

УДК 539.3

ФЛАТТЕР ГИБКОЙ ПЛАСТИНКИ В НЕОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О., Григорян Г.С.

Ключевые слова: Флаттер, критическая скорость, тепловое поле, устойчивость

Keywords: Flutter, Critical Speed, Thermal Field, Stability

Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ., Գրիգորյան Հ.Ս.

Ճկուն սալի ֆլատերը անհամասեռ ջերմային դաշտում

Բազմաթիվ աշխատանքներ կան նվիրված գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող սալերի ու թաղանթների կայունության ուսումնասիրմանը: Այդ աշխատանքների մասին տեղեկություններ կարելի է ստանալ [1,2] մենագրություններում և [3] ակնարկային հոդվածում: Հետագույն էն նաև գազի գերձայնային հոսանքով շրջհոսվող և ջերմային դաշտում գտնվող դեֆորմացվող բարակ մարմինների կայունության հարցերը [4-7]:

[8] աշխատանքում գծային դրվածքով դիտարկված է երկար, ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը ըստ հաստության փոփոխական ջերմային դաշտի և գերձայնային արագությամբ շրջհոսվող գազի (սալի կարճ եզրերի ուղղությամբ ազդող չգրգռված արագությամբ) ազդեցության տակ: Ըստ հաստության ջերմային դաշտի անհամասեռության պատճառով տեղի է ունենում սալի ծռում և այդ վիճակը ընդունվում է որպես չգրգռված: Ստացված են դիտարկվող ջերմագազաառաձգական համակարգի չգրգռված վիճակի կայունության պայմանները և դրանց հիման վրա կառուցված է կայունության տիրույթը այն փոփոխականների տարածությունում, որոնք բնութագրում են շրջհոսման արագության մեծությունը, սալի միջին հարթության վրա ջերմությունը և ջերմության գրադիենտը նշված հարթության նորմալի ուղղությամբ: Ցույց է տրված, որ ջերմային դաշտի և շրջհոսման համատեղ ազդեցությամբ կարելի է դեկավարել կայունության պրոցեսը և ջերմային դաշտի օգնությամբ կարելի է էապես փոխել ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծությունը:

Ներկայացվող աշխատանքում լուծված է [8] աշխատանքում ձևակերպված խնդիրը ոչ գծային դրվածքով: Դիտարկված է ջերմային դաշտի ազդեցությունը «ամպլիտուդա-արագություն» կապի վրա: Ցույց է տրված, որ ա) համեմատաբար հաստ սալերի դեպքում եթե աստիճանաբար մեծացնենք U արագությունը, ապա ֆլատերային տատանումների պատկերը կպահպանվի մինչև $U = U^*$ (U^* – վերին կրիտիկական արագությունն է, որի արժեքը կախված է սալի միջին հարթության T_0 ջերմաստիճանից), որտեղ տատանումներն «անհետանում» են և վերականգնվում է սալի չգրգռված վիճակը: Արագության փոքրացմանը զուգընթաց չգրգռված վիճակը դառնում է կայուն մինչև $U > U_*$ ($U_*(T_0)$ – ստորին

կրիտիկական արագությունն է): $U = U_*$ դեպքում ֆլատերային տատանումների ամպլիտուդան թռիչքով աճում է մինչև որոշակի վերջավոր արժեք: Արագության հետագա նվազման հետ ամպլիտուդան աճում է (նկ.3); բ) համեմատաբար բարակ սալերի դեպքում երբ $T_0 > 0$, ապա ֆլատերային տատանումների գրգռումն ունի “կոշտ” բնույթ (1 և 2 կորերը նկ.4-ի վրա): Երբ $T_0 < 0$, ապա h/a հարաբերական հաստության յուրաքանչյուր արժեքի համար գոյություն ունի բացասական T_0 ջերմաստիճան, որի դեպքում «ամպլիտուդա-արագություն» կապը նման է հաստ սալերի դեպքում ունեցած պատկերին և տեղի է ունենում անցում ֆլատերային տատանումների մի բնույթից մյուսին (կոր 3-ը նկ.4); գ) եթե ըստ սալի միջին հարթության նորմալի ուղղության ջերմության գրադիենտի մեծությունը հավասար չէ գոյի ($\theta \neq 0$), ապա՝ 1) երբ $\Theta > 0$, ապա ջերմային դաշտը նեղացնում է կայունության տիրույթը; 2) երբ $\Theta < 0$, ապա մինչև որոշակի բացասական Θ_* արժեք կայունության տիրույթը նկատելի լայնանում է, որից հետո $|\Theta|$ -ի մեծացմանը զուգընթաց տեղի է ունենում կայունության տիրույթի էական նեղացում; 3) ջերմության գրադիենտի ազդեցությունը կրիտիկական արագության վրա էական է համեմատաբար հաստ սալերի դեպքում; 4) եթե ջերմային դաշտի երկու բաղադրիչներն էլ տարբեր են գոյից, ապա կայունության տիրույթի վրա ջերմային դաշտի ազդեցությունը կարող է լինել ավելի էական:

Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O., Grigoryan H.S.

Flutter of flexible plate in an inhomogeneous temperature field

There are several works devoted to the investigation of the stability of plates and shells in a supersonic gas flow. Remarks on these works in monographs [1,2] and in the paper [3] can be found. The issues of the influence of constant temperature field on the stability of deformable thin bodies in a supersonic gas flow are investigated also [4-7].

In the paper [8], in linear formulation we consider the problem of stability of long rectangular plate under the influence of both variable along the thickness temperature field and supersonic gas flow (with the unperturbed speed, which directed along the short edges of the plate). Due to the inhomogeneity of along the thickness temperature field the buckling of the plate is takes place and this state is taken as unperturbed. Conditions of stability of unperturbed state of examined termogasoelastic system are obtained and on its base the stability area is constructed in the space of variables characterizing the value of the flown speed, the temperature at the middle plane of the plate and the temperature gradient along the normal direction of this plane. It is shown that via the combined action of the temperature field and the flowing stream one can regulate the process of stability and with the help of temperature field one can significantly change the value of the flutter critical speed.

In this paper, the problem, posed in [8], considered in nonlinear formulation. The effect of temperature field on the dependence of "amplitude-speed" is studied. It is shown that: a) in the case of relatively thick plates if gradually increase the speed flowing stream U , the flutter type vibrations persist up to $U = U^*$ (U^* – is the upper

critical speed, the value of which depends on the temperature T_0 of the mid-plane of the plate), where the oscillations "pluck" and restored the undisturbed state of the plate. By reducing the speed the unperturbed state becomes stable up to $U > U_*$ ($U_*(T_0)$ – is the lower critical speed). For $U = U_*$ the amplitude of flutter type vibrations abruptly increases to its final value. With further decreasing speed the amplitude increases, and b) in the case of relatively thin plates for $T_0 > 0$ the flutter type vibrations have "hard" character. If $T_0 < 0$, then, for each value of the relative thickness h/a there is a negative temperature at which the "amplitude-speed" dependence is similar to the case of thick plates and a transition from one mode to another flutter type vibrations takes place, d) if the value of temperature gradient in the normal direction to the median plane of the plate is different from zero ($\Theta \neq 0$), then: 1) If $\Theta > 0$, then the temperature field significantly reduces the stability region, and 2) if $\Theta < 0$, then up to a certain negative value Θ_* the stability region increases significantly, then, with the increasing $|\Theta|$ the stability area is decreases essentially, 3) the effect of temperature gradient on the critical speed is significant in the case of relatively thick plates, 4) if both components of the temperature field are non-zero, then the influence of the temperature field on the stability area may be more essential.

