

**МЕЖФАЗНАЯ ТРЕЩИНА, ЧАСТИЧНО ПОДКРЕПЛЁННАЯ ЖЁСТКОЙ
НАКЛАДКОЙ, В ПОЛЕ ДЕЙСТВИЯ СОСРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ***

ВАСИЛЬЕВА Ю.О.

Ключевые слова: трещина, жёсткая накладка, гипергеометрическая функция, сосредоточенная сила, кусочно-однородная упругая плоскость.

Key words: crack, rigid overlay, hypergeometric function, concentrated force, piecewise-homogeneous elastic plane

Վասիլևա Եւ. Օ.

Կոշտ վերադիրով ամրացված միջֆազային ճեղքը կենտրոնացված ուժերի ազդեցության դաշտում

Ուսումնասիրվում է միջֆազային ճեղքի շրջակայքում տրված ուժերից առաջացած հարթ լարվածային վիճակը: Ճեղքի ափերից մեկը մասնակիորեն ուժեղացված է ուղղաձիծ վերադիրով: Գտնված են կոմպլեքս պոտենցիալները, լարումների կոնցենտրացիայի գործակիցները ճեղքի զազաթում, բերված են նրանց գրաֆիկները:

Vasilyeva Yu.O.

An interface crack partially reinforced by a rigid overlay in the concentrated forces' action field

Plane stress state near the tip of an interface crack induced by specified concentrated forces is considered. One of the crack faces is partially reinforced by a rigid straight line overlay. The complex potentials, the stress intensity factors at the crack-tip are found, corresponding plots are presented.

Изучается плоское напряжённое состояние вблизи вершины межфазной трещины, порождённое заданными сосредоточенными силами. Один из берегов трещины частично подкреплён жёсткой прямолинейной накладкой. Находятся комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины, приводятся их графики.

Пусть в кусочно-однородном упругом изотропном теле, составленном из разных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред $y = 0$ расположена полубесконечная открытая трещина $[0, +\infty)$, верхний берег которой на участке $[0, l]$ подкреплён абсолютно жёсткой прямолинейной накладкой, присоединённой к телу без натяга, а остальная часть этого берега и весь нижний берег трещины свободны от напряжений:

$$u^+(x) + i\nu^+(x) = i\varepsilon x, \quad x \in (0, l);$$

$$\tau_{xy}^+(x) + i\sigma_y^+(x) = 0, \quad x \in (l, +\infty);$$

$$\tau_{xy}^-(x) + i\sigma_y^-(x) = 0, \quad x \in (0, +\infty),$$

где $u + i\nu$ – вектор смещений, $\tau_{xy} + i\sigma_y$ – вектор напряжений, ε – неизвестный угол поворота накладки, а верхними индексами плюс и минус помечены значения функций на верхнем и нижнем берегах трещины. Вдоль луча $(-\infty, 0]$ полуплоскости жестко соединены друг с другом, а к точкам $z_1 = id$ и $z_2 = -id$ ($d > 0$) составной

* Статья доложена на Международной конференции научных трудов, посвящённой 100-летию академика Нагуша Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

плоскости приложены сосредоточенные силы F_c и $-F_c$ соответственно, где $F_c = X_c + iY_c$, и пары с моментами M_c . На бесконечности напряжения и вращение исчезают. На накладку никакие внешние силы не действуют.

Требуется найти комплексные потенциалы, описывающие плоское напряжённое состояние тела, и исследовать поведение напряжений вблизи вершины трещины.

Воспользуемся формулами Колосова – Мусхелишвили для кусочно-однородной плоскости [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi_*(z), \quad z = x + iy, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_*(z) + \Omega_*(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)},\end{aligned}\quad (1)$$

$$2\mu_j(u + iv)'_x = \kappa_j \Phi_*(z) - \Omega_*(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)},$$

$$\kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j), \quad j = 1, 2,$$

$$\Phi_*(z) = \begin{cases} \Phi(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \alpha_1 \Phi(z) + \alpha_2 \Omega(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad \Omega_*(z) = \begin{cases} \Omega(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \alpha_3 \Omega(z) + \alpha_4 \Phi(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$$

$$\alpha_1 = (1 + \mu_* \kappa_1)/(1 + \kappa_2), \quad \alpha_2 = (1 - \mu_*)/(1 + \kappa_2),$$

$$\alpha_3 = 1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 1 - \alpha_1, \quad \mu_* = \mu_2 / \mu_1,$$

