

**К ВОПРОСУ ПЕРЕДАЧИ НАГРУЗОК ОТ ДЕФОРМИРУЕМЫХ
ВКЛЮЧЕНИЙ К БЕСКОНЕЧНОЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ ПЛАСТИНЕ
С РАЗРЕЗАМИ***

Акопян В.Н., Амирджанян А.А.

Ключевые слова: ползучесть, разрез, трещина, включение, смешанная задача, коэффициент интенсивности.

Key words: creep, slit, crack, inclusion, mixed boundary value problem, intensity coefficient.

Վ.Ն.Հակոբյան, Հ.Ա.Ամիրջանյան

**Ճաբերով առաձգամածուցիկ անվերջ սալին դեֆորմացվող ներդրակներից բեռների
փոխանցման մասին**

Դիտարկված է բեռների փոխանցման խնդիրը դեֆորմացվող բարակ ներդրակներից ճաբեր պարունակող ժառանգականորեն ծերացող նյութից պատրաստված առաձգամածուցիկ անվերջ սալին: Համարելով, որ ներդրակները գտնվում են միառանցք լարվածային վիճակում, ստացված են խնդրի որոշիչ հավասարումները ներդրակների սակ գործող շոշափող լարումների թռիչքների և ճաբերի բացվածքների ֆունկցիաների ածանցյալների նկատմամբ, երկչափ սինգուլյար ինտեգրողիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի տեսքով: Օգտագործելով սեղանների բանաձևը ըստ ժամանակի ինտեգրալների հաշվման համար և համակարգի լուծումների վարքը ներդրակների ու ճաբերի ծայրակետերում, կառուցված է որոշիչ համակարգի լուծումը դիսկրետ եզակիությունների թվային վերլուծական եղանակով: Մի մասնավոր դեպքում կատարվել է խնդրի թվային վերլուծությունը և բացահայտվել են կոնտակտային լարումների, ճաբի բացվածքի և քայքայող լարումների ինտենսիվության գործակցի փոփոխման օրինաչափությունները՝ կախված ժամանակից:

Hakobyan V.N., Amirjanyan H.A.

Load-Transfer from Deformable Inclusions to Infinite Visco-Elastic Plate with Slits

Many papers [1–5] are devoted to problems of load-transfer from deformed thin-walled elements to massive bodies. There are also the papers on studying the interaction of thin-walled elements and cracks, which are located in massive bodies [6–8].

The problem of load-transfer from deformed thin inclusions to infinite visco-elastic plate with slits, which are made of ageing materials, is considered. Taking into account that the inclusions are in uniaxial stress state, the governing system of equations for stated problem as a system of two-dimensional singular integral-differential equations with respect to jump-function of shear stresses, acting on edges of inclusions, and derivative of function for opening of slit.

Using trapezium method for calculation of time integrals and taking into account the behavior at end-points of inclusions and slits, the solution of governing system is built by the numerical-analytical method of discrete singularities. In special case the numerical analysis of stated problem is fulfilled and the behavior of contact stresses, cracks' openings and intensity coefficients of destructive stresses depending on time characteristics are revealed.

Передаче нагрузок от деформируемых тонкостенных элементов к массивным телам посвящено огромное количество работ [1–5]. Немало также работ, изучающих взаимодействие тонкостенных элементов и трещин, одновременно находящихся в массивных телах [6–8].

Рассмотрена задача передачи нагрузки от деформируемых тонких включений к бесконечной вязкоупругой пластине с разрезами, изготовленной из наследственно-стареющего материала. Считая, что включения находятся в одноосном напряжённом состоянии, выведена определяющая система уравнений поставленной задачи в виде системы двумерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений

*Статья доложена на Международной конференции научных трудов, посвящённой 100-летию академика Нагуша Арутюняна. 08–12 октября 2012, Цахкадзор, Армения

относительно скачков тангенциальных напряжений, действующих на берегах включений и производной от функции раскрытия разрезом. Используя метод трапеций для вычисления временных интегралов и учитывая поведение решений системы определяющих уравнений в концевых точках включений и разрезов, построено решение определяющей системы уравнений численно-аналитическим методом дискретных особенностей. В одном частном случае проведён численный анализ поставленной задачи и выявлены закономерности изменения контактных напряжений, раскрытия трещин и коэффициентов разрушающих напряжений в зависимости от временных характеристик.

1. Постановка задач и вывод определяющих уравнений

Пусть бесконечная вязкоупругая пластина, отнесённая к декартовой системе координат Oxy , на оси абсцисс $y = 0$ по линии L , состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов конечной длины $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, N$), усилена конечными тонкими деформируемыми включениями, а по линии \bar{L} , также состоящей из конечного числа непересекающихся интервалов конечной длины $[c_k, d_k]$ ($k = 1, 2, \dots, M$), ослаблена разрезами и деформируется под воздействием осевых сосредоточенных нагрузок P_{a_k} и P_{b_k} , приложенных к концевым точкам включений в момент времени τ_0 .

Будем считать, что материалы включений и бесконечной пластины обладают свойством ползучести, которое характеризуется неоднородностью старения [1]. При этом меру ползучести включения обозначим через $C_k(t, \tau)$ ($k = 1, 2, \dots, N$), постоянный по длине возраст $-\tau_k$, модуль упруго-мгновенной деформации $E_k = \text{const}$. Соответствующие характеристики для бесконечной пластины обозначим через $C_0(t, \tau)$, τ_0 и $E_0(t) = E_0 = \text{const}$ соответственно. Будем считать также, что для материала пластины коэффициенты поперечного сжатия для упруго-мгновенной деформации $v_1(t)$ и деформации ползучести $v_2(t, \tau)$ одинаковы и постоянны, т.е. $v_2(t, \tau) = v_1(t) = v = \text{const}$. Кроме того, накладки, как обычно, будем трактовать как одномерные континуумы, которые под воздействием приложенных к ним сосредоточенных нагрузок и тангенциальных контактных напряжений находятся в одноосном напряжённом состоянии. Однако, как и в [3], изгибным эффектом накладок здесь не будем пренебрегать и будем считать, что вследствие малости толщины накладок их изменение по направлению оси абсцисс незначительно и ими можно пренебречь.