This work was supported within the grant A2-NET-TEAM: Advanced Aircraft Network for Theoretical & Experimental Aeroservoelastic Modeling, under the call FP7-PEOPLE-2010-IRSES.

Имеются многочисленные исследования, посвящённые устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1,2] и в обзорной статье [3]. Исследованы также вопросы влияния постоянного температурного поля на устойчивость деформируемых тонких тел обтекаемых сверхзвуковым потоком газа [4-7].

В работе [8] в линейной постановке рассмотрена задача устойчивости удлинённой прямоугольной пластинки под действием переменного по толщине температурного поля и обтекающего сверхзвукового потока газа. В этой работе учтено, что вследствие неоднородности по толщине температурного поля происходит выпучивание пластинки и это состояние принимается как невозмущённое. На этой основе получены условия устойчивости невозмущённого состояния рассматриваемой термогазоупругой системы и построена область устойчивости в пространстве переменных, характеризующих величину скорости обтекающего потока, температуру на срединной плоскости пластинки и градиента температуры в нормальном направлении к указанной плоскости. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

В настоящей работе поставленная в [8] задача устойчивости рассмотрена в нелинейной постановке. Исследовано влияние температурного поля на зависимость "амплитуда-скорость". Показано, что: а) в случае сравнительно толстых пластин, если постепенно увеличивать скорость U обтекающего потока, то режим флаттерных колебаний сохраняется вплоть до $U = U^*$ (U^* –

верхняя критическая скорость, значение которой зависит от температуры T_0 на срединной плоскости пластинки), где колебания “сорвутся” и восстанавливается невозмущённое состояние пластинки. При снижении скорости невозмущённое состояние становится устойчивой пока $U > U_*$ ($U_*(T_0)$ – нижняя критическая скорость). При $U = U_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до конечного значения. С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает (фиг.3); б) в случае сравнительно тонких пластин, если $T_0 > 0$, то возбуждение флаттерных колебаний носит “жесткий” характер (кривые 1 и 2 на фиг.4). Если же $T_0 < 0$, то для каждого значения относительной толщины h/a существует отрицательная температура T_0 , при котором зависимость “амплитуда-скорость” аналогична случаю толстых пластин и происходит переход из одного режима флаттерных колебаний к другому (кривая 3 на фиг.4); г) если величина градиента температуры в нормальном направлении к срединной плоскости пластинки отлична от нуля ($\Theta \neq 0$), то: 1) при $\Theta > 0$ температурное поле заметно сужает область устойчивости; 2) при $\Theta < 0$ до некоторого определённого отрицательного значения Θ_* область устойчивости заметно увеличивается, после чего, с увеличением $|\Theta|$ происходит существенное уменьшение области устойчивости, 3) влияние градиента температуры на критическую скорость является существенным в случае сравнительно толстых пластин, 4) если обе составляющие температурного поля отличны от нуля, то влияние температурного поля на область устойчивости может оказаться более существенным.

1. Основные уравнения

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины h , находящуюся в стационарном температурном поле T . Введём декартовую систему координат (x_1, x_2, x_3) так, чтобы срединная плоскость пластинки совпала с координатной плоскостью (x_1, x_2) . Пусть, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущённой скоростью U , направленной вдоль оси Ox_1 . Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы в нелинейной постановке. В основу исследования принимаются следующие известные предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [9];
- б) основные предположения теории гибких пластин, считая, что нормальные перемещения сравнимы с толщиной пластинки [2];
- в) “закон плоских сечений” при определении аэродинамического давления [10,11]:

$$p = p_{\infty} \left(1 + \frac{\varkappa - 1}{2} \frac{v_3^2}{a_{\infty}^2} \right)^{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}}, \quad (1)$$

где p – давление газа на поверхности пластинки, a_{∞} – скорость звука для невозмущённого газа, p_{∞} и ρ_{∞} – давление и плотность газа в невозмущённом состоянии, \varkappa – показатель политропы, v_3 – нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки;

г) линейный закон изменения температурного поля $T(x_1, x_2, x_3)$ по толщине пластинки [1]:

$$T = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2); \quad (2)$$

д) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры [12].

В дальнейшем, для простоты и наглядности принимается также, что: 1) пластинка в направлении перпендикулярном к скорости обтекающего потока достаточно длинная и однородно закреплена по длинным сторонам. В этом случае срединная поверхность изогнутой пластинки будет близка к цилиндрической.

Поэтому, направляя ось Ox_2 вдоль длинной стороны, считаем, что все величины (как возмущённого, так и невозмущённого состояний) не зависят от координаты x_2 и

перемещение u_2 вдоль оси Ox_2 равно нулю; 2) из лицевых поверхностей

($x_3 = \pm h/2$) пластинки происходит теплообмен с окружающей средой по закону

Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями T^+ и T^- соответственно), а боковые поверхности ($x_1 = 0$ и $x_1 = a$)

теплоизолированы. Тогда задача теплопроводности имеет следующее решение:

$$T = T_0 + x_3 \Theta_0; \\ T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta_0 = \frac{k(T^+ - T^-)}{2\lambda + kh} \quad (3)$$

где k – коэффициент теплоотдачи, λ – коэффициент теплопроводности.

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ($\Theta \neq 0$) происходит выпучивание пластинки (с прогибом $w_T(x_1)$) и вследствие этого появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется формулой (1). В линейном приближении для указанного давления

получается выражение $\alpha p_\infty M dw_T / dx_1$. Указанное выпученное состояние принимается как невозмущенное [8] и исследуется его устойчивость под действием температурного поля и давления обтекающего потока газа.

На основе принятых предположений и теории термоупругости изотропного тела, аналогично [1,8], получается следующее нелинейное дифференциальное уравнение устойчивости рассматриваемой термогазоупругой системы:

$$\begin{aligned}
 D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - \delta \left[N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + N_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} \right) \right] + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left(\rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \\
 + \alpha p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{4} p_\infty M^2 \left[2 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} + \\
 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{12} p_\infty M^3 \left[3 \frac{dw_T}{dx_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right] \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 = 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 N_1^T &= -\frac{Eh}{1-\mu} \alpha T_0 \\
 N_1 &= \frac{Eh}{2\alpha(1-\mu^2)} \int_0^a \left[2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2 \right] dx_1
 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases}$$

В (4) и (5) $w(x_1, t)$ – возмущения поперечного перемещения пластинки, $M = U a_\infty^{-1}$ – число Маха для невозмущенного потока, $D = Eh^3 / 12(1-\mu^2)$, E – модуль упругости, μ – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного теплового расширения, ρ – плотность материала пластинки, ε – коэффициент линейного затухания. Отметим, что при получении (4) аэродинамическое давление вычислено по формуле (1), разлагая её в ряд по степеням $\frac{v_3}{a_\infty} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) a_\infty^{-1}$.