где $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ – кусочно-голоморфные функции (комплексные потенциалы) с линией разрыва $[0, +\infty)$, а μ_1 , ν_1 и μ_2 , ν_2 – модуль сдвига и коэффициент Пуассона верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) полуплоскостей соответственно. В точках $z = 0$ и $z = l \pm i0$ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ могут иметь интегрируемые особенности, на ∞ они исчезают, а в точках $z_1 = id$, $z_2 = -id$ имеют полюсы порядка не выше второго [2]:

$$\Phi(z) = -\frac{F_c}{2\pi(1 + \kappa_1)(z - id)} + O(1),$$

$$\Omega(z) = \frac{\alpha' F_c}{2\pi\alpha_3(z - id)} + \frac{i(2d\bar{F}_c + (1 + \kappa_2)M_c)}{2\pi\alpha_3(1 + \kappa_2)(z - id)^2} + O(1), \quad z \rightarrow id$$

$$\Phi(z) = -\frac{\alpha'' F_c}{2\pi\alpha_1(z + id)} + \frac{i\alpha_2(2d\bar{F}_c - (1 + \kappa_1)M_c)}{2\pi\alpha_1(1 + \kappa_1)(z + id)^2} + O(1),$$

$$\Omega(z) = \frac{\kappa_1 F_c}{2\pi(1 + \kappa_1)(z + id)} - \frac{i(2d\bar{F}_c - (1 + \kappa_1)M_c)}{2\pi(1 + \kappa_1)(z + id)^2} + O(1), \quad z \rightarrow -id$$

$$\alpha' = \frac{\alpha_4}{1 + \kappa_1} + \frac{\kappa_2}{1 + \kappa_2}, \quad \alpha'' = \frac{\alpha_2 \kappa_1}{1 + \kappa_1} + \frac{1}{1 + \kappa_2}$$

На луче $(0, +\infty)$ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ удовлетворяют краевым условиям

$$\kappa_1 \Phi^+(x) - \Omega^-(x) = 2i\mu_1 \varepsilon, \quad x \in (0, l);$$

$$\Phi^+(x) + \Omega^-(x) = 0, \quad x \in (l, +\infty); \quad (2)$$

$$\alpha_1 \Phi^-(x) + \alpha_2 \Omega^-(x) + \alpha_3 \Omega^+(x) + \alpha_4 \Phi^+(x) = 0, \quad x \in (0, +\infty),$$

откуда находим [3]:

$$\begin{aligned}
\Phi(z) &= H_1(z/l), \quad \Omega(z) = H_2(z/l), \\
H_j(\zeta) &= \left[\frac{C_{22}}{\zeta - id_0} + \frac{C_{12}}{(\zeta - id_0)^2} + \frac{E_{22}}{\zeta + id_0} + \frac{E_{12}}{(\zeta + id_0)^2} + \varepsilon\mu_1 J_2(\zeta) \right] \chi_{j1}(\zeta) + \\
&+ \left[\frac{C_{21}}{\zeta - id_0} + \frac{C_{11}}{(\zeta - id_0)^2} + \frac{E_{21}}{\zeta + id_0} + \frac{E_{11}}{(\zeta + id_0)^2} + \varepsilon\mu_1 J_1(\zeta) \right] \chi_{j2}(\zeta), \quad d_0 = d/l, \\
C_{1j} &= (-1)^{j+1} \frac{i\chi_{1j}(2d\bar{F}_c + (1 + \kappa_2)M_c)}{2\pi l^2 \alpha_3 (1 + \kappa_2) \det \mathbf{X}^+(id_0)}, \\
C_{2j} &= (-1)^{j+1} \frac{F_c}{2\pi l \cdot \det \mathbf{X}^+(id_0)} \left(\frac{\alpha' \chi_{1j}(id_0)}{\alpha_3} - \frac{\chi_{2j}(id_0)}{1 + \kappa_1} \right), \\
E_{1j} &= (-1)^j \frac{i(2d\bar{F}_c (\alpha_1 \chi_{1j}(-id_0) + \alpha_2 \chi_{2j}(-id_0)) - \alpha_2 (1 + \kappa_1) \chi_{2j}(-id_0) M_c)}{2\pi l^2 \alpha_1 (1 + \kappa_1) \cdot \det \mathbf{X}^+(-id_0)}, \\
E_{2j} &= (-1)^{j+1} \frac{F_c}{2\pi l \cdot \det \mathbf{X}^+(-id_0)} \left(\frac{\kappa_1 \chi_{1j}(-id_0)}{1 + \kappa_1} + \frac{\alpha'' \chi_{2j}(-id_0)}{\alpha_1} \right), \\
J_j(\zeta) &= \frac{(-1)^j}{\kappa_1 \pi} \int_0^1 \frac{\chi_{2j}^+(t) + \alpha_4 \alpha_3^{-1} \chi_{1j}^+(t)}{(t - \zeta) \det \mathbf{X}^+(t)} dt, \quad j = 1, 2, \\
\varepsilon\mu_1 &= - \left(\int_0^1 t \operatorname{Re} \left[\left(\frac{C_{22}}{t - id_0} + \frac{C_{12}}{(t - id_0)^2} + \frac{E_{22}}{t + id_0} + \frac{E_{12}}{(t + id_0)^2} \right) \chi_{11}^+(t) + \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(\frac{C_{21}}{t - id_0} + \frac{C_{11}}{(t - id_0)^2} + \frac{E_{21}}{t + id_0} + \frac{E_{11}}{(t + id_0)^2} \right) \chi_{12}^+(t) \right] dt \right) \times \\
&\times \left(\int_0^1 t \operatorname{Re} [\chi_{11}^+(t) J_2(t) + \chi_{12}^+(t) J_1(t)] dt \right)^{-1},
\end{aligned}$$