Ставится задача: определить тангенциальные и нормальные контактные напряжения, действующие на берегах включений, раскрытия разрезов и коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разрезов.

Вследствие сделанных предположений в зонах контакта включений с бесконечной пластиной и на берегах разрезов выполняются следующие условия:

$$\frac{dv(x, \pm 0, t)}{dx} = 0, \quad \frac{du(x, \pm 0, t)}{dx} = \varepsilon_k(x, t) \quad (1.1)$$

$$(a_k < x < b_k, \quad k = 1, 2, \dots, N)$$

$$\sigma_y(x, \pm 0, t) = 0, \quad \tau_{xy}(x, \pm 0, t) = 0 \quad (1.2)$$

$$(c_k < x < d_k, \quad k = 1, 2, \dots, M)$$

где $v(x, y, t)$ и $u(x, y, t)$ – соответственно вертикальные и горизонтальные смещения точек бесконечной пластины, $\sigma_y(x, y, t)$ и $\tau_{xy}(x, y, t)$ – соответственно нормальные и касательные напряжения, действующие в пластине, а $\varepsilon_k(x, t)$ ($k = 1, 2, \dots, N$) – осевые деформации включений.

Для решения поставленной задачи, мысленно разделим бесконечную пластину на верхнюю и нижнюю полубесконечные пластины, снабдив индексами "+" и "-" компоненты тензора напряжений и смещений соответствующих полубесконечных пластин и определим нормальные и горизонтальные компоненты смещений точек этих пластин $v^\pm(x, y, t)$ и $u^\pm(x, y, t)$ через нормальные и касательные компоненты напряжений $\sigma_y^{(\pm)}(x, \pm 0, t)$ и $\tau_y^{(\pm)}(x, \pm 0, t)$. Для этого, при помощи преобразования Фурье, сначала определим компоненты смещений соответствующих упруго-мгновенных задач, а затем, используя принцип Вольтерра [9], запишем компоненты смещений точек полубесконечных пластин с учётом ползучести

$$\frac{dv^{(\pm)}(x, y, t)}{dx} = (1 - L_0) \left\{ \mp \frac{1}{\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma_y^{(\pm)}(s, y, t)}{s - x} ds - \frac{(1 - \nu)}{E_0} \tau_{xy}^{(\pm)}(x, y, t) \right\} \quad (1.3)$$

$$\frac{du^{(\pm)}(x, y, t)}{dx} = (1 - L_0) \left\{ \mp \frac{1}{\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_{xy}^{(\pm)}(s, y, t)}{s - x} ds + \frac{(1 - \nu)}{E_0} \sigma_y^{(\pm)}(x, y, t) \right\} \quad (1.4)$$

Запишем также осевые деформации точек включений, обладающих свойством ползучести [9]

$$\varepsilon_k(x, t) = \frac{1}{E_k A_k} (1 - L_k) \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t) ds \right] \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.5)$$

Здесь E_k и A_k – соответственно модуль упругости и площадь поперечного сечения включения, находящегося на интервале $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, N$), h_k – эффективная ширина включений, $\tau(x, t)$ – скачок тангенциальных напряжений, действующих на берегах включений, а L_k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) – временные операторы, которые действуют на произвольную функцию $\varphi(t)$ следующим образом [9]:

$$(1 - L_k)\varphi(t) = \varphi(t) - \int_{\tau_0}^t K_k(t + \rho_k, \tau + \rho_k) \varphi(\tau) d\tau; \quad (\rho_k = \tau_k - \tau_0; k = 1 - N);$$

$$K_k(t, \tau) = E_k \frac{\partial C_k(t, \tau)}{\partial \tau}; \quad C_k(t, \tau) = \varphi_k(\tau) [1 - \exp(-\gamma(t - \tau))].$$

Теперь, используя соотношения (1.3) и (1.4), определим производные от смещений граничных точек полубесконечных пластин и напряжения, действующие в этих точках через разность производных от смещений граничных точек полубесконечных пластин и скачки напряжений, действующих в этих точках

$$\begin{aligned}
\sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) &= \frac{E_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V'_*(s, t)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} \sigma(x, t), \\
\tau_y^{(\pm)}(x, 0, t) &= \frac{E_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U'_*(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} \tau(x, t), \\
\frac{du_*^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} &= \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V'_*(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} U'_*(x, t), \\
\frac{dv_*^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} &= -\frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U'_*(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} V'_*(x, t),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}
\sigma(x, t) &= \sigma_y^{(+)}(x, +0, t) - \sigma_y^{(-)}(x, -0, t), \quad \tau(x, t) = \tau_{xy}^{(+)}(x, +0, t) - \tau_{xy}^{(-)}(x, -0, t), \\
U(x, t) &= u^+(x, +0, t) - u^-(x, -0, t), \quad V(x, t) = v^+(x, +0, t) - v^-(x, -0, t), \\
\{U_*; V_*; u_*^{(\pm)}; v_*^{(\pm)}\} &= \{U; V; u^{(\pm)}; v^{(\pm)}\} + \int_{\tau_0}^t R_0(t, \tau) \{U; V; u^{(\pm)}; v^{(\pm)}\} d\tau
\end{aligned}$$

$\mathfrak{G}_1 = 1 - \nu$; $\mathfrak{G}_2 = (1 + \nu)(3 - \nu)$, а $R_0(t, \tau)$ – резольвента ядра $K_0(t, \tau)$.