В разложении, согласно предположениям теории гибких пластин, удержаны лишь первые три члена [1]. Причем, из членов, учитывающие аэродинамическое демпфирование, сохранен лишь наиболее существенный линейный член $\alpha p_\infty a_\infty^{-1} \partial w / \partial t$.

Считая, что деформации невозмущенного состояния достаточно малы, для определения прогиба пластинки $w_T(x_1)$ выпученного состояния получается следующее линейное уравнение [8]:

$$D \frac{d^4 w_T}{dx_1^4} + \alpha p_\infty M \frac{dw_T}{dx_1} = 0, \quad (6)$$

решение которого должен удовлетворить условиям закрепления краёв $x_1 = 0$ и $x_1 = a$ пластинки. Эти условия, например, в случае шарнирно опёртых краёв, имеют вид

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1 + \mu)\Theta_0 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a. \quad (7)$$

Решение задачи (6), (7) получено в [8]. В этой работе получено также следующее приближённое решение указанной задачи:

$$w_T(x_1) = -R\Theta_0 \left\{ \frac{1}{2}x_1(x_1 - a) + \frac{a^2 K v}{36 + K^2 v^2} \left[\frac{3}{8\pi} K v \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\}, \quad (8)$$

которое практически совпадает с точным решением. В дальнейшем при решении уравнения (4) для $w_T(x_1)$ будем использовать (34), в котором

$$R = \alpha(1 + \mu), \quad K = \frac{4\alpha p_\infty}{Dh} \left(\frac{a}{\pi} \right)^4, \quad v = M \frac{h}{a}.$$

Учитывая, что функция w_T определена из решения линейной задачи, необходимо в (4) сохранить лишь члены линейные относительно w_T .

Таким образом, исследование поведения возмущений, сообщаемых, находящейся в неоднородном температурном поле и обтекающейся сверхзвуковым потоком газа пластинке, сведена к решению уравнения (4) при соответствующих условиях на краях пластинки. В дальнейшем для простоты принимается, что края пластинки шарнирно опёрты. Т.е. решения уравнения (4) должны удовлетворить следующим граничным условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a, \quad (9)$$

которые вытекают из условий шарнирного опирания в возмущённом состоянии.

Полученную нелинейную задачу (4), (9) будем решать приближённо, представляя её решение в виде

$$w(x_1, t) = \sum_{i=1}^N f_i(t) \sin \lambda_i x_1, \quad \left(\lambda_i = \frac{i\pi}{a} \right), \quad (10)$$

где $f_i(t)$ – подлежащие определению функции времени t .

Представление (10) удовлетворяет краевым условиям (9). Подставляя (10) в уравнение (4) и применяя метод Бубнова-Галеркина для определения $f_i(t)$, получим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^2 f_i}{dt^2} + (\varepsilon + \varepsilon_a) \frac{d f_i}{dt} + \omega_i^2 f_i + \Psi_i(f_1, f_2, \dots, f_N, M) = 0, \quad (11)$$

$$(i = 1, 2, \dots, N),$$

где ω_i – частоты собственных колебаний, Ψ_i – некоторые нелинейные функции.

В дальнейшем ограничимся случаем двухчленной аппроксимации [1]:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x .$$

Тогда система (11) в безразмерных функциях $x_i = f_i(t)/h$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}\delta) x_1 - \frac{2}{3} K v x_2 + \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_2^2 + x_2 (\beta_{11} x_1^2 + \beta_{12} x_2^2) + \\ + 3x_1 (x_1^2 + 4x_2^2) \delta + \bar{\Theta} [\delta_{11}^\ominus x_1 + \delta_{12}^\ominus x_2 + \alpha_{11}^\ominus x_1^2 + \alpha_{12}^\ominus x_2^2 + \alpha_{13}^\ominus x_1 x_2] = 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) x_2 + \frac{2}{3} K v x_1 + \alpha_{21} x_1 x_2 + x_1 (\beta_{21} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2) + \\ + 12x_2 (x_1^2 + 4x_2^2) \delta + \bar{\Theta} [\delta_{21}^\ominus x_1 + \delta_{22}^\ominus x_2 + \alpha_{21}^\ominus x_1^2 + \alpha_{22}^\ominus x_2^2 + \alpha_{23}^\ominus x_1 x_2] = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

где наряду с безразмерным временем $\tau = \omega_1 t$ введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{T} = RT_0 \left(\frac{a}{h} \right)^2 \left(\frac{12}{\pi^2} \right), \quad \bar{\Theta} = R\Theta_0 h \left(\frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 v^2}, \quad K = \frac{4\alpha p_\infty}{\rho \omega_1^2 h^2}, \\ v = M \frac{h}{a}, \quad \omega_i = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \left(\frac{i\pi}{a} \right)^2 \quad (i=1,2), \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left(\varepsilon + \frac{a_\infty \rho_\infty}{\rho h} \right); \end{aligned} \quad (13)$$

а также следующие коэффициенты α_{ik} и β_{ik} , учитывающие аэродинамическую нелинейность:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = \frac{\pi}{12} (\alpha + 1) K v^2, \quad \alpha_{12} = \frac{7\pi}{15} (\alpha + 1) K v^2, \quad \alpha_{21} = \frac{2\pi}{15} (\alpha + 1) K v^2, \\ \beta_{11} = \beta_{21} = \frac{\pi^2}{30} (\alpha + 1) K v^3, \quad \beta_{22} = \frac{22\pi^2}{105} (\alpha + 1) K v^3, \quad \beta_{12} = -\frac{6\pi^2}{35} (\alpha + 1) K v^3, \end{aligned} \quad (14)$$

следующие коэффициенты δ_{ij}^\ominus , учитывающие линейное взаимодействие температуры и обтекающего потока с колеблющейся пластинкой:

$$\begin{aligned} \delta_{11}^\ominus = \frac{9}{4} (\alpha + 1) K v^2, \quad \delta_{12}^\ominus = -\frac{21}{40} (\alpha + 1) K^2 v^3, \\ \delta_{21}^\ominus = -\frac{3}{40} (\alpha + 1) K^2 v^3, \quad \delta_{22}^\ominus = \frac{1}{80} (\alpha + 1) K v^2 (180 + K^2 v^2), \end{aligned} \quad (15)$$

