligned}$$

где

$$\gamma = ab^{-1}, \quad \gamma \in (0, \infty); \quad (2.3)$$

$$B_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} - 0.5(q-1)}, \quad B_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2 - 1} + 0.5(q-1)}, \quad q > 1; \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned}
k_1 = & -(3q^2 + q - 3)\sqrt{2(q+1)} + (2q^2 - 1)B_1 + 2(2q+1)\sqrt{q^2 - 1}B_1 + \\
& + \left( (q+1)\sqrt{2(q+1)} - 2B_1 + 2\sqrt{q^2 - 1} \cdot B_1 \right) v - \left( \sqrt{2(q+1)} - B_1 \right) v^2; \quad (2.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_2 = & B_2 \left( 1 - 2q^2 + 2(2q+1)\sqrt{q^2 - 1} - 2q\sqrt{2(q+1)} \cdot B_1 + \right. \\
& \left. + 2(1 + \sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{2(q+1)} \cdot B_1)v - v^2 \right);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_3 = & -(3q^2 + q - 3)\sqrt{2(q+1)} - (2q^2 - 1)B_1 - 2(2q+1)\sqrt{q^2 - 1}B_1 + \\
& + \left( (q+1)\sqrt{2(q+1)} + 2B_1 - 2\sqrt{q^2 - 1} \cdot B_1 \right) v - \left( \sqrt{2(q+1)} + B_1 \right) v^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_4 = & B_2 \left( 1 - 2q^2 + 2(2q+1)\sqrt{q^2 - 1} + 2q\sqrt{2(q+1)} \cdot B_1 + \right. \\
& \left. + 2(1 + \sqrt{q^2 - 1} + \sqrt{2(q+1)} \cdot B_1)v - v^2 \right).
\end{aligned}$$

Заметим, что здесь и далее в тексте в обозначении действительного корня уравнения (1.7) индекс “1” опущен.

Из выражений (2.4) следует, что

$$B_1(q) > 0, \quad B_2(q) > 0 \quad \text{при всех } q > 1. \quad (2.6)$$

Легко показать, что дисперсионное уравнение (2.2) в предельном случае, в котором  $\gamma \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow \infty$ ), при всех  $q > 1$  и  $v$  тождественно равно нулю, а в случае, в котором  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $a \rightarrow \infty$ ), приводится к виду

$$2(q+1) \cdot (q - \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2 = 0, \quad \gamma \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что в предельном случае, в котором  $\gamma \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow \infty$ ), невозмущённая форма равновесия пластинки является статически неустойчивой. Заметим, что невозмущённая форма равновесия удлинённой пластинки ( $0 \leq x \leq a$ ,  $-\infty \leq y \leq \infty$ ) при обтекании её сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края  $x=0$  к противоположному свободному краю  $x=a$ , также является статически неустойчивой.

Уравнение (2.7) в точности совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [5] при изучении явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающей в окрестности свободного края ( $x=0$ ) упругой полубесконечной пластины-полосы ( $0 \leq x < \infty$ ,  $0 \leq y \leq b$ ), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа вдоль полубесконечных шарнирно закреплённых краёв в направлении от свободного края  $x=0$  к закреплённому краю  $x=a$ . При этом, критическая скорость потока  $V_{cr.div}$  зависит от коэффициента Пуассона: она меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона (табл. 1).

Таблица 1

$\nu$	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$V_{cr.div} \cdot (a_0 \rho_0 b^3) D^{-1}$	2453.012	537.191	173.371	120.741	77.398

В соответствии с обозначениями (1.4), (1.5) и соотношением (1.9), критическая скорость потока, приводящая к дивергентной неустойчивости, определяется выражением

$$V_{cr.div} = 2\sqrt{2(q^* - 1)} \cdot (q^* + 1) \cdot \pi^3 n^3 D (a_0 \rho_0 b^3)^{-1}, \quad (2.8)$$

или, учитывая обозначение (2.3),

$$V_{cr.div} = 2\sqrt{2(q^* - 1)} \cdot (q^* + 1) \cdot \pi^3 n^3 \gamma^3 D (a_0 \rho_0 a^3)^{-1}. \quad (2.9)$$

Отсюда очевидно следует, что дивергентная форма потери устойчивости возможна только в случае, когда справедливо условие (1.9):  $q^* > 1$ ,  $q^*$  – решение дисперсионного уравнения (2.2).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы пластинки в потенциальном сверхзвуковом потоке сводится к исследованию уравнения (2.2).