Применяя к первым двум уравнениям (1.6) оператор $(1 - L_0)$ для производных истинных смещений верхнего и нижнего берегов разреза вязкоупругой пластины, окончательно получим выражения:

$$\begin{aligned}
\frac{du^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} &= \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{V'(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} (1 - L_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} U'(x, t), \\
\frac{dv^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} &= -\frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U'(s, t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} (1 - L_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sigma(s, t)}{s-x} ds \pm \frac{1}{2} V'(x, t)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

С другой стороны, так как рассматриваемая задача симметрична относительно оси Ox , то $\sigma(x, t) = U(x, t) \equiv 0$ ($-\infty < x < \infty$). Следовательно, последнее соотношение (1.6) и второе соотношение (1.7) принимают следующие простые виды:

$$\frac{dv^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2} V'(x, t), \quad \tau_{xy}^{(\pm)}(x, 0, t) = \pm \frac{1}{2} \tau(x, t) \tag{1.8}$$

Далее, используя соотношения (1.5) – (1.8) и учитывая, что

$$u^{(\pm)}(x, 0, t) = u(x, \pm 0, t), \quad \sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) = \sigma_y(x, \pm 0, t),$$

удовлетворим условиям (1.1) и (1.2). В итоге, применяя к первому условию (1.2) оператор $(1 - L_0)$, придём к следующей системе определяющих уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{D}_1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s,t)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{D}_2}{4\pi E_0} (1-L_0) \int_L \frac{\tau(s,t)}{s-x} ds = \frac{(1-L_k)}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s,t) ds \right] \\ \quad (a_k < x < b_k, k=1,2,\dots,N) \\ \frac{E_0}{4\pi} \int_L \frac{V'(s,t)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{D}_1}{4\pi} (1-L_0) \int_L \frac{\tau(s,t)}{s-x} ds = 0 \\ \quad (c_k < x < d_k, k=1,2,\dots,M) \end{array} \right. \quad (1.9)$$

При этом

$$\begin{aligned} V'(x,t) &= 0, & (a_k < x < b_k, k=1,2,\dots,N) \\ \tau(x,t) &= 0, & (c_k < x < d_k, k=1,2,\dots,M) \end{aligned}$$

Систему (1.9) нужно рассматривать при условиях равновесия включений и непрерывности смещений в конечных точках разрезов:

$$h_k \int_{a_k}^{b_k} \tau(s,t) ds = P_{a_k} + P_{b_k} = P_k; \quad (k=1,2,\dots,N) \quad (1.10)$$

$$\int_{c_k}^{d_k} V'(s,t) ds = 0; \quad (k=1,2,\dots,M) \quad (1.11)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы двумерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений (1.9) при условиях (1.10) и (1.11).

Отметим, что в случае, когда разрезы отсутствуют, из (1.9) получаем определяющее уравнение задачи для бесконечной вязкоупругой пластины, усиленной конечным числом различных вязкоупругих включений, находящихся на одной прямой

$$\begin{aligned} (1-L_0) \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tau(s,t)}{s-x} ds = -\lambda_0^{(k)} (1-L_k) \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s,t) ds \right] \\ \left(\lambda_0^{(k)} = \frac{4E_0}{A_k E_k (1+\nu)(3-\nu)} \right), \end{aligned} \quad (1.12)$$

которое нужно рассматривать совместно с условием равновесия включений (1.10).

В некоторых случаях удобнее получить систему определяющих уравнений рассматриваемой задачи относительно нормальных и касательных контактных напряжений, действующих под включениями. Рассмотрим один из таких случаев.

Пусть бесконечная вязкоупругая пластина на оси абсцисс $y=0$ на интервале $(0, \infty)$ содержит полубесконечный разрез, берега которого по линии L , состоящей из совокупности конечного числа непересекающихся интервалов $[a_k, b_k]$ ($k=1,2,\dots,N$), спаяны конечными тонкими включениями. Будем считать, что пластина деформируется под воздействием осевых сосредоточенных нагрузок P_{a_k} и P_{b_k} , приложенных к конечным точкам включений в момент времени τ_0 .

Из первого и третьего уравнений (1.6), обозначив $\sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) = -q(x, t)$ ($x \in L$), находим

$$\frac{du_*^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} = -\frac{\mathfrak{G}_1}{E_0} q(x, t) - \frac{1}{\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \quad (x \in L) \quad (1.13)$$

Теперь выразим производные от вертикальных смещений через контактные напряжения, действующие на берегах включений. Для этого третье уравнение из (1.6) на интервале $(0, \infty)$ запишем в следующей форме:

$$\frac{E_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{V'_*(s, t)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds = \begin{cases} -q(x, t) & (x \in L) \\ 0 & (x \in \bar{L}) \end{cases}$$

Отсюда

$$\frac{dv_*^{(\pm)}(x, 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2} \left\{ -\frac{\mathfrak{G}_1}{E_0} \tau(x, t) + \frac{4}{\pi E_0 \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s-x} ds \right\} \quad (x \in L) \quad (1.14)$$

Следовательно, применяя к (1.13) и (1.14) оператор $(1-L_0)$, для смещений точек берегов полубесконечного разреза бесконечной пластины, обладающей свойством ползучести, можем записать:

$$\frac{dv(x, \pm 0, t)}{dx} = \pm \frac{1}{2E_0} (1-L_0) \left\{ \frac{4}{\pi \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s-x} ds - \mathfrak{G}_1 \tau(x, t) \right\} \quad (1.15)$$

$$\frac{du(x, \pm 0, t)}{dx} = -\frac{1}{E_0} (1-L_0) \left\{ \mathfrak{G}_1 q(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \right\} \quad (x \in L) \quad (1.16)$$