и следующие коэффициенты α_{ij}^\ominus , учитывающие нелинейное (квадратное) взаимодействие указанных процессов:

$$\alpha_{11}^\ominus = - \left(\frac{9(1152 + (32 - 3\pi^2)K^2 v^2)}{8\pi^3} \delta - \frac{3\pi}{160} (\alpha + 1) K^2 v^4 \right),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{12}^{\ominus} &= -\left(\frac{3(1152 + (32 - 3\pi^2)K^2v^2)}{2\pi^3} \delta + \frac{81\pi}{280}(\varkappa + 1)K^2v^4 \right), \\
\alpha_{13}^{\ominus} &= Kv \left(\frac{27}{2\pi} \delta - \frac{\pi}{160}(\varkappa + 1)(180 + K^2v^2)v^2 \right), \\
\alpha_{21}^{\ominus} &= Kv \left(\frac{27}{4\pi} \delta - \frac{\pi}{640}(\varkappa + 1)(900 + K^2v^2)v^2 \right), \\
\alpha_{22}^{\ominus} &= Kv \left(\frac{81}{\pi} \delta - \frac{\pi}{210}(\varkappa + 1)(630 + K^2v^2)v^2 \right), \\
\alpha_{23}^{\ominus} &= -\left(\frac{3(1152 + (32 - 3\pi^2)K^2v^2)}{\pi^3} \delta - \frac{33\pi}{140}(\varkappa + 1)K^2v^4 \right).
\end{aligned} \tag{16}$$

В (12), (13) ω_i – частоты собственных колебаний, χ , v , \bar{T} , $\bar{\Theta}$ – параметры, характеризующие соответственно процесс затухания, скорость обтекающего потока и температурного поля.

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (12) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра v) и температуры (от величин \bar{T} , $\bar{\Theta}$).

2. Условия и области устойчивости

Решению нелинейной задачи, как правило, будет предшествовать анализ соответствующей линейной задачи. Это объясняется тем, что: а) на основе линейной задачи можно найти как критическое значение параметра $v = v_*$ (следовательно, и критическое значение скорости обтекающего потока $U_* = ah^{-1}v_*a_{\infty}$ или $M_* = ah^{-1}v_*$), при котором невозмущённое состояние пластинки становится неустойчивым относительно малых возмущений, так и области устойчивости; б) указанное критическое значение U_* (или M_* или v_*), которое назовём “нижней критической скоростью”, будет необходимым и при исследовании задачи устойчивости в нелинейной постановке. Соответствующая линейная задача решена в [8]. Ниже приводятся некоторые основные результаты этой работы, необходимые для дальнейшего.

Итак, соответствующая (12) линейная система имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T}\delta)x_1 - \frac{2}{3}Kv x_2 + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\ominus x_1 + \delta_{12}^\ominus x_2) &= 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T}\delta)x_2 + \frac{2}{3}Kv x_1 + \bar{\Theta}(\delta_{21}^\ominus x_1 + \delta_{22}^\ominus x_2) &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Отметим, что в отсутствие обтекающего потока ($v = 0$), когда $\delta = 1$ система (17) допускает следующие решения: $x_1 = \text{const} \neq 0, x_2 = 0$ и $x_1 = 0, x_2 = \text{const} \neq 0$, отвечающие от тривиального решения $x_1 = x_2 = 0$ при

$$\bar{T} = 1 \quad \text{или} \quad T_{0*}^{(1)} = \frac{\pi^2}{12R} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (18)$$

в случае первого решения ($x_1 = \text{const} \neq 0, x_2 = 0$) и при

$$4\bar{T} = \gamma^2 \quad \text{или} \quad T_{0*}^{(2)} = \frac{\pi^2 \gamma^2}{48R} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \quad (19)$$

в случае второго решения ($x_1 = 0, x_2 = \text{const} \neq 0$). Первое решение соответствует выпучиванию пластинки по одной полуволне, второе – выпучиванию по двум полуволнам. Формулами (18) и (19) определяются критические значения температуры T_0 , при которых пластинка в отсутствие потока теряет устойчивость по формам, указанным выше.

Представляя решение системы (17) в виде

$$x_1 = y_1 e^{\lambda\tau}, \quad x_2 = y_2 e^{\lambda\tau},$$

получим следующее характеристическое уравнение относительно λ :

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0 \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1; \quad a_1 = 2\chi; \quad a_2 = 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) + \chi^2 \\ a_3 &= \left[1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) \right] \chi \\ a_4 &= (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2 v^2 + (\delta_{11}^\ominus \delta_{22}^\ominus - \delta_{12}^\ominus \delta_{21}^\ominus) \bar{\Theta}^2 + \\ &+ \left(\gamma^2 (\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) - (4\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)\bar{T}\delta \right) \bar{\Theta} \end{aligned}$$

Невозмущённая форма пластинки будет устойчива, если действительные части

корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица, запишутся в виде:

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 4), \quad \Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_3^2 a_0 > 0 \quad (21)$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Третье условие выполняется, если выполняется четвёртое условие. Из остальных условий получим следующие неравенства, определяющие область устойчивости рассматриваемой термоупругой системы в пространстве параметров v , \bar{T} , $\bar{\Theta}$:

$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus}) &> 0 \\ (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2v^2 + (\delta_{11}^{\ominus}\delta_{22}^{\ominus} - \delta_{12}^{\ominus}\delta_{21}^{\ominus})\bar{\Theta}^2 + \\ &+ \left(\gamma^2(\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus}) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^{\ominus} - \delta_{21}^{\ominus}) - (4\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus})\bar{T}\delta \right)\bar{\Theta} > 0 \\ (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2v^2 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1) - (6(\delta_{22}^{\ominus} - \delta_{11}^{\ominus})\bar{\Theta} + 10\chi^2)\bar{T}\delta + \\ + 2\left((\gamma^2 - 1)(\delta_{22}^{\ominus} - \delta_{11}^{\ominus}) + \frac{4}{3}Kv(\delta_{12}^{\ominus} - \delta_{21}^{\ominus}) + (\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus})^2\chi^2 \right)\bar{\Theta} + \\ + (4\delta_{12}^{\ominus}\delta_{21}^{\ominus} + (\delta_{22}^{\ominus} - \delta_{11}^{\ominus})^2)\bar{\Theta}^2 &> 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Если влиянием затухания можно пренебречь, то вместо (20) получается биквадратное уравнение, и, поэтому, условиями устойчивости будут:

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_2^2 - 4a_4 > 0. \quad (23)$$

Исследование области устойчивости рассматривается в следующих случаях:

- 1) $\bar{T} \neq 0, \quad \bar{\Theta} = 0$;
- 2) $\bar{T} = 0, \quad \bar{\Theta} \neq 0$.