**3.** С помощью численных методов анализа найдены первые корни  $q^*$  уравнения (2.2), соответствующие различным значениям коэффициента Пуассона  $\nu$  и параметра  $\gamma \in (0, \infty)$ , определяемого выражением (2.3). Подставляя полученные значения  $q = q^*$  в соотношения (2.8) или (2.9), получаем соответствующие значения критической скорости потока  $V_{cr.div}$ , приводящие к дивергентной неустойчивости: при значениях скорости потока  $V \geq V_{cr.div}$  невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой. Некоторые результаты расчётов – значения  $V_{cr.div} \cdot D^{-1} (a_0 \rho_0 a^3)$ , соответствующие различным значениям  $\nu$  и  $\gamma$ , представлены в табл. 2.

В результате расчёта было установлено следующее. Для всех  $\nu \in (0, 0.5)$  и  $\gamma \in (0, \infty)$  наименьшее значение скорости потока достигается при значении  $n = 1$ .

При всех  $\gamma \in (0, \infty)$  критическая скорость  $V_{cr div}$  зависит от величины коэффициента Пуассона  $\nu$  и отношения сторон  $\gamma = ab^{-1}$  прямоугольника: критическая скорость  $V_{cr div}$  меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона  $\nu$ , а с возрастанием  $\gamma$  значение критической скорости растёт (табл. 2).

Таблица 2

$\nu \backslash \gamma$	0.125	0.25	0.375	0.5
$1 \cdot 10^{-4}$	$0.838 \cdot 10^{-6}$	$0.611 \cdot 10^{-6}$	$0.461 \cdot 10^{-6}$	$0.352 \cdot 10^{-6}$
$1 \cdot 10^{-2}$	$0.838 \cdot 10^{-2}$	$0.611 \cdot 10^{-2}$	$0.461 \cdot 10^{-2}$	$0.352 \cdot 10^{-2}$
$1 \cdot 10^{-1}$	0.856	0.606	0.460	0.358
$5 \cdot 10^{-1}$	25.43	18.81	13.06	10.02
$8 \cdot 10^{-1}$	112.65	70.93	50.96	37.68
1.0	358.53	162.37	105.77	71.73
1.2	547.31	306.34	196.06	134.38
1.5	992.34	584.62	387.48	269.25
1.8	1715.85	989.03	693.54	440.55
2.0	2598.09	1382.02	953.54	604.31

В случае достаточно длинных пластинок ( $\gamma = ab^{-1} \leq 0.0001$ ) значение критической скорости, примерно, порядка  $10^{-7} D(a_0 \rho_0 a^3)^{-1}$  (табл.2) и меньше, а с уменьшением  $\gamma$  стремится к нулю. Следовательно, можно считать, что при значениях  $\gamma \leq 0.0001$  поведение обтекаемой в сверхзвуковом потоке газа прямоугольной пластинки примерно такое же, как и удлиненной пластинки  $\gamma \rightarrow 0$  ( $b \rightarrow \infty$ ): в обоих случаях невозмущенная форма равновесия пластинки, являясь изначально до обтекания статически неустойчивой, остается такой же и при обтекании её потоком газа.

Начиная с значения  $\gamma = 2$ , найденные в данной работе для различных значений коэффициента Пуассона  $\nu$ , значения  $q = q^*$  и соответствующие значения критических скоростей потока, пересчитанные по формуле (2.9), примерно равны (с точностью порядка  $10^{-4}$ ) значениям  $q = q^*$  и соответствующим значениям критических скоростей потока, полученных в работе [5] при исследовании задачи локализованной дивергенции полубесконечной пластины-полосы (табл.1). Следовательно, начиная с  $\gamma = 2$ , прямоугольная пластинка в потоке газа теряет статическую устойчивость при скоростях потока, равных критическим скоростям, при которых наблюдается явление локализованной дивергенции в окрестности свободного края полубесконечной пластины-полосы. А так как в этом предельном случае критическая скорость дивергенции определяется по простой формуле (2.9), то можно сказать, что для значений  $\gamma \geq 2$  получена удобная для применения формула (2.9), в которой  $q^*$  – решение уравнения (2.7), позволяющая легко вычислить критическую скорость дивергенции прямоугольной пластинки.