Далее, используя формулы (1.15) и (1.16), удовлетворим условиям контакта включений с бесконечной пластиной (1.1). В итоге придём к следующей ключевой системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{(1-L_0)}{E_0} \left\{ \mathfrak{G}_1 q(x, t) + \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \right\} = \frac{1}{E_k A_k} (1-L_k) \left[h \int_{a_k}^x \tau(s, t) ds - P_{a_k} \right] \\ \frac{(1-L_0)}{E_0} \left\{ \frac{4}{\pi \sqrt{x}} \int_L \frac{\sqrt{s} q(s, t)}{s-x} ds - \mathfrak{G}_1 \tau(x, t) \right\} = 0 \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N) \end{cases} \quad (1.17)$$

Полученную систему нужно рассматривать при условиях (1.10) и (1.11). Из условий (1.11), учитывая, что на \bar{L} касательные напряжения отсутствуют, при помощи (1.14) найдём

$$\int_L L_n \left| \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{s})(\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{s})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{s})(\sqrt{b_{k-1}} - \sqrt{s})} \right| q(s, t) ds = 0 \quad (b_0 = 0; k = 1, 2, \dots, N) \quad (1.18)$$

Таким образом, решение поставленной задачи свелось к решению системы ключевых уравнений (1.17) относительно нормальных и касательных контактных напряжений, действующих под включениями при условиях (1.9) и (1.18).

После решения определяющих систем интегро-дифференциальных уравнений поставленных задач, несложно найти нормальные контактные напряжения и коэффициент интенсивности разрушающих напряжений в концевых точках разрезов.

2. Решение определяющей системы уравнений

Сначала рассмотрим общий случай поставленной задачи, решение которой свелось к решению систем определяющих уравнений (1.9) при условиях (1.10) и (1.11). Для этого заметим, что изменение напряжённо-деформированного состояния бесконечной вязкоупругой пластины в течение времени является плавным и монотонным процессом. Это обстоятельство позволяет для каждого фиксированного момента времени использовать для вычисления временного оператора формулу трапеций и свести решение системы определяющих уравнений к итерационному процессу решения аналогичных одномерных систем интегро-дифференциальных уравнений, где время будет фигурировать как параметр. Действительно, при $t = \tau_0$ из (1.9) получаем определяющие уравнения упруго-мгновенной задачи, где временной оператор просто отсутствует.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s, \tau_0)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, \tau_0)}{s-x} ds = \frac{1}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, \tau_0) ds \right] \\ \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N) \\ \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s, \tau_0)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, \tau_0)}{s-x} ds = 0 \\ \quad (c_k < x < d_k, k = 1, 2, \dots, M) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Далее, пусть время t возрастает с шагом h , т.е. $t_n = \tau_0 + nh$, ($n = 1, 2, \dots$).

Тогда, вычисляя временные интегралы, входящие в (1.9) по формулам трапеций, для определения искомых функций в любой момент времени t_n получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s, t_n)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t_n)}{s-x} ds = \\ = \frac{K_k^*(t_n, t_n)}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t_n) ds \right] - G_1(x, t_n) \\ \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N; n = 1, 2, \dots) \\ \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{V'(s, t_n)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{G}_1 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t_n)}{s-x} ds = G_2(x, t_n) \\ \quad (c_k < x < d_k, k = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Здесь

$$G_1(x, t_n) = \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ \frac{K_k(t_n, t_m)}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t_m) ds \right] + \frac{\mathfrak{G}_2 K_0(t_n, t_m)}{4\pi E_0} \int_L \frac{\tau(s, t_m)}{s-x} ds \right\},$$

$$G_2(x, t_n) = \frac{h \mathfrak{G}_1}{8\pi E_0} \sum_{m=0}^{n-1} K_0(t_n, t_m) \int_L \frac{\tau(s, t_m)}{s-x} ds,$$

$$K_k^*(t, \tau) = 1 - \frac{hK_k(t, \tau)}{2} \quad (k = 0, 1, \dots, N).$$

Очевидно, что системы (2.1) и (2.2) можно объединить, приняв в (2.2) $n = 0$
 $K_k^*(\tau_0, \tau_0) = 1 \quad (k = 0, 1, \dots, N); \quad G_1(x, \tau_0) = G_2(x, \tau_0) = 0.$

Таким образом, для получения решения определяющей системы (1.9) в любой момент времени $t_n = \tau_0 + nh \quad (n = 0, 1, \dots)$ нужно поочерёдно решать системы уравнений (2.2), начиная с упруго-мгновенной задачи ($n = 0$) и продолжая до нужного момента времени, на каждом шагу, используя результаты предыдущих шагов. Следует отметить, что системы уравнений (2.2) на каждом шагу отличаются от упруго-мгновенной задачи только постоянными коэффициентами и правыми частями. Эти системы уравнений можно решать различными методами. На наш взгляд, более эффективным является метод дискретных особенностей [10], который здесь будет использован. С этой целью запишем систему (2.2) в развёрнутом виде:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathfrak{G}_1}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_{c_k}^{b_k} \frac{V'(s, t_n)}{s-x} ds - \frac{\mathfrak{G}_2 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi E_0} \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau(s, t_n)}{s-x} ds = \\ & = \frac{K_k^*(t_n, t_n)}{E_k A_k} \left[P_{a_k} - h_k \int_{a_k}^x \tau(s, t_n) ds \right] - G_1(x, t_n) \\ & \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N; n = 0, 1, 2, \dots) \\ & \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_{c_k}^{b_k} \frac{V'(s, t_n)}{s-x} ds + \frac{\mathfrak{G}_1 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi E_0} \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} \frac{\tau(s, t_n)}{s-x} ds = G_2(x, t_n) \\ & \quad (c_k < x < d_k, k = 1, 2, \dots, M; n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right. \quad (2.3)$$

