

УДК 539.3

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПРОДОЛЬНОГО СДВИГА
БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ С
СИСТЕМОЙ ВКЛЮЧЕНИЙ***

Кириллова О. И.

Ключевые слова: цилиндр произвольного сечения, гармонические колебания, коэффициенты интенсивности напряжений, система включений.

Key words: cylinder of arbitrary cross-section, harmonic oscillations, stress intensity factors, the system of inclusions.

Վերիլավա Օ. Ի.

Ներդրակների համարգով կամայական կտրվածքով անվերջ գլանի երկայնական սահքի ներդաշնակ տատանումները

Լուծված է ներդրակների մոտ լարվածային վիճակի որոշման խնդիրը կամայական կտրվածքով անվերջ գլանի երկայնական սահքի տատանումների ժամանակ: Առաջարկված է մոտեցում, որը հնարավորություն է տալիս առանձին բավարարել ներդրակների և գլանի եզրի վրայի պայմանները: Ստացված են լարումների կոնցենտրացիայի հաշվարկի մոտավոր բանաձևեր և նրանց արժեքների վրա տատանումների հաճախության, գլանի երկրաչափության և ներդրակների տեղակայման ազդեցությունները:

Kirillova O.I.

Harmonic oscillation of longitudinal shear in an infinite cylinder of arbitrary cross-section with a system of inclusions

The problem of determining the stress state near the thin rigid inclusions in an infinite cylinder of arbitrary cross-section under oscillations of longitudinal shear. We propose an approach to satisfy the conditions separately on the surface of inclusions and on the boundary of the cylinder. The approximate formulas for calculating stress intensity factors are obtained to investigate the influence of frequency oscillations, geometry of the cylinder and location of the inclusions on their values.

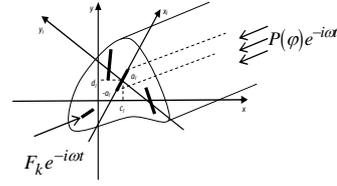
Решена задача по определению напряжённого состояния вблизи тонких жёстких включений в бесконечном цилиндре произвольного сечения при колебаниях продольного сдвига. Предложен подход, позволяющий отдельно удовлетворить условия на включениях и на границе цилиндра. Получены приближенные формулы для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений и исследовано влияние на их значения частоты колебаний, а также геометрии цилиндра и расположения включений.

Проблемы определения динамического напряжённого состояния вблизи тонких дефектов в неограниченных телах можно считать достаточно изученными. Как можно видеть из работ [1], [2], [3], это касается как двумерных, так и пространственных задач теории упругости. Однако, аналогичные задачи для тел конечных размеров исследованы значительно меньше. Это связано с тем, что использование прямых численных методов (разностных и конечных элементов) усложняется необходимостью сгущения дискретизации в окрестности дефекта. Одним из перспективных методов для решения таких задач является метод граничных элементов. Но при его применении исходная краевая задача сводится к системе интегральных уравнений и на поверхности дефекта, и на границе тела, что существенно усложняет численную реализацию. В данной работе рассмотрен подход, позволяющий отдельно удовлетворить условиям на поверхностях включений и на границе тела. Предложенный метод основывается на использовании разрывных решений уравнения Гельмгольца.

*Статья доложена на Международной конференции научных трудов, посвящённой 100-летию академика Нагуша Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

1. Постановка задачи.

Рассмотрим упругий цилиндр с образующими, параллельными оси Oz (фиг. 1), сечение которого плоскостью xOy есть произвольная замкнутая гладкая кривая, которая в полярной системе координат определяется уравнением $r = r_0 \psi(\varphi)$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.



Фиг. 1

В цилиндре содержатся N сквозных тонких жёстких включений в виде пластин малой толщины h , которые занимают отрезки длиной $2a_l$ с центрами в точках (c_l, d_l) , $l = 1, 2, \dots, N$. Цилиндр подвержен колебаниям продольного сдвига. Эти колебания могут происходить либо в результате действия на боковую поверхность сдвигающего гармонического напряжения $P(\varphi)e^{-i\omega t}$, либо в результате действия на включения сдвигающих сил $F_k e^{-i\omega t}$. В последнем случае граница цилиндра является неподвижной. При таких условиях отличной от нуля будет только z -компонента вектора перемещения, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца [7]. В полярной системе координат уравнение имеет вид:

$$\Delta w + \kappa_2^2 w = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (1)$$

где $\kappa_2^2 = \omega^2 c_2^{-2}$; $c_2^2 = G \rho_1^{-1}$; G, ρ_1 – модуль сдвига и плотность матрицы, ω – частота колебаний. Множитель $e^{-i\omega t}$ в (1) и всюду далее опущен и рассматриваются только амплитудные значения.