Итак, в соответствии с уравнением (2.7), формула (2.9) даёт результаты, близкие к точным, по крайней мере, в области  $\gamma \geq 5$ .

Заметим, что, как оказалось, в рассматриваемой задаче устойчивости (1.1) – (1.3), как и в задачах устойчивости прямоугольных пластинок с одним свободным краем, дивергенция возможна при отсутствии сжимающих усилий, в отличие от панелей, закреплённых по всему контуру [3,5].

Легко показать, что в случае, в котором поток направлен от свободного края  $x = a$  к противоположному свободному краю  $x = 0$  ( $V_x < 0$ ), критические значения скоростей такие же, как и в рассматриваемом случае, в котором  $V_x > 0$ .

4. В отличие от пластинок, у которых только один край свободен или все края закреплены, в явлении дивергенции пластинки с двумя свободными краями оказывается определяющим задириание обоих свободных кромок, связанное с изгибом хорды пластинки. Поэтому, для этого случая представляет несомненный интерес исследование форм изгибных поверхностей пластинки.

Следовательно, основные результаты данной работы, помимо нахождения критической скорости дивергенции, могут быть получены при исследовании функции прогиба срединных точек пластинки, зависящей от параметров задачи (1.1) – (1.3), дополнительно.

Для описания выражения полного прогиба точек срединной поверхности пластинки (2.1) найдём коэффициенты  $C_{nk}$ ,  $k = \overline{1,4}$  при  $q = q^*$  ( $V = V_{cr div}$ ).

В силу условия (2.2), очевидно, что при  $q = q^*$  ранг матрицы однородной системы алгебраических уравнений четвёртого порядка относительно коэффициентов  $C_{nk}$ , полученной при подстановке решения (2.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), равен трем. Легко выделить из указанной системы подсистему линейно независимых уравнений третьего порядка, приводя исходную систему четвёртого порядка к треугольному виду. После, полагая  $C_{n1}$  произвольным, последовательно выразим через него все остальные коэффициенты:

$$C_{n2} = R_1^{-1} R_2 C_{n1}, \quad C_{n3} = R_1^{-1} R_3 C_{n1}, \quad C_{n4} = R_1^{-1} R_4 C_{n1}, \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} R_1 &= (k_1 k_6 + k_2 k_7) \sin(\pi n \gamma B_2) - k_5 B_2 [2(q+1)(q + \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2] \cdot \\ &\cdot (\cos(\pi n \gamma B_2) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} + B_1)); \\ R_2 &= (k_3 k_6 + k_4 k_7) \sin(\pi n \gamma B_2) + (k_3 k_7 - k_4 k_6) \cdot \\ &\cdot (\cos(\pi n \gamma B_2) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)); \\ R_3 &= k_6 k_8 \sin(\pi n \gamma B_2) + k_7 k_8 (\cos(\pi n \gamma B_2) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)) - \\ &- k_4 k_5 (\exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} + B_1) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)); \\ R_4 &= -k_7 k_8 \sin(\pi n \gamma B_2) + k_6 k_8 (\cos(\pi n \gamma B_2) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)) - \\ &- k_3 k_5 (\exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} + B_1) - \exp \pi n \gamma (-\sqrt{2(q+1)} - B_1)); \\ k_5 &= 1 + \sqrt{q^2 - 1} - \sqrt{2(q+1)} \cdot B_1 - v; \quad k_6 = 1 - \sqrt{q^2 - 1} - v; \\ k_7 &= \sqrt{2(q+1)} \cdot B_1; \quad k_8 = 2 B_1 [2(q+1)(q - \sqrt{q^2 - 1} - v) - (1-v)^2]; \end{aligned} \quad (4.2)$$

$\gamma, B_1, B_2$  и  $k_1, k_2, k_3, k_4$  определены, соответственно, выражениями (2.3), (2.4) и (2.5).