и при помощи замены переменных $\{s, x\} = v_k \{\xi, \eta\} + p_k$ при $(a_k < s, x < b_k)$ и $\{s, x\} = \lambda_k \{\xi, \eta\} + \mu_k$ при $(c_k < s, x < d_k)$, где

$$v_k = (b_k - a_k) / 2; \quad p_k = (b_k + a_k) / 2, \\ \lambda_k = (d_k - c_k) / 2; \quad \mu_k = (d_k + c_k) / 2$$

перепишем (2.2) на интервале $(-1, 1)$. После чего, вводя безразмерные функции

$$\varphi_k(\eta, t) = V'(\lambda_k \eta + \mu_k, t), \quad \psi_k(\eta, t) = \tau(v_k \eta + p_k, t) / E_0$$

и обозначения

$$R_{pk}^{(1,1)}(t, \xi) = v_k / (v_k \xi - v_p \eta + p_k - p_p), \\ R_{pk}^{(1,2)}(t, \xi) = \lambda_k / (\lambda_k \xi - v_p \eta + \mu_k - p_p), \\ R_{pk}^{(2,1)}(t, \xi) = v_k / (v_k \xi - \lambda_p \eta + p_k - \mu_p), \\ R_{pk}^{(2,2)}(t, \xi) = \lambda_k / (\lambda_k \xi - \lambda_p \eta + \mu_k - \mu_p),$$

$$Q_p^*(\eta) = Q(\lambda_p \eta + \mu_p) / E_0, \quad l_0^{(p)} = P_{a_p} / A_p E_p, \quad l_1^{(p)} = h_p E_0 v_p / P_{a_p}$$

придём к следующей системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\mathfrak{D}_2 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi} \left[\int_{-1}^1 \frac{\Psi_p(\xi, t_n)}{\xi - \eta} d\xi + \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 R_{pk}^{(1,1)}(\eta, \xi) \Psi_k(\xi, t_n) d\xi \right] - \\ & - \frac{\mathfrak{D}_1}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-1}^1 R_{pk}^{(1,2)}(\eta, \xi) \Phi_k(\xi, t_n) d\xi = l_0^{(p)} K_p^*(t_n, t_n) \left[l_1^{(p)} \int_{-1}^1 \Psi_p(\xi, t) d\xi - 1 \right] \\ & \quad + G_1^{(p)}(\eta, t_n) \quad (-1 < x < 1; p = 1 - N; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.4) \\ & \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_p(\xi, t_n)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{\mathfrak{D}_1 K_0^*(t_n, t_n)}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 R_{pk}^{(2,1)}(\eta, \xi) \Psi_k(\xi, t_n) d\xi + \\ & + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^M \int_{-1}^1 R_{pk}^{(2,2)}(\eta, \xi) \Phi_k(\xi, t_n) d\xi = G_2^{(p)}(\eta, t_n) \\ & \quad (-1 < x < 1; p = 1 - M; n = 0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \right.$$

где

$$G_1^{(p)}(\eta, t_n) = \frac{h}{2} \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ -l_0^{(p)} K_p(t_n, t_m) \left[l_1^{(p)} \int_{-1}^1 \Psi_p(\xi, t_m) d\xi - 1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{\mathfrak{D}_2 K_0(t_n, t_m)}{4\pi} \sum_{k=1}^N \int_{-1}^1 R_{pk}^{(1,1)}(\eta, \xi) \Psi_k(\xi, t_m) d\xi \right\},$$

$$G_2^{(p)}(\eta, t_n) = \frac{h \mathfrak{D}_1}{8\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{k=1}^N K_0(t_n, t_m) \int_{-1}^1 R_{pk}^{(2,1)}(\eta, \xi) \Psi_k(\xi, t_m) d\xi,$$

а знак звёздочки над знаками сумм означает отсутствие там члена $k = p$. В этом случае, условия (1.10) и (1.11) примут вид:

$$\int_{-1}^1 \Psi_k(\xi, t_n) d\xi = 1 / l_1^{(k)} \quad (k = 1 - N; n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.5)$$

$$\int_{-1}^1 \Phi_k(\xi, t_n) d\xi = 0 \quad (k = 1 - M; n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.6)$$

Известно [3,7], что функции $V'(x, t)$ и $\tau(x, t)$ в концевых точках интервалов $[a_k, b_k]$ ($k = 1, 2, \dots, N$) и $[c_k, d_k]$ ($k = 1, 2, \dots, M$), которые не являются общими для L и \bar{L} , имеют обычную корневую особенность, а в тех концевых точках, которые общие для L и \bar{L} – особенность типа $(x - c)^{-\gamma}$ ($\gamma = 1/2 \pm i\beta$), где

$$\beta = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{3 - v}{1 + v} \right).$$

Следовательно, функции $\Phi_p(\eta, t)$ ($p = 1, 2, \dots, M$) и $\Psi_p(\eta, t)$ ($p = 1, 2, \dots, N$) имеют аналогичное поведение в концевых точках интервала $[-1, 1]$ и их можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varphi_p(\eta, t_n) &= \frac{\Phi_p^*(\eta, t_n)}{(1+\eta)^{1/2-i\beta_*} (1-\eta)^{1/2+i\beta_*}}, \\ \Psi_p(\eta, t_n) &= \frac{\Psi_p^*(\eta, t_n)}{(1+\eta)^{1/2-i\beta_*} (1-\eta)^{1/2+i\beta_*}}\end{aligned}\quad (2.7)$$

Здесь $\beta_* = 0$, если соответствующая точка не является общей для L и \bar{L} и $\beta_* = \beta$, если соответствующая точка является общей для L и \bar{L} , а функции $\Phi_p^*(\eta, t_n)$ и $\Psi_p^*(\eta, t_n)$ – непрерывные гладкие функции, ограниченные вплоть до концов интервала $(-1, 1)$. Далее, подставляя значения функций $\Psi_p(t)$ и $\Phi_p(t)$ из (2.7) в (2.4)–(2.5), используя квадратурные формулы [10]