Уравнение (1) рассматривается с двумя типами граничных условий. В случае нагруженной границы

$$\tau_{rz}(r_0 \psi(\varphi), \varphi) = GP(\varphi), \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (2)$$

Если же граница неподвижна, выполняется условие:

$$w(r_0 \psi(\varphi), \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (3)$$

Для формулировки граничных условий на включениях с каждым из них связывается локальная система координат $x_k O_k y_k$. Пусть $w_k(x_k, y_k)$ – z -компонента вектора перемещения при переходе от полярных координат к декартовым $x_k O_k y_k$. Считается, что между телом и включением осуществлены условия полного сцепления:

$$w_k(x_k, \pm 0) = d_k, \quad |x_k| < a_k. \quad (4)$$

На поверхностях включений разрывны касательные напряжения, скачок которых обозначен

$$\langle \tau_{zy}^k \rangle = G(\tau_{zy}(x_k, +0) - \tau_{zy}(x_k, -0)) = \chi_k(x_k), \quad |x_k| < a_k. \quad (5)$$

В равенстве (4) d – амплитуда продольных колебаний включения, которая определяется из уравнения движения включения как жёсткого тела. При гармонических колебаниях это уравнение имеет вид:

$$-m_k d_k \omega^2 = F_k + \int_{-a_k}^{a_k} \chi_k(\eta) d\eta, \quad m_k = 2a_k h_k \rho_k, \quad (6)$$

где ρ_k – плотность включения. Уравнение (6) записано для случая, когда к включениям приложена сила и выполнено условие (3). В случае нагруженной границы цилиндра (2) в уравнении (6) полагается $F_k = 0$.

При сформулированных условиях ставится задача определить коэффициенты интенсивности напряжения (КИН) для каждого из включений.

2. Решение задачи. В локальной системе координат для каждого включения строится разрывное решение [6] уравнения Гельмгольца со скачками, определёнными в (5):

$$w_l^{(d)}(x_l, y_l) = \int_{-a_l}^{a_l} \frac{\chi_l(\eta)}{G} r_2(\eta - x_l, y_l) d\eta, \quad (7)$$

$$r_2(\eta - x_l, y_l) = -\frac{i}{4} H_0^{(1)} \left(\kappa_2 \sqrt{(\eta - x_l)^2 + y_l^2} \right),$$

где $H_0^{(1)}(Z)$ – функция Ханкеля.

Далее в системе $Or\varphi$ перемещение представляется в виде

$$w^{(g)}(r, \varphi) = w_0^{(g)}(r, \varphi) + \sum_{l=1}^N w_l^{(g)}(r, \varphi). \quad (8)$$

В (8) $w_l^{(g)}(r, \varphi)$ – разрывные решения (5) после перехода к полярным координатам, а $w_0^{(g)}(r, \varphi)$ – такое решение уравнения Гельмгольца (1), что для (8) выполняются граничные условия (2) или (3). Эта неизвестная функция представляется в виде линейной комбинации частных решений уравнения (1):

$$w_0^{(g)}(r, \varphi) = r_0 \sum_{s=1}^M A_s g_s(r, \varphi), \quad (9)$$

где $g_{2m-1}(r, \varphi) = J_{m-1}(\kappa_2 r) \cos(m-1)\varphi$, $g_{2m}(r, \varphi) = J_m(\kappa_2 r) \sin m\varphi$.

Функции $g_s(r, \varphi)$, $s = 1, \dots, M$ линейно независимы и образуют полную замкнутую систему функций [4].