1) **Случай постоянного температурного поля** ($\bar{\Theta} = 0$). В этом случае, когда $\delta = 1$ (т.е. когда края пластинки неподвижны) условия (22) существенно упрощаются и принимают вид:

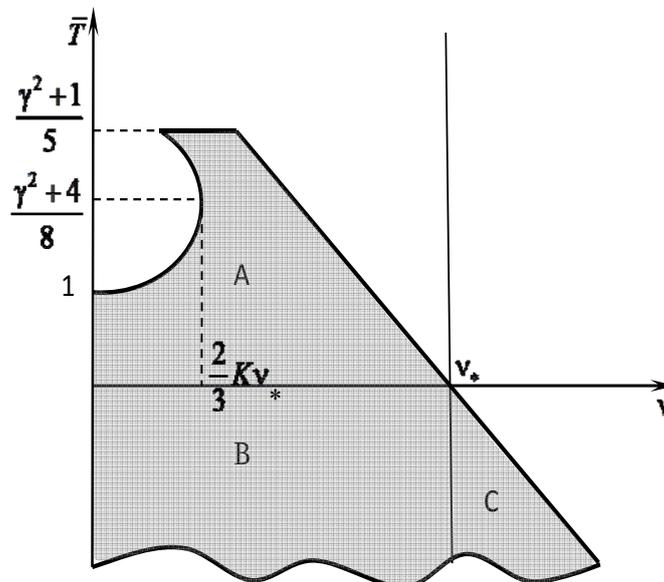
$$\begin{aligned} 1 + \gamma^2 - 5\bar{T} &> 0, \\ (1 - \bar{T})(\gamma^2 - 4\bar{T}) + \frac{4}{9}K^2v^2 &> 0, \\ (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T})^2 - \frac{16}{9}K^2v^2 &> 0. \end{aligned} \quad (24)$$

А если $\delta = 0$ (т.е. когда края пластинки свободно смещаются), то первые два условия из (22) выполняются во всех случаях, а из третьего условия получается следующая формула для определения нижней критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластинки:

$$v_* = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{K} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}}. \quad (25)$$

Формула (25) совпадает с известной формулой, полученной в [1] и показывает, что постоянное температурное поле не влияет на области устойчивости, если края пластинки свободно смещаются.

Неравенства (24) позволяют построить область устойчивости на плоскости (v, T_0) . Указанная область приведена на фиг.1, где v_*^0 – критическое значение обтекающего потока, когда влияние температурного поля не учитывается.



Фиг.1

Область устойчивости при постоянном температурном поле

Из фиг.1 видно, что:

а) если $T_0 > 0$, то температурное поле существенно сужает область устойчивости (полуполоса $(0 < v < v_*^0, T_0 > 0)$ превращается в область A),

б) если $T_0 < 0$, то температурное поле существенно увеличивает область устойчивости (вместо B – область устойчивости является $B \cup C$).

Для наглядности в табл.1 приведены значения v_* в зависимости от T_0 для различных h/a . Для расчёта здесь и дальнейшем принято $\alpha=23.8 \cdot 10^{-6}$ град $^{-1}$; $k=1200$ Вт/(м 2 хград); $\lambda=210$ Вт/(мхград); $\mu=0.34$.

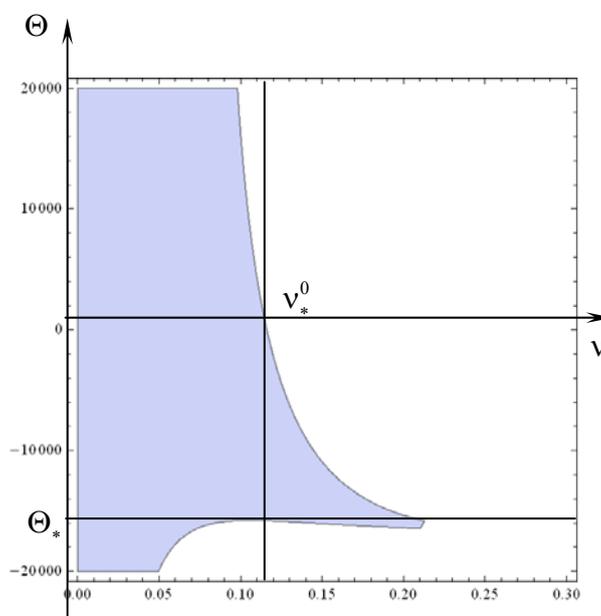
Таблица 1. Влияние постоянного температурного поля на критическую скорость

$T_0, ^\circ C$ h/a	-100	-50	0	5	50
1/50	5.4622	3.6604	1.8586	1.6785	0.05687
1/80	1.6912	0.9874	0.2836	0.06165	Неуст.
1/100	1.01705	0.5667	0.1162	0.0711	Неуст.
1/300	0.1015	0.05148	0.001434	Неуст.	Неуст.

В этой таблице “неустойчивость” означает, что при указанных T_0 пластинка теряет устойчивость в отсутствии потока газа. Рассматриваемый случай исследован многими авторами, в частности, этому случаю посвящены работы [4-8].

2) **Влияние градиента температуры на область устойчивости** ($\bar{T} = 0, \bar{\Theta} \neq 0$). В этом случае условиями устойчивости будут (22) при $T_0 = 0$, причём указанные условия не зависят от вида закрепления краёв пластинки в своей плоскости.

На основе условий (22) построена область устойчивости на плоскости (v, Θ)



Фиг. 2
Область устойчивости при $T_0 = 0$

при тех же исходных данных, что приведены в предыдущем случае.

На фиг.2 приведена часть области устойчивости, соответствующая умеренным температурным полям.

Из фиг.2 видно, что: а) если $\Theta > 0$, то температурное поле заметно сужает область устойчивости; б) если $\Theta < 0$, то до некоторого определённого отрицательного значения Θ_* область устойчивости заметно увеличивается, после чего, с увеличением $|\Theta|$ происходит существенное уменьшение области устойчивости.

Для наглядности в табл. 2 приведены значения v_* в зависимости от Θ при приведённых вышеисходных данных и различных h/a .

Таблица 2. Влияние градиента температуры на критическую скорость

$\theta, ^\circ C/m$ h/a	-5000	-2500	0	2500	5000
1/50	2.5164	2.1183	1.8586	1.5702	1.4895
1/80	0.3509	0.3084	0.2836	0.2671	0.2554
1/100	0.1266	0.1208	0.1162	0.1124	0.1093
1/300	0.001437	0.001436	0.001434	0.001432	0.00143

Табл. 2 показывает, что влияние градиента температуры на критическую скорость является существенным в случае сравнительно толстых пластин.

В работе [8] рассмотрен также общий случай ($\bar{T} \neq 0, \bar{\Theta} \neq 0$) и показан, что если обе составляющие температурного поля отличны от нуля, то влияние температурного поля на область устойчивости может оказаться более существенным. Например, при сравнительно толстых пластинках ($h/a=1/50$), когда Θ изменяется от -5000 до 5000, критическая скорость обтекающего потока из 2.5164 изменяется в 1.4895, т.е. уменьшается в 1.7 раза.