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{x-z} (1-x)^\alpha (1+x)^\beta dx \approx \sum_{i=1}^n w_i \frac{f(\xi_i)}{\xi_i - z} [1 - q_i(z)] \quad (z \neq \pm 1, \operatorname{Re} \alpha, \operatorname{Re} \beta > -1)$$

где ξ_i – корни многочлена Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi_i) = 0$,

$$\begin{aligned}w_i &= -2^{\alpha+\beta+1} \left(\frac{2}{\xi_i - 1} \right)^{n+1} \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(2n+\alpha+\beta+2)} \times \\ &\times \frac{F\left(n+1, n+\alpha+1; 2n+\alpha+\beta+2; \frac{2}{1-\xi_i}\right)}{(n+\alpha+\beta+1)P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(\xi_i)}\end{aligned}$$

и приравнивая обе части полученных уравнений в корнях функций второго рода, придём к системе из алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_p^*(\xi_i, t_n)$ и $\Psi_k^*(\xi_i, t_n)$ ($p = \bar{1}, \bar{M}; k = \bar{1}, \bar{N}; i = \bar{1}, \bar{l}; n = 0, 1, 2, \dots$).

Таким образом, в общем случае решение поставленной задачи свелось к итерационному процессу решений алгебраических уравнений относительно значений функций $\varphi_p^*(\xi_i, t_n)$ и $\Psi_k^*(\xi_i, t_n)$.

Теперь рассмотрим систему (1.17) при условиях (1.10) и (1.18). Умножим второе уравнение (1.17) на $i/2$, где i – мнимая единица, и просуммируем с первым уравнением (1.17). В итоге, введя комплексные функции

$$\chi_m(x, t) = q(x, t) - i\tau(x, t)/2 \quad (a_m < x < b_m, m = 1, 2, \dots, N),$$

придём к уравнению:

$$\begin{aligned}&\frac{(1-L_0)}{E_0} \left\{ \mathfrak{S}_1 \chi_k(x, t) + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{\chi_m(s, t)}{s-x} ds + \frac{i}{\pi} \sum_{m=1}^n \int_{a_m}^{b_m} \frac{\chi_m(s, t) + \bar{\chi}_m(s, t)}{\sqrt{x}(\sqrt{s} + \sqrt{x})} ds \right\} = \\ &= \frac{(1-L_k)}{E_k A_k} \left[ih_k \int_{a_k}^x [\chi_k(s, t) - \bar{\chi}_k(s, t)] ds - P_{a_k} \right] \quad (a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N)\end{aligned}\quad (2.8)$$

Далее, при помощи замены переменных $s = v_m \xi + p_m$; $x = v_k \eta + p_k$, где $p_k = (b_k + a_k)/2$, $v_k = (b_k - a_k)/2$, запишем (2.8) на интервале $(-1, 1)$ и введя безразмерные функции

$$\varphi_k(\eta, t) = \frac{A_k E_k}{P_0 E_0} \chi_k(v_k \eta + p_k, t), \quad (k = 1, 2, \dots, N)$$

и обозначения

$$R_{m,k}(\xi, \eta) = \frac{v_m}{2\sqrt{v_k \eta + p_k} \left[\sqrt{v_k \eta + p_k} + \sqrt{v_m \xi + p_m} \right]},$$

$$Q_{m,k}(\xi, \eta) = \begin{cases} R_{m,k}(\xi, \eta) + \frac{v_m}{v_m \xi + p_m - v_k \eta - p_k} & (m \neq k) \\ R_{m,k}(\xi, \eta) & (m = k) \end{cases},$$

$$p_{a_k}^{(0)} = p_{a_k} / P_0, \quad P_0 = \sum_{k=1}^n P_k \neq 0, \quad \lambda_k = v_k h_k E_0 / A_k E_k,$$

окончательно придём к следующему двумерному интегро-дифференциальному уравнению:

$$(1 - L_0) \left\{ \vartheta_1 \varphi_k(\eta, t) + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\xi, t)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 Q_{m,k}(\xi, \eta) \varphi_m(\xi, t) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 R_{m,k}(\xi, \eta) \bar{\varphi}_m(\xi, t) d\xi \right\} = -(1 - L_k) \left[2\lambda_k \int_{-1}^x \text{Im} \varphi_k(\xi, t) d\xi + P_{a_k}^{(0)} \right] \quad (2.9)$$

$$(a_k < x < b_k, k = 1, 2, \dots, N)$$

При этом, условия (1.10) и (1.18) примут вид

$$\text{Im} \int_{-1}^1 \varphi(\xi, t) d\xi = -\frac{P_k}{2\lambda_k P_0} \quad (k = 1, \dots, N) \quad (2.10)$$

$$\sum_{m=1}^n \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{v_m \xi + p_m})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} - \sqrt{v_m \xi + p_m})} \right| \text{Re} \varphi_m(\xi, t) d\xi = 0 \quad (2.11)$$

Далее, как и выше, для любого момента времени $t_n = \tau_0 + n h$ ($n = 0, 1, \dots$)