Для реализации граничных условий на включениях (4) перемещения в локальной системе координат аналогично (8) запишутся в виде:

$$w_k(x_k, y_k) = w_k^0(x_k, y_k) + \sum_{l=1}^N w^{kl}(x_k, y_k). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (4), получим систему интегральных уравнений, которая после введения обозначений

$$\begin{aligned} \kappa_0 &= \kappa_2 r_0, \quad \gamma_k = a_k r_0^{-1}, \quad \eta_k = a_k \tau, \quad x_k = a_k \zeta, \quad c_k^0 = c_k r_0^{-1}, \\ d_k^0 &= d_k r_0^{-1}, \quad Gq_l(\tau) = \chi_l(a_l \tau) \end{aligned} \quad (11)$$

и выделения сингулярных составляющих ядер примет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\gamma_k}{2\pi} \int_{-1}^1 q_k(\tau) \left(\ln|\tau - \zeta| + Q_1^{(k)}(\tau - \zeta) \right) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_{-1}^1 q_l(\tau) F^{kl}(\tau, \zeta) d\tau + r_0 \sum_{s=1}^M A_s g_s(a_k \zeta, 0) = d_k^0, \end{aligned} \quad (12)$$

где $Q_1^{(k)}(z) = O(1)$, $z \rightarrow 0$, а $F^{kl}(\tau, \zeta)$ – бесконечно дифференцируемая функция при $-1 \leq \tau, \zeta < 1$. К (12) необходимо добавить равенство, которое следует из (6) при переходе к новым обозначениям (11):

$$d_k^0 = -\frac{F_k^0}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \varepsilon_k \gamma_k} - \frac{1}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \varepsilon_k \gamma_k} \int_{-1}^1 q_k(\tau) d\tau, \quad (13)$$

где $\bar{\rho}_k = \rho_k \rho_1^{-1}$, $\varepsilon_k = h_k a_k^{-1}$, $F_k^0 = F_k(Ga_k)^{-1}$.

В случае, когда нагрузка приложена к границе, в (13) считается, что $F_k^0 = 0$.

Решение (12) ищем в виде:

$$q_k(\tau) = \sum_{s=1}^M A_s \varphi_s^k(\tau) + \varphi_0^k(\tau). \quad (14)$$

Тогда каждое слагаемое из (14) должно удовлетворять интегральному уравнению (12):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \varphi_s^k(\tau) \left(\gamma_k \ln|\tau - \zeta| + \gamma_k Q_1^{(k)}(\tau - \zeta) + \frac{\pi}{\varepsilon_k \gamma_k \bar{\rho}_k \kappa_0^2} \right) d\tau + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \int_{-1}^1 \varphi_s^l(\tau) F^{kl}(\tau, \zeta) d\tau = -f_{s,k}(\zeta), \end{aligned} \quad (15)$$

где $f_{0,k} = \frac{F_0}{2\bar{\rho}_k \kappa_0^2 \varepsilon_k \gamma_k}$; $f_{s,k} = g_s(a_k \zeta, 0)$, $s = 0, \dots, M$; $k = 1, \dots, N$.

Для нахождения приближённых решений полученных уравнений неизвестные функции представляются в виде

$$\varphi_s^k(\tau) = \frac{\Psi_s^k(\tau)}{\sqrt{1 - \tau^2}}, \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Функции $\Psi_s^k(\tau)$ приближаются интерполяционным многочленом

$$\Psi_s^k(\tau) = \sum_{m=1}^n \Psi_{sm}^k \frac{T_n(\tau)}{(\tau - \tau_m) T_n'(\tau_m)},$$

где $T_n(\tau)$ – многочлен Чебышева, τ_m – его корни, $\Psi_{sm}^k = \Psi_s^k(\tau_m)$.

Вследствие применения метода механических квадратур получена система алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{sm}^k \left(\gamma_k B_{jm} + \gamma_k Q_1^{(k)}(\tau_m - \zeta_j) + \frac{\pi}{\varepsilon_k \gamma_k \bar{\rho}_k \kappa_0^2} \right) + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq k}}^N \sum_{m=1}^n a_m \Psi_{sm}^l F_{jm}^{kl} = -f_{s,k}(\zeta), \end{aligned} \quad (16)$$

где $F_{jm}^{kl} = F^{kl}(\tau_m, \zeta_j)$; $s = 0, \dots, M$; $k = 1, \dots, N$.

В (16) для вычисления интеграла с логарифмической особенностью использована квадратурная формула [5], B_{jm} – коэффициенты этой формулы.