где $\chi_{kj}(\zeta)$ – элементы канонической матрицы $\mathbf{X}(\zeta)$ однородной векторной краевой задачи Римана (2) при $l = 1$. Каноническая матрица задачи, т.е. матрица, столбцы которой представляют собой линейно независимые решения соответствующей однородной задачи, строится явно с помощью гипергеометрической функции Гаусса $F(a, b; c; \zeta)$. Параметры гипергеометрической функции подбираются так, чтобы решение находилось в классе требуемых функций [3].

Асимптотика напряжений вблизи левого конца накладки, являющегося одновременно вершиной трещины, характеризуется двумя степенными функциями $z^{-\gamma_0 + i\delta_2}$, $z^{\gamma_0 - 1 + i\delta_1}$, где $1/2 \leq \gamma_0 < 1$. Исследования показали, что при $\mu_* > 0.124$ показатель $\gamma_0 > 1/2$ для любых параметров κ_1, κ_2 , причём в этом случае $\delta_1 = \delta_2$. Интенсивность напряжений в вершине трещины определяется четырьмя действительными параметрами – коэффициентами интенсивности напряжений (КИН):

$$\begin{aligned}
K_I - iK_{II} &= \sqrt{2\pi}(\xi_1 + m)e^{-i\pi(\gamma_0 - i\delta_2)} \cdot D_2, \\
K_{III} - iK_{IV} &= \sqrt{2\pi}(\xi_2 + m)e^{-i\pi(1 - \gamma_0 - i\delta_1)} \cdot D_1, \\
D_j &= c_j [C_{22}id_0^{-1} - C_{12}d_0^{-2} - E_{22}id_0^{-1} - E_{12}d_0^{-2} + \varepsilon\mu_1 J_2(0) + \\
&+ (1 - \gamma_j + i\delta_j)(C_{21}id_0^{-1} - C_{11}d_0^{-2} - E_{21}id_0^{-1} - E_{11}d_0^{-2} + \varepsilon\mu_1 J_1(0))] \cdot l^{\gamma_j - i\delta_j}, \quad j = 1, 2 \\
\gamma_0 &= \gamma_2, \quad \gamma_j = (2\pi)^{-1} \arg \xi_j, \quad \delta_j = (2\pi)^{-1} \ln |\xi_j| \\
\xi_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m\kappa_1^{-1}} \right), \quad \alpha = \frac{\alpha_2\kappa_1 + \alpha_4}{\alpha_3\kappa_1}, \quad m = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \\
(0 < \arg \xi_1 \leq \pi, \quad \pi \leq \arg \xi_2 < 2\pi)
\end{aligned}$$

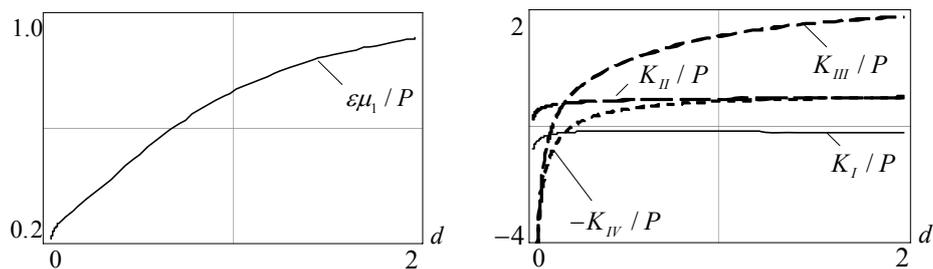
где несобственные интегралы $J_1(0), J_2(0)$ сходятся.