будем иметь цепочку следующих систем определяющих уравнений:

$$K_0^*(t_n, t_n) \left\{ \vartheta_1 \varphi_k(\eta, t_n) + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\xi, t_n)}{\xi - \eta} d\xi + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 Q_{m,k}(\xi, \eta) \varphi_m(\xi, t_n) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{2i}{\pi} \sum_{m=1}^N \int_{-1}^1 R_{m,k}(\xi, \eta) \bar{\varphi}_m(\xi, t_n) d\xi \right\} = -K_k^*(t_n, t_n) \left[2\lambda_k \int_{-1}^x \text{Im} \varphi_k(\xi, t_n) d\xi + P_{a_k}^{(0)} \right] \quad (2.12)$$

$$+ G_k(\eta, t_n) \quad (a_k < x < b_k; k = 1, 2, \dots, N; n = 0, 1, \dots)$$

где

$$G_k(\eta, t_n) = \frac{h}{2} \sum_{m=0}^{n-1} \left\{ K_k(t_n, t_m) \left[2\lambda_k \int_{-1}^x \operatorname{Im} \varphi_k(\xi, t_m) d\xi + P_{a_k}^{(0)} \right] - \right. \\ \left. -K_0(t_n, t_m) \left[\vartheta_1 \varphi_k(\eta, t_m) + \frac{2i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi_k(\xi, t_m)}{\xi - \eta} d\xi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2i}{\pi} \sum_{q=1}^N \int_{-1}^1 Q_{q,k}(\xi, \eta) \varphi_q(\xi, t_m) d\xi + \frac{2i}{\pi} \sum_{q=1}^N \int_{-1}^1 R_{q,k}(\xi, \eta) \bar{\varphi}_q(\xi, t_m) d\xi \right] \right\}$$

При этом, условия (2.10) и (2.11) записываются в виде

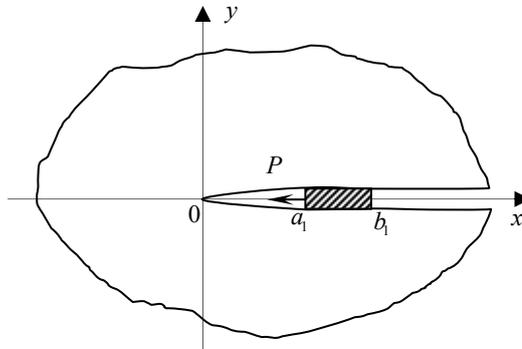
$$\operatorname{Im} \int_{-1}^1 \varphi(\xi, t) d\xi = -\frac{P_k}{2\lambda_k P_0} \quad (k=1, \dots, N) \quad (2.13) \\ (k=1, \dots, N, \quad n=0, 1, 2, \dots)$$

$$\sum_{m=1}^n \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{(\sqrt{a_k} - \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} + \sqrt{v_m \xi + p_m})}{(\sqrt{a_k} + \sqrt{v_m \xi + p_m})(\sqrt{b_{k-1}} - \sqrt{v_m \xi + p_m})} \right| \operatorname{Re} \varphi_m(\xi, t_n) d\xi = 0 \quad (2.14)$$

Легко установить, что искомые функции $\varphi_k(\eta, t_n)$ ($k=1, \dots, N$; $n=0, 1, 2, \dots$) в концевых точках интервала $[-1, 1]$ имеют особенность типа $(\eta \pm 1)^{-1/2 \mp i\beta}$. Учитывая этот факт, в рассматриваемом случае эти функции представим в виде (2.5) и подставляя их в уравнения (2.12)–(2.14), по обычной процедуре [10], опять придём к решению системы алгебраических уравнений относительно значений $\varphi_k^*(\xi_i, t_n)$ ($k=1, N$; $i=1, l$; $n=0, 1, 2, \dots$).

3. Численный пример

В качестве примера рассмотрим обобщённое плоско-напряжённое состояние вязкоупругой бесконечной пластины, когда она на интервале $(0, \infty)$ содержит полубесконечный разрез, берега которого на интервале $[a_1, b_1]$ спаяны при помощи конечного тонкого вязкоупругого включения, и деформируется под воздействием осевой сосредоточенной нагрузки P , приложенной к включению в концевой точке $x = a_1$ в момент времени τ_0 (фиг.1).



Фиг.1

В этом частном случае в (2.12)–(2.14) нужно взять $N = 1$.

Добавим также формулы для определения раскрытия конечного разреза, находящегося на интервале $[0, a_1]$ и коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке разреза $x = 0$.

Для определения раскрытия конечного разреза интегрируем первое из соотношений (1.14) от нуля до x . Учитывая при этом, что в этом интервале $\tau(x, t) = 0$ и переходя к безразмерным функциям, получим

$$V_1(x, t) = \frac{V(x, t)}{2v_1} = -\frac{2\lambda_0(1-L_0)}{\pi} \int_{-1}^1 \ln \left| \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{v_1\xi + p_1})}{(\sqrt{x} + \sqrt{v_1\xi + p_1})} \right| \operatorname{Re} \varphi_1(\xi, t) d\xi \quad (3.1)$$

Для определения коэффициента интенсивности разрушающих напряжений в концевой точке разреза $x = 0$ используем третье из соотношений (1.6). Подставляя в это уравнение значение функции $V'(x, t)$ из (1.14), после некоторых выкладок найдём

$$\begin{aligned} \sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t) = & \frac{2\operatorname{arctg}(\sqrt{a_1/(-x)})}{\pi^2\sqrt{-x}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\sqrt{s}q(s, t)}{s-x} ds + \frac{(1-\nu)}{4\pi} \int_a^b \frac{\tau(s, t)}{s-x} ds \\ & - \frac{1}{\pi^2} \int_{a_1}^{b_1} \frac{\ln \left| \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{s})}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{s})} \right| q(s, t)}{s-x} ds \quad (x < 0) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что при выводе формул (3.1) и (3.2) использовано значение интеграла

$$\int_0^{a_1} \frac{ds}{\sqrt{s}(s-x)} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \left| \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{x})}{(\sqrt{a_1} + \sqrt{x})} \right| & (x > 0) \\ \frac{2}{\sqrt{-x}} \operatorname{arctg}(\sqrt{a_1/(-x)}) & (x < 0) \end{cases}$$