Для определения коэффициентов A_k воспользуемся условиями (2) или (3) на границе. В случае удовлетворения граничному условию (2) приходим к равенству:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \int_{-1}^1 \varphi_s^l(\tau) V_l(\tau, \varphi) d\tau + B_s(\varphi) \right) = P(\varphi), \quad (17)$$

$$\text{где } V_l(\tau, \varphi) = \frac{i\gamma_l \kappa_0}{4} \left(-\frac{H_1^{(1)}(\kappa_0 R_{0l})}{R_{0l}} ((\gamma_l \tau - x_{0l}) \cos \alpha_l + y_{0l} \sin \alpha_l) \cos(\bar{n}, x) + \right. \\ \left. + \frac{H_1^{(1)}(\kappa_0 R_{0l})}{R_{0l}} (y_{0l} \cos \alpha_l - (\gamma_l \tau - x_{0l}) \sin \alpha_l) \cos(\bar{n}, y) \right),$$

$$B_s(\varphi) = f_s^{(x)} \cos(\bar{n}, x) + f_s^{(y)} \cos(\bar{n}, y); \quad f_s^{(u)} = r_0 \frac{\partial g_s}{\partial u} \Big|_{r=r_0 \psi(\varphi)}.$$

В случае неподвижной границы аналогичное равенство имеет вид:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_s^l(\tau) U_l(\tau, \varphi) d\tau + g_s(r_0 \psi(\varphi), \varphi) \right) = \\ = -\sum_{l=1}^N \gamma_l \int_{-1}^1 \varphi_0^l(\tau) U_l(\tau, \varphi) d\tau, \quad (18)$$

$$\text{где } U_l(\tau, \varphi) = -\frac{i}{4} H_0^1 \left(\kappa_0 \sqrt{(\gamma_l \tau - x_{0l})^2 + y_{0l}^2} \right).$$

Квадратурные формулы Гаусса-Чебышева и использование коллокационного метода в узлах $\sigma_b = \frac{2\pi b}{M}$, $b = 1, \dots, M$ дают возможность заменить (18) и (17)

системами линейных уравнений с неизвестными A_s , $s = 1, \dots, M$:

$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^l V_l(\tau_m, \sigma_b) + B_s(\sigma_b) \right) = P(\sigma_b), \quad (19)$$

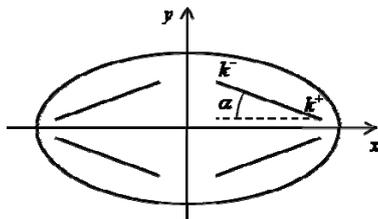
$$\sum_{s=1}^M A_s \left(\sum_{l=1}^N \gamma_l \sum_{m=1}^n a_m \psi_{sm}^l U_l(\tau_m, \sigma_b) + g_s(r_0 \psi(\sigma_b), \sigma_b) \right) = \\ = -\sum_{l=1}^N \gamma_l \sum_{m=1}^n a_m \psi_{0m}^l U_l(\tau_m, \sigma_b). \quad (20)$$

Как известно, концентрация напряжения в теле около тонких жёстких включений характеризуются КИН [8]:

$$\begin{bmatrix} \tau_{z_1} \\ \tau_{z_1} \end{bmatrix} = -\frac{K^\pm}{\sqrt{r}} \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} + O(1), \quad r > 0.$$

После решения систем (19) или (20) и (16), приближённые значения КИН находятся по формулам:

$$k_l^\pm = \frac{K_l^\pm}{G_1 \sqrt{2a_l}} = \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{s=1}^M A_s \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_{sm}^l \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\mp 1} \mp \frac{(\pm 1)^n}{n} \sum_{m=1}^n (-1)^m \psi_m^* \left(\operatorname{tg} \frac{\gamma_m}{2} \right)^{\mp 1}.$$

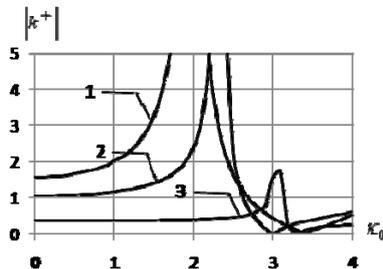


Фиг. 2

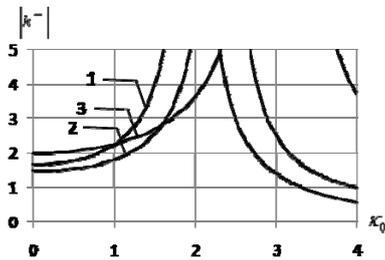
3. Результаты численных исследований. Для численной реализации предложенного метода рассматривался эллиптический цилиндр с четырьмя одинаковыми полосовыми включениями, расположенными, как показано на фиг. 2. Предполагалось, что эксцентриситет $\varepsilon = 0,5$, а наклон включений к большой полуоси характеризует угол α (фиг. 2). Рассчитывались значения коэффициентов интенсивности для включения, расположенного в первой четверти.