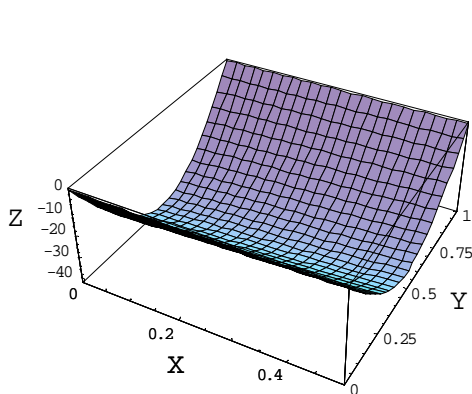
Подставляя коэффициенты (4.1) в разложение (2.1) и полагая  $n=1$ , в силу условия достижимости минимального значения критической скорости дивергенции при  $n=1$  (разд. 3), получаем для описания относительного прогиба следующее выражение:

$$\frac{w(x, y)}{C_{11}} = \left\{ \exp(-0.5\sqrt{2(q+1)} - B_1)\pi b^{-1}x + R_1^{-1}R_2 \exp((-0.5\sqrt{2(q+1)} + B_1)\pi b^{-1}x) + \exp(0.5\sqrt{2(q+1)}\pi b^{-1}x) \cdot (R_1^{-1}R_3 \cos(\pi b^{-1}B_2x) + R_1^{-1}R_4 \sin(\pi b^{-1}B_2x)) \right\} \sin(\pi b^{-1}y); \quad (4.3)$$

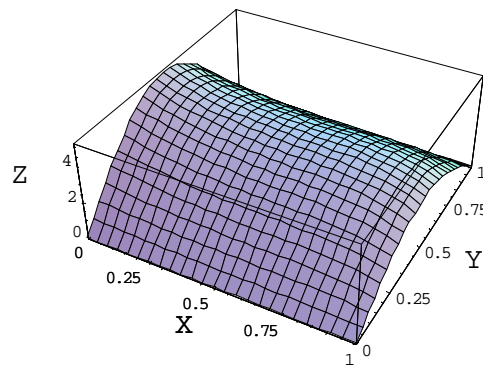
$B_1, B_2$  и  $R_i, i=1, 4$  определены выражениями (2.4) и (4.2) соответственно.

На фиг. 1–6 изображены некоторые характерные изогнутые поверхности пластинки.

Численно-аналитические методы исследований показали следующее. При  $\gamma \leq 0.5$  по форме изогнутые поверхности одинаковы (фиг.1); прогибы отрицательны, максимальное по абсолютной величине значение достигается на линии  $y = 0.5b$ ; функция  $w(x, y)/C_{11}$  симметрична относительно прямой  $y = 0.5b$ . С возрастанием  $\nu$  при  $\gamma = \text{const}$  прогибы по абсолютной величине уменьшаются более резко, чем с увеличением  $\gamma$  при  $\nu = \text{const}$ .



Фиг. 1 ( $a=0.5, b=1, \nu=0.25$ )



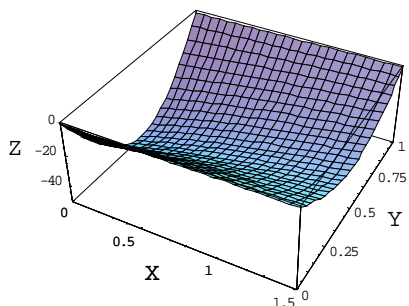
Фиг. 2 ( $a=b=1, \nu=0.25$ )

При значениях  $\gamma \in (0.5, 2)$  общий вид изогнутых поверхностей пластинки несколько иной. Поверхность пластинки в зависимости от значений параметров  $\gamma$  и  $\nu$  имеет различную изгибную форму: может быть выпуклой или вогнутой; функция  $w(x, y)/C_{11}$ , также симметрична относительно линии  $y = 0.5b$ , однако на краях  $x=0$  и  $x=a$  принимает различные по величине значения; с увеличением  $\gamma$  и  $\nu$  появляется вмятина от края  $x=0$  к середине пластинки (фиг.2, 3).

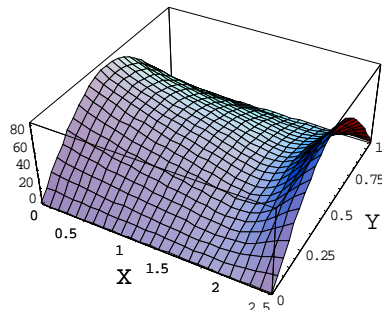
При значениях  $\gamma \in (2, 5)$  появляются перегибы, а число вмятин увеличивается. Прогибы точек краев  $x=0$  и  $x=a$  резко отличаются как по форме, так и по знаку. С увеличением  $\gamma$  прогиб вдоль кромки  $x=0$  уменьшается по абсолютной