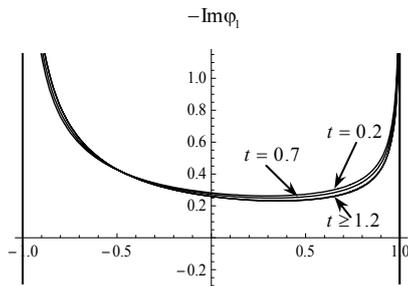
Далее, переходя к безразмерным величинам, для безразмерного коэффициента интенсивности разрушающих напряжений

$$K_I^*(0, t) = \frac{A_1 E_1}{P_0 E_0} K_I(0, t) = \frac{A_1 E_1}{P_0 E_0} \sqrt{2\pi} \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{-x/a} \sigma_y^{(\pm)}(x, 0, t),$$

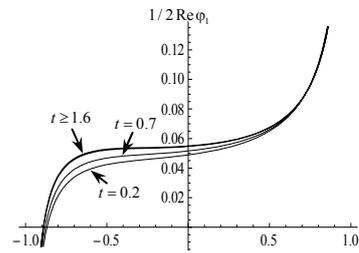
получим выражение

$$K_I^*(0, t) = \sqrt{\frac{v_1}{2\pi a}} \int_{-1}^1 \frac{[\varphi_1(\xi, t) + \bar{\varphi}_1(\xi, t)] d\xi}{\sqrt{\xi + p_1/v_1}}$$

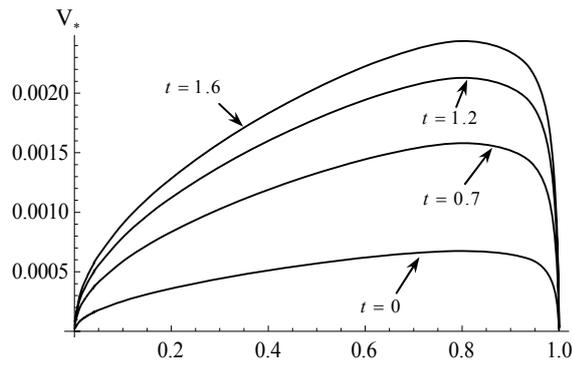
Проведён численный анализ задачи и выяснены закономерности изменения приведённых тангенциальных $-\operatorname{Im}[\varphi_1(\eta, t)]$ и нормальных $\operatorname{Re}[\varphi_1(\eta, t)]$ контактных напряжений, действующих на берегах включения, и приведённого раскрытия разреза $V_*(t) = V(a(t+1)/2)/a$ в зависимости от времени, в случае, когда $\rho_0 = 0$, $\rho_1 = 2$, $\sigma = 0,3$, $\lambda_1 = 0,1$, $\tau_0 = 0,2$. Полученные результаты приведены в виде графиков (фиг.2–4).



Фиг.2



Фиг.3



Фиг.4

Из представленных графиков видно, что распределение как тангенциальных, так и нормальных приведённых контактных напряжений мало зависит от времени. Однако, раскрытие разреза, находящегося на интервале $[0, a_1]$, в течение времени существенно увеличивается.

Выявлены также закономерности изменения приведённого коэффициента интенсивности разрушающих напряжений $K_I(0)$ в концевой точке разреза в зависимости от времени в случае, когда $\rho_0 = 0$, $\sigma = 0,3$, $\lambda_0 = 0,1$, $\tau_0 = 0,2$. Результаты вычислений приведены в виде таблиц 1–2.

Таблица 1. $\rho_1 = 2$

t	0.2	0.3	0.7	1	1.6
K_I	0.07967	0.08171	0.08469	0.08545	0.08612

Таблица 2. $\rho_1 = 0,5$

t	0.2	0.3	0.7	1	1.6
K_I	0.08135	0.08325	0.08568	0.0862	0.08657

Они показывают, что в течение времени коэффициент интенсивности разрушающих напряжений увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W.T. On the diffusion of load from a stiffener into a shear. *Quart.J.Mech.and Appl.Math.*, 1955. V.8. №2. P.164–178.
2. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweißter Verbindungen. *Ingr. Arch.*, 1932. Bd.3. №2. P.123–129.
3. Арутюнян Н.Х., Мхитарян С.М. К контактной задаче о двух полу-бесконечных пластинах, соединённых полубесконечной упругой накладкой. // В сб.: Механика деформируемых тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975. С.44–51.
4. Григорян Э.Х., Торосян Р.Д. Задача для упругой бесконечной пластины, усиленной крестообразным бесконечным стрингером. // Изв. НАН Армении. Механика. 1994. Т.47. №1–2. С.3–12.
5. Hakobyan V. Load-transfer from semi-infinite strip to wedge-shaped plate taking into account the non-homogeneous ageing factor. // *Proceedings of XXXVII Summer School “Advanced Problems in Mechanics”*. Saint-Petersburg, Russia. 2009. P. 269–276.
6. Агаян К.Л. Об одной контактной задаче для бесконечной пластины с трещиной, усиленной упругими накладками. // Изв.АН АрмССР. Механика. 1976. Т.29. №4. С.3–15.
7. Акопян В.Н., Амирджанян А.А. О передаче нагрузки от упругих включений к бесконечной упругой пластине с разрезами. // Тезисы докладов межд. конф. “Современные проблемы механики”, посв. 100-летию Л.А.Галина. Москва: 2012. С.9.
8. Мхитарян С.М. О контакте между бесконечным стрингером и упругой полубесконечной пластиной с вертикальной трещиной. // В сборник трудов III межд. конф.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”, посв. 100-летию акад. Н.Х.Арутюняна. Ереван: 2012. Т.1. С.74–78.
9. Арутюнян Н.Х., Колмановский В.Б. Теория ползучести неоднородных сред. М.: Наука, 1983. 336с.
10. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. // Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3. С.12–19.

Сведения об авторах:

Акопян Ваграм Наслетникович – доктор физ.-мат. наук, директор Института механики НАН Армении, тел.:(37410) 52-48-90,
e-mail: vhakobyan@sci.am

Амирджанян Арутюн Арменович – кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении,
e-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 12.10.2012