При расчётах варьировался параметр $\gamma = a/r_0$ – отношение длин включений к большой оси эллипса. Для данного эллипса при угле $\alpha = 30^\circ$ и $\gamma \approx 0,57$ имеет место выход включения на поверхность цилиндра.

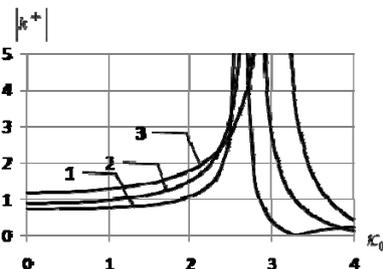
Результаты расчётов приведены в виде графиков зависимости безразмерных КИН от безразмерной частоты $\kappa_0 = \kappa_2 r_0$.



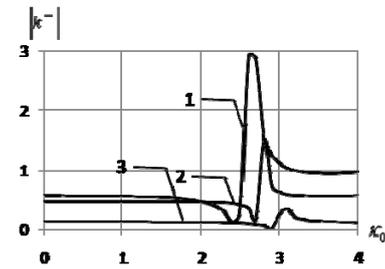
Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5



Фиг. 6

Графики на фиг. 3-4 соответствуют случаю, когда к боковой поверхности цилиндра приложена самоуравновешивающаяся сила $P(\varphi) = \cos \varphi$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям $\gamma = 0,2; 0,4; 0,55$. Видно, что значение этого параметра оказывает влияние на частоту достижения первого резонанса. На фиг.3

показаны значения КИН $|k^+|$ для конца включения, который при увеличении γ приближается к границе. В дорезонансной зоне при приближении к границе значения КИН убывают. Для КИН возле противоположного конца включения при частоте $\kappa_0 \leq 1$ имеет место более сложная зависимость и при приближении к границе значение КИН наибольшее.

Фиг. 5-6 соответствуют случаю, когда граница цилиндра неподвижна, а ко всем включениям приложены силы одинаковой величины F . Следует отметить, что в этом случае изменяется частота, в которой достигается резонанс. Параметр γ также влияет на значение частоты резонанса. Для конца включения, приближающегося к границе (фиг.5), имеет место возрастание КИН. Возле конца, находящегося внутри цилиндра, наблюдается противоположное поведение КИН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jain D.L. Kanval R.P. Diffraction of elastic waves by two complanar parallel rigid strips//Int. J. Solids and Struct. 1972. V.10. № 11. P.925-937.
2. Jun Jei, Qingheny Yung, Yue- Sheng Wang and Chuangzeng Thung. An investigation of dynamic interaction between multiple cracks and inclusions by TDBEM //Composites Science and Technology, June 2009. –Vol.69. Issues 7-8. P.1275-1285.
3. V.G. Popov. Diffraction of elastic shear waves on radially distributed rigid inclusions//International applied Mechanics. 1996. V.32. № 8. P.624-630.
4. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. М.: Наука, 1970. 379 с.
5. Назарчук З.Т. Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. Киев: Наукова думка, 1989. 256 с.
6. Попов В.Г. Сравнение полей перемещений и напряжений при дифракции упругих волн сдвига на различных дефектах: трещина и тонкое жёсткое включение //Динамические системы. 1993. Вып.12. С.14-23.
7. Поручиков В.Б. Методы динамической теории упругости. М.: Наука, 1986. 328с.
8. Сулим Г.Т. Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Львів: 2007. 716 с.

Сведения об авторе:

Кириллова Ольга Ивановна – ассистент кафедры высшей математики Одесской национальной морской академии.

Адрес: Украина, 65028, г. Одесса, ул. Дидрихсона, дом 8.

E-mail: ol007ga@yandex.ru. **Тел.:** (38048)733-23-12

Поступила в редакцию 12.10.2012