Решение задачи (2) и асимптотика напряжений вблизи вершины трещины построены в предположении, что параметры ξ_1, ξ_2 – различные, комплексно-сопряжённые числа. В случае, когда $\xi_1 = \xi_2$, встречающемся крайне редко при физически приемлемых сочетаниях упругих параметров, у напряжений вблизи точки $z = 0$ имеют место особенности, определяемые функциями видов $z^{-\frac{1}{2} + i\delta_1}$ и $z^{-\frac{1}{2} + i\delta_1} \ln z$. При этом интенсивность напряжений в вершине трещины снова характеризуется четырьмя КИН.

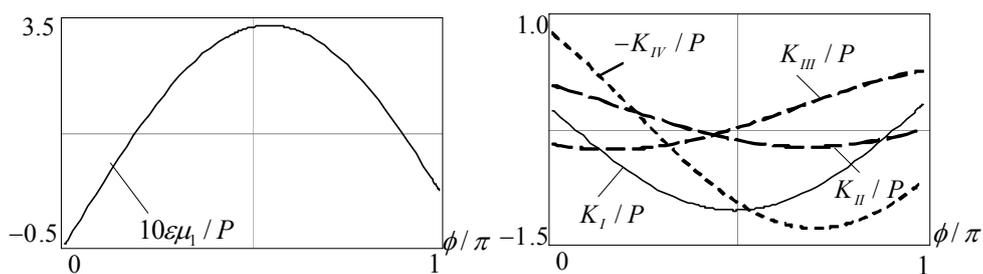
Описанная асимптотика напряжений в окрестности вершины трещины, когда в зависимости от упругих параметров полуплоскостей напряжения могут иметь там как степенно-осциллирующую особенность $z^{-\gamma + i\delta}$ ($\frac{1}{2} \leq \gamma < 1$), так и особенность типа $z^{-\frac{1}{2} + i\delta} \ln z$, была получена ранее в работе [4], в которой решена задача о напряжённом состоянии составной упругой плоскости, ослабленной трещиной, на одном берегу которой заданы компоненты напряжения, а на другом – компоненты перемещения.

В полуокрестности точки $z = l - i0$ напряжения ограничены. Вблизи точки $z = l + i0$ напряжения ведут себя так же, как вблизи вершины штампа, сцеплённого жёстко со средой, т.е. имеют особенность порядка $-\frac{1}{2} + i\beta_1$, $\beta_1 = (2\pi)^{-1} \ln \kappa_1$. При этом интенсивность напряжений вблизи правого конца накладки определяется двумя действительными КИН.

Для значений упругих параметров $\kappa_1 = 1.8$, $\kappa_2 = 2.2$, $\mu_* = 2$, когда показатель степени $\gamma_0 = 0.79373$, графики зависимости угла поворота накладки ε и коэффициентов $K_I, K_{II}, K_{III}, K_{IV}$ от расстояния d между точками приложения сосредоточенных сил и вершиной трещины и от направления ϕ сил представлены на фиг. 1-2. В первом случае силы $F_c = iP$ и $-F_c = -iP$ ($P > 0$) постоянны и направлены вдоль мнимой оси, а во втором случае $\pm F_c = \pm P(\cos \phi + i \sin \phi)$ составляют угол ϕ с действительной осью, $d = 0.2l$. В обоих случаях принято $l = 1$.



Фиг.1



Фиг.2

Зависимость напряжённого состояния вблизи вершины трещины, порождённого одной сосредоточенной силой, расположенной на линии раздела сред на продолжении трещины, изучена в работе [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 10-01-00103, 12-01-31387.

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296с.
2. Сильвестров В.В. Метод римановых поверхностей в задаче о межфазных трещинах и включениях при наличии сосредоточенных сил. // Изв. ВУЗов. Математика. 2004. № 7. С.78-91.
3. Васильева Ю.О., Сильвестров В.В. Задача о межфазной трещине с жёсткой накладкой на части её берега. // Прикладная математика и механика. 2011. Т.75. Вып.6. С.1017-1037.
4. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. // Изв. НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. № 4. С.57-65.
5. Васильева Ю.О., Сильвестров В.В. Сосредоточенная сила вблизи вершины межфазной трещины с жёсткой накладкой на её берегу. // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2011. Вып.1. С.191-195.

Сведения об авторах:

Васильева Юлия Олеговна – старший преподаватель Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Чувашский государственный университет имени И.Н. Ульянова» Тел.: +7 903 346 41 82

E-mail: vasilyeva.yu@gmail.com

Почтовый адрес: 429400, Россия, Чувашия, Урмарский район, пос. Урмары, пер. Сеселя, д.2

Поступила в редакцию 12.10.2012