3. Существование и характер флаттерных колебаний

Переходим к исследованию нелинейной задачи, описываемой системой (12). Эта система отличается от аналогичных систем устойчивости гибких пластин, нагруженных консервативными силами, наличием членов с квадратичными нелинейностями. Указанные члены, имеющие аэродинамическое и термоаэроупругое происхождение, характеризуют несимметричность нелинейности, присущую задачам устойчивости гибких оболочек. Поэтому, приближённое периодическое решение системы (12) будем искать в виде [13]:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \theta \tau + B_1 \sin \theta \tau + C_1 + \dots, \\ x_2 &= A_2 \cos \theta \tau + C_2 + \dots \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь A_i, B_i, C_i и θ ($i=1,2$) – неизвестные постоянные; точками обозначены

члены, содержащие гармоники.

Решение (26) подставляется в систему (12) и приравниваются нулю коэффициенты при свободном члене, $\cos \theta \tau$ и $\sin \theta \tau$ (члены, содержащие гармоники, пренебрегаются). Полученная при этом система нелинейных алгебраических уравнений довольно громоздка для исследования и здесь не приводится. Для получения приближённого решения этой системы предполагается [13], что: а) затухание достаточно мало ($\chi |B_1| \ll |A_i|$, $|B_1| \ll |A_i|$) и б) рассматриваемая аэроупругая система совершает установившееся колебание с конечной амплитудой вокруг состояния бесконечно мало отличающегося от невозмущённого ($|A_i| \gg |C_j|$; $j = 1, 2$). Тогда, пренебрегая степенями выше первой и произведения величин B_1 , C_1 и C_2 , указанная нелинейная система представляется следующими подсистемами:

уравнениями, полученными приравнением нулю свободных членов

$$C_1 - \frac{2}{3} K v C_2 + \frac{1}{2} (\alpha_{11} A_1^2 + \alpha_{12} A_2^2) + \frac{1}{2} C_2 (\beta_{11} A_1^2 + \beta_{12} A_2^2) + A_2 (\beta_{11} A_1 C_1 + \beta_{12} A_2 C_2) + \left(\frac{9}{2} A_1 \left(A_1 C_1 + \frac{4}{3} A_2 C_2 \right) + 6 A_2 (A_1 C_2 + A_2 C_1) \right) \delta - \bar{T} C_1 \delta + \bar{\Theta} \left(\delta_{11}^{\ominus} C_1 + \delta_{12}^{\ominus} C_2 + \frac{1}{2} (\alpha_{11}^{\ominus} A_1^2 + \alpha_{12}^{\ominus} A_2^2 + \alpha_{13}^{\ominus} A_1 A_2) \right) = 0, \quad (27)$$

$$\gamma^2 C_2 + \frac{2}{3} K v C_1 + \frac{1}{2} \alpha_{21} A_1 A_2 + \frac{1}{2} C_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + A_1 (\beta_{21} A_1 C_1 + \beta_{22} A_2 C_2) + 6 (A_2 (A_1 C_1 + 12 A_2 C_2) + A_1 (A_1 C_2 + A_2 C_1)) \delta - 4 C_2 \bar{T} \delta + \bar{\Theta} \left(\delta_{21}^{\ominus} C_1 + \delta_{22}^{\ominus} C_2 + \frac{1}{2} (\alpha_{21}^{\ominus} A_1^2 + \alpha_{22}^{\ominus} A_2^2 + \alpha_{23}^{\ominus} A_1 A_2) \right) = 0,$$

уравнениями, полученными приравнением нулю коэффициентов при $\cos \theta \tau$

$$(1 - \theta^2) A_1 - \frac{2}{3} K v A_2 + \chi \theta B_1 + 2 (\alpha_{11} A_1 C_1 + \alpha_{12} A_2 C_2) + \frac{3}{4} A_2 (\beta_{11} A_1^2 + \beta_{12} A_2^2) + \frac{9}{4} A_1 (A_1^2 + 4 A_2^2) \delta - \bar{T} A_1 \delta + \bar{\Theta} \left(\delta_{11}^{\ominus} A_1 + \delta_{12}^{\ominus} A_2 + 2 (\alpha_{11}^{\ominus} A_1 C_1 + \alpha_{12}^{\ominus} A_2 C_2) + \alpha_{13}^{\ominus} (A_1 C_2 + A_2 C_1) \right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
& (\gamma^2 - \theta^2) A_2 + \frac{2}{3} K v A_1 + \alpha_{21} (A_1 C_2 + A_2 C_1) + \\
& + \frac{3}{4} A_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + 9 A_2 (A_1^2 + 4 A_2^2) \delta - 4 A_2 \bar{T} \delta + \\
& + \bar{\Theta} (\delta_{21}^\ominus A_1 + \delta_{22}^\ominus A_2 + 2 (\alpha_{21}^\ominus A_1 C_1 + \alpha_{22}^\ominus A_2 C_2) + \alpha_{23}^\ominus (A_1 C_2 + A_2 C_1)) = 0
\end{aligned} \tag{28}$$

уравнениями, полученными приравнением нулю коэффициентов при $\sin \theta \tau$

$$\begin{aligned}
(1 - \theta^2) B_1 - \chi \theta A_1 + \frac{1}{2} \beta_{11} A_1 A_2 B_1 + 3 \left(\frac{3}{4} A_1^2 + A_2^2 \right) B_1 \delta - \bar{T} \delta B_1 + \delta_{11}^\ominus B_1 \bar{\Theta} &= 0, \\
\frac{2}{3} K v B_1 - \chi \theta A_2 + \frac{1}{2} \beta_{21} A_1^2 B_1 + \frac{1}{4} B_1 (\beta_{21} A_1^2 + \beta_{22} A_2^2) + 6 A_1 A_2 B_1 \delta + \delta_{21}^\ominus B_1 \bar{\Theta} &= 0,
\end{aligned} \tag{29}$$

Третья подсистема (29) учитывает эффект демпфирования. Учитывая малость затухания, из уравнений этой подсистемы, путем линеаризации, получим

$$(1 - \theta^2) B_1 - \chi \theta A_1 - \bar{T} \delta B_1 + \delta_{11}^\ominus B_1 \bar{\Theta} = 0, \quad \frac{2}{3} K v B_1 - \chi \theta A_2 + \bar{\Theta} (\delta_{21}^\ominus A_1 + \delta_{22}^\ominus A_2) = 0.$$

Отсюда при $\bar{\Theta} = 0$ имеем:

$$B_1 = \frac{\chi \theta}{1 - \theta^2 - \bar{T} \delta} A_1, \quad A_2 = \frac{2}{3} \frac{K v}{1 - \theta^2 - \bar{T} \delta} A_1. \tag{30}$$

На границе области флаттера (на прямой линии, ограничивающей область устойчивости с правой стороны (фиг.2)) $v = v_*$ и имеет следующее представление:

$$v_* = \frac{3}{4K} (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}). \tag{31}$$

При $v = v_*$ из линейных уравнений второй подсистемы для частоты колебаний θ_* на границе области флаттера получим

$$\theta_*^2 = \frac{1}{2} (\gamma^2 + 1 - 5\bar{T}). \tag{32}$$

В силу (31) и (32), из (30) имеем $A_2 = -A_1$ при $\chi \ll 1$, $v = v_*$ и $\theta = \theta_*$.