величине, а вдоль кромки  $x = a$  резко увеличивается. Вдоль контура  $x = a$  образуется складка, а в средней части – глубокая вмятина (фиг. 4–6):

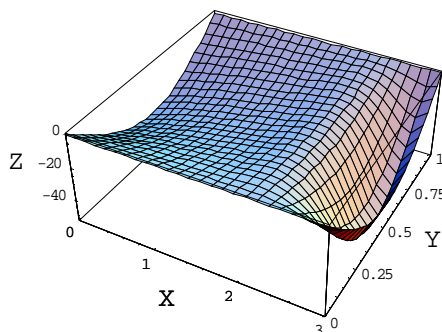


Фиг. 3 ( $a=1.5, b=1, v=0.25$ )

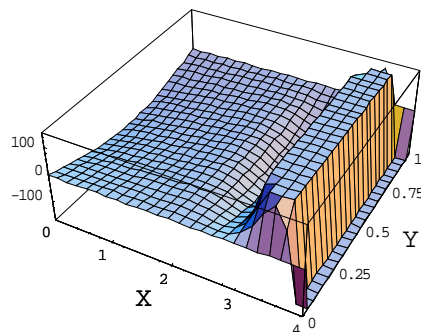


Фиг. 4 ( $a=2.5, b=1, v=0.25$ )

Дальнейшее увеличение  $\gamma$  ( $\gamma \geq 5$ ) приводит к увеличению числа складок и впадин у кромки  $x = a$ , а прогиб вдоль кромки  $x = 0$ , постепенно уменьшаясь, исчезает. Можно сказать, что, начиная с  $\gamma = 5$  в окрестности свободной кромки  $x = a$  имеет место явление локализованной дивергенции: вдоль кромки  $x = a$  по направлению к центру пластинки образуется множество складок и впадин, а в средней части глубокая вмятина, обращённая к центру. При этом, изгиб от свободного края  $x = 0$  к центру пластинки отсутствует – функция прогиба во всех точках кромки  $x = 0$  до линии  $x \approx 0.7a$ , примерно, равна нулю. В этом случае проявляются более высокие формы потери устойчивости.



Фиг. 5 ( $a=3, b=1, v=0.25$ )



Фиг. 6 ( $a=4, b=1, v=0.25$ )

5. Найдены критические скорости потока, приводящие к потере устойчивости в дивергентной форме. Показано, что относительные значения критических скоростей потока зависят от коэффициента Пуассона  $\nu$  и от  $\gamma$  – отношения ширины пластинки к её длине: с увеличением коэффициента Пуассона  $\nu$  критическая скорость уменьшается, а с увеличением  $\gamma$  – увеличивается.

В случае, в котором ширина прямоугольной пластинки превосходит её длину более чем в пять раз ( $\gamma \geq 5$ ), наблюдается явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края  $x = a$  пластинки, в отличие от полубесконечной пластины-полосы, исследованной в [5], у которой явление локализованной дивергентной неустойчивости наблюдается в окрестности

свободного края  $x = 0$ , в силу того, что край  $x = a$  закреплён. Найдена формула, удобная для применения, позволяющая легко вычислить критическую скорость дивергенции прямоугольной пластинки. При этом относительные значения критических скоростей потока зависят только от коэффициента Пуассона: критическая скорость потока меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона.

В случае, в котором отношение ширины пластинки к её длине порядка  $10^{-4}$  и меньше ( $\gamma \leq 10^{-4}$ ), можно считать, что поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа такое же, как и поведение обтекаемой удлиненной пластинки: невозмущённая форма равновесия неустойчива.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
3. Мовчан А.А. Устойчивость лопатки, движущейся в газе // ПММ. 1957. Т.21. № 5. С.700-706.
4. Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек. М.: Наука, 2006. 247с.
5. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65(1). С.29-34.

#### Сведения об авторах:

**Белубекян Мелс Вагаршакович** – кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096

**Е-mail:** [mbelubekyan@yahoo.com](mailto:mbelubekyan@yahoo.com)

**Мартirosян Стелла Размиковна** – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН Армении, Ереван, Армения.

(+374 10) 524890

**Е-mail:** [mechinsstella@mail.ru](mailto:mechinsstella@mail.ru)

Поступила в редакцию 07.09.2012