Принимается, что это соотношение приближённо сохраняется ($A_2 \approx -A_1$) и при

$v \neq v_*$, если разность $|v - v_*|$ достаточно мала [1].

Пользуясь соотношением $A_2 \approx -A_1$, уравнениями первой подсистемы и первым уравнением второй подсистемы, определяются C_1, C_2 и θ , выраженные через A_1 . Используя полученные выражения для C_1, C_2 и θ , из последнего (неиспользованного) уравнения второй подсистемы (при $\chi \ll 1$) получается характеристическое (разрешающее) уравнение относительно A_1

$$b_0 A_1^6 + b_1 A_1^4 + b_2 A_1^2 + b_3 = 0, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{3}{4}(\beta_0 - 45\delta) \left\{ H_{11} \left(\frac{135}{2}\delta - H_{22} \right) - \frac{1}{4} R_{12} R_{21} \right\}, \\ b_1 &= \frac{3}{4}(\beta_0 - 45\delta) \left\{ P_{11} \left(\frac{135}{2}\delta - H_{22} \right) + H_{11} P_{22} - \frac{1}{2} R_{12} S_{21} - \frac{1}{2} R_{21} S_{12} \right\} + \\ &+ P_0 \left\{ H_{11} \left(\frac{135}{2}\delta - H_{22} \right) - \frac{1}{4} R_{12} R_{21} \right\} + \\ &+ (2M_{11} - M_0) \left\{ -\frac{1}{2} L_{12} \left(\frac{135}{2}\delta - H_{22} \right) + \frac{1}{4} R_{12} (L_{21} - 1) \right\} - \\ &- (2M_{12} - M_0) \left\{ \frac{1}{2} H_{11} (1 - L_{21}) + \frac{1}{4} R_{21} L_{12} \right\}, \\ b_2 &= (2M_{11} - M_0) \left\{ -\frac{1}{2} L_{12} P_{22} + \frac{1}{2} S_{12} (L_{21} - 1) \right\} - \\ &- (2M_{12} - M_0) \left\{ \frac{1}{2} P_{11} (1 - L_{21}) + \frac{1}{2} S_{21} L_{12} \right\} + \\ &+ \frac{3}{4}(\beta_0 - 45\delta) \{ P_{11} P_{22} - S_{12} S_{21} \} + \\ &+ P_0 \left\{ P_{11} \left(\frac{135}{2}\delta - H_{22} \right) + H_{11} P_{22} - \frac{1}{2} R_{12} S_{21} - \frac{1}{2} R_{21} S_{12} \right\}, \\ b_3 &= P_0 \{ P_{11} P_{22} - S_{12} S_{21} \}, \quad R_{ij} = 3\beta_{ij} + \beta_{ii} - 24\delta, \quad P_{ij} = (\gamma^2)^{i-1} - i^2 \bar{T}\delta + \bar{\Theta}\delta_{ij}^\ominus, \\ P_0 &= 1 - \gamma^2 + \frac{4}{3}Kv + 3\bar{T}\delta + \bar{\Theta}\delta_0^\ominus, \quad S_{ij} = (-1)^i \frac{2}{3}Kv + \bar{\Theta}\delta_{ij}^\ominus, \end{aligned}$$

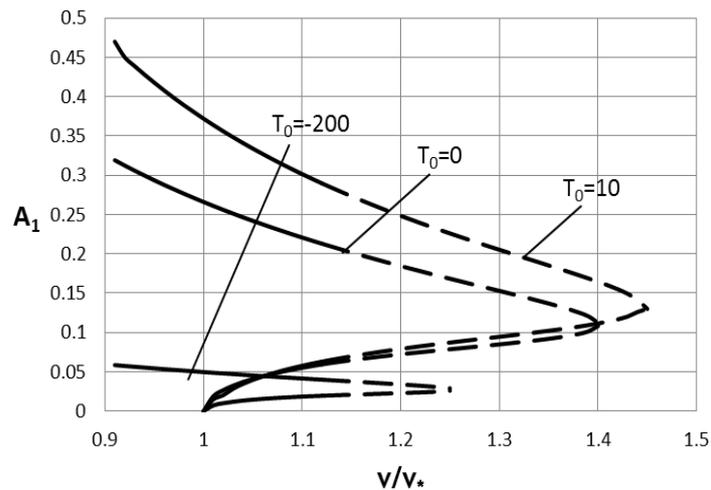
$$L_{ij} = (\alpha_{ii})^{j-1} + \alpha_{ij} + \bar{\Theta}(\alpha_{ii}^{\ominus} + \alpha_{ij}^{\ominus} - \alpha_{i3}^{\ominus}), \quad M_{ij} = \alpha_{ij} + \bar{\Theta}(\alpha_{ij}^{\ominus} + \alpha_{i+1j}^{\ominus}),$$

$$M_0 = \alpha_{21} + \bar{\Theta}(\alpha_{13}^{\ominus} + \alpha_{23}^{\ominus}), \quad H_{ij} = \frac{21}{2} \delta - \beta_{ij},$$

$$\beta_0 = \beta_{12} + \beta_{22} - \beta_{11} - \beta_{12}, \quad \delta_0^{\ominus} = \delta_{11}^{\ominus} - \delta_{12}^{\ominus} + \delta_{21}^{\ominus} - \delta_{22}^{\ominus}$$

Уравнение (33) решено численно при следующих исходных данных:
 $E = 7.3 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $\mu = 0.34$; $\rho_0 = 2.79 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ (дюралюминий), $\alpha = 1.4$;
 $\rho_{\infty} = 1.29 \text{ кг/м}^3$ (воздух), $\Theta_0 = 0$ и исследована зависимость амплитуды установившихся флаттерных колебаний от параметров v и T_0 для различных значений h/a . Результаты численного решения приведены на фиг. 3,4, в табл. 3 и показывают, что:

- в случае сравнительно толстых пластин:
 - Если постепенно увеличивать скорость обтекающего потока, то можно наблюдать следующую картину (фиг.3): режим флаттерных колебаний (которые носят характер “мягкого” возбуждения) сохраняется вплоть до $v = v^*$ (значение v^* зависит от T_0 и поэтому на фиг.3 эти значения особо выделены), где колебания “сорвутся” и восстановится невозмущённое состояние пластинки. При снижении



Фиг.3. Зависимость “амплитуда-скорость” для относительно толстых пластин

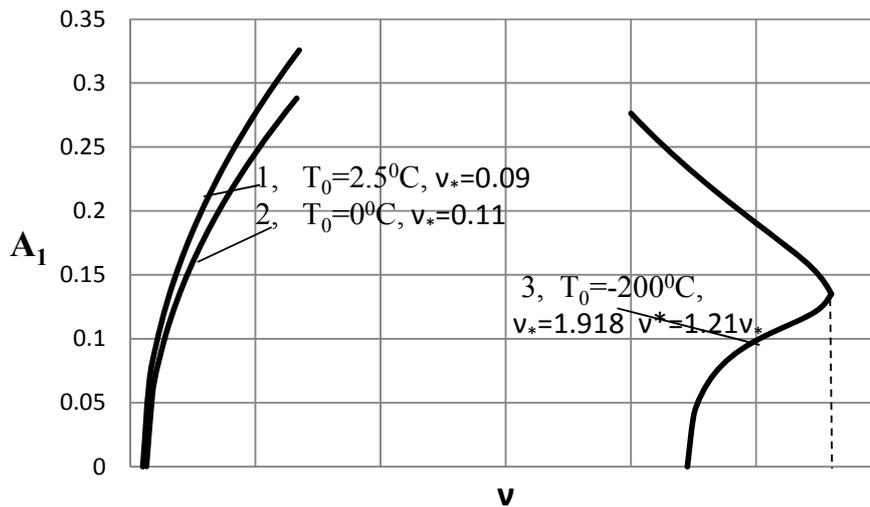
скорости невозмущённое состояние становится устойчивой, пока $v > v_*$. При

$v = v_*$ амплитуда флаттерных колебаний скачком возрастает до конечного значения.

С дальнейшим уменьшением скорости амплитуда возрастает. Последнее указывает о величине амплитуд возмущений, необходимых для того, чтобы вызвать незатухающие колебания пластинки при докритических скоростях (причём, чем меньше скорость потока, тем большая амплитуда требуется).

На фиг.3 пунктирами показаны те части кривых $A_1(v)$, которые, вопреки нашему предположению, соответствуют таким значениям аргумента v , которые не принадлежат к достаточно малой окрестности v_* ;

- в случае сравнительно тонких пластин:



Фиг.4. Зависимость “амплитуда-скорость” для относительно тонких пластин

- Если пластинка достаточно тонкая и $T_0 > 0$, то возбуждение флаттерных

колебаний носит “жесткий” характер, т.е. при $v < v_*$ действительные значения

A_1 отсутствуют, а при $v \geq v_*$ выполняется неравенство $\partial A_1 / \partial v > 0$ (кривые 1 и

2 на фиг.4). А это значит, что присутствие температурного поля, у которого

$T_0 > 0$, не меняет характер флаттерных колебаний. Отметим, что при $T_0 = 0$

имеет место аналогичная зависимость [4].

- Для каждого значения отношения h/a существует отрицательная

температура T_0 , при котором зависимость “амплитуда-скорость” аналогична

случаю толстых пластин и происходит переход из одного режима колебаний к другому (табл.3).

Таблица 3. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu = \nu_*$ и $\Theta = 0$

$T_0, ^\circ C$ h/a	-100	-70	-50	-20	0	T_*^0	Значения T_*^0
1/300	6.69 и 0	0	0	0	0	0	0.287
1/200	2.203 и 0	5.034 и 0	0	0	0	0	0.645
1/100	0.452 и 0	0.642 и 0	0.933 и 0	0	0	0	2.579
1/50	0.083 и 0	0.106 и 0	0.126 и 0	0.183 и 0	0.271 и 0	0.372 и 0	10.3157

Табл. 3 отмечает примерный порядок постоянной температуры T_0 , при котором происходит переход из одного режима колебаний к другому. Отметим, что для наглядности в табл. 3 приведены значения A_1 на границе флаттера ($\nu = \nu_*$) при различных T_0 и h/a .

- Если $\Theta_0 \neq 0$ и $T_0 = 0$, то наблюдается следующая картина (см. табл. 4):
 - для сравнительно толстых пластин зависимость $A_1(\Theta_0)$ аналогична случаю зависимости $A_1(T_0)$ при $\Theta_0 = 0$ в случае тонких пластин;
 - для сравнительно тонких пластин имеет место обратная картина и, более того, в случае достаточно тонких пластин появляется возможность возбуждения флаттерных колебаний “в большом”.

Таблица 4. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $\nu = 1.1\nu_*$ и $T_0 = 0$

$\bar{\Theta}$ h/a	-5000	0	5000
1/300	0.06787, 0.5633 и 1.9388	0.2108	0.0685, 0.5593 и 1.9502
1/100	0.1521	0.2033	0.2066
1/50	0.1365	0.5525 и 0.2209	0

- Если $\Theta_0 \neq 0$ и $T_0 \neq 0$, то имеют место следующие типы зависимости “амплитуда-скорость” (табл.5):
 - для сравнительно толстых пластин возможен переход из одного типа колебаний к другому;
 - для сравнительно тонких пластин возможен только случай “жёсткого” возбуждения.

Таблица 5. Значения амплитуды флаттерных колебаний при $v = 1.1v_*$ и $T_0 \neq 0$

$\bar{\Theta}$ h/a	-5000	0	5000	
1/100	0.1905	0.1905	0.1905	$\bar{T} = 2$
1/50	0.1157	0.0572 и 0.2509	Неуст.	$\bar{T} = 5$

Работа выполнена при поддержке гранта A2-NET-TEAM: Advanced Aircraft Network for Theoretical & Experimental Aeroservoelastic Modeling фонда FP7-PEOPLE-2010-IRSES.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.: Наука, 1972. 432с.
3. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твёрдых тел. М.: Наука, 1978. Т.11. С.67–122.
4. Болотин В.В. Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа. // В сб.: “Расчеты на прочность”. М.: Машгиз, 1060. Вып.6.
5. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Выпучивание и установившийся флаттер термически сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке. //Инж. журнал. 1961. Т.1. N2. С.82–96.
6. Hoff N.I. Thermal buckling of supersonic wing panels. Journ. Aeronaut. Sci., v.23, N11, 1956.
7. L. Librescu, P. Marzocca, W.A. Silva, “Linear/Nonlinear Supersonic Panel Flutter in a High-Temperature Field,” Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 1, July – August 2004, pp. 918-924.
8. Багдасарян Г.Е., Микилян М.А., Сагоян Р.О. Термоупругая устойчивость удлиненной прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. N4. С.51–67.
9. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949.

10. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. //Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
11. Илюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПММ. 1956. Т.XX. Вып.6.
12. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд-во АН СССР, 1962.
13. Багдасарян Г.Е. Устойчивость ортотропных оболочек в сверхзвуковом потоке газа. //Изв. АН СССР. ОТН Механика и машиностроение. 1961. N4. С. 92–98.

Сведения об авторах:

Багдасарян Геворг Ервандович – академик НАН Армении, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики
Тел.: (010) 552964; **E-mail:** gevorgb@rau.am

Микилян Марине Александровна – к.ф.м.н., доцент, РАУ, факультет прикладной математики и информатики
Тел. (091) 191129; **E-mail:** mikilyan@rau.am

Сагоян Рафаэль Оникович – внештатный работник Института механики НАН Армении.
Тел.: (093) 248226; **E-mail:** rafael1984@mail.ru.

Григорян Грайр – кандидат физико-математических наук

Поступила в редакцию 26. 09. 2012