

УДК 539.374

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ВЯЗКОУПРУГОЙ
ПЛАСТИНКЕ С ВЛОЖЕННОЙ ШАЙБОЙ ПРИ
ВИБРАЦИОННОЙ НАГРУЗКЕ**

Вермишян Г. Б.

Ключевые слова: комплексный модуль, комплексная податливость, диссипативная сила, линейная и экспоненциальная аппроксимация.

Keyword: complex modules, complex compliant, dissipative forces, linear und exponential approximation.

Վերմիշյան Գ.Բ.

**Ներդիրով մածուցիկ-առաձգակա թիթեղում ջերմության
բաշխումը վիբրացիոն բեռի ազդեցության տակ**

Աշխատանքում դիտարկված է ջերմության բաշխումը մածուցիկ-առաձգական նյութից, կլոր անցքով թիթեղում, որի մեջ ներդրված է ուրիշ մածուցիկ-առաձգական նյութից ներդիր: Կիրառված բեռը իրենից ներկայացնում է հաստատուն ամպլիտուդայով, հարմոնիկ օրենքով փոփոխվող OX - առանցքի ուղղությամբ ազդող, անվերջում կիռատված ձգող ուժ:

Դիտարկված է նաև թիթեղի ձգումը բոլոր ուղղություններով: Ներդիրը լուծված է այն պայմանով, որ երկու մարմինների բաժանման գծի վրա հավասար են ջերմաստիճանը և ջերմային հոսքը, իսկ թիթեղի հարթության վրա տեղի է ունենում ազատ ջերմափոխանակություն շրջապատող միջավայրի հետ: Բերված են հաշվումներ բոլոր ուղղություններով ձգման դեպքում

Vermishyan G.B.

Distribution of temperature in of visco-elastic plate with a washer imbedded under the effect of vibration

The distribution of temperature in an infinite plate of visco-elastic material with a circular hole, into which is embedded visco-elastic circular disc from another visco-elastic material is examined. Applied load is a tensile force acting at infinity in the direction of the OX axis, which varies harmonically with constant amplitude.

The case of omnidirectional tension of the plate is considered as well.

The problem is solved under the condition that the dividing line of two-body temperature and heat flux are equal, and on the lateral surface of the plate and the washer is loose heat to the environment.

Calculation is made for the case of omnidirectional tension.

В работе рассматривается распределение температуры в бесконечной пластинке из вязкоупругого материала круговым отверстием, в которую вложена вязкоупругая круговая шайба из другого вязкоупругого материала.

Прилагаемая нагрузка представляет собой растягивающиеся силы, действующие в бесконечности по направлению оси OX , которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой.

В работе также рассмотрен случай всестороннего растяжения пластинки.

Задача решена при условии, что на линии раздела двух тел равны температура и тепловой поток, а на боковой поверхности пластинки и шайбы происходит свободная теплоотдача в окружающую среду.

Проведены вычисления в случае всестороннего растяжения.

Исследовано нагружение бесконечной пластинки из вязкоупругого материала с круговым отверстием, в которую вложена вязкоупругая круговая шайба из другого вязкоупругого материала. До деформации радиусы шайбы и отверстия были одинаковы. Будем полагать, что трение между шайбой и пластинкой отсутствует. Прилагаемая нагрузка представляет собой растягивающиеся силы, действующие в бесконечности по направлению оси OX , которая меняется по гармоническому закону с постоянной амплитудой, равной p_0 .

Также рассматривается случай всестороннего растяжения пластинки. Известно

[1], что составляющие комплексной податливости существенно зависят от частоты колебаний и температуры. При этом, за счёт работы диссипативных сил происходит выделение тепла, поэтому при определении температуры получаются нелинейные дифференциальные уравнения параболического типа, содержащие некоторые функции, которые находятся экспериментальным путем. Задача решена при условии, что на линии раздела шайбы и пластинки равны температура и тепловой поток, а на боковой поверхности пластинки и шайбы происходит свободная теплоотдача в окружающую среду по направлению нормали, т.е. по направлению оси OZ . Имеет место соотношение $\frac{\partial T}{\partial z} = \alpha(T_0 - T)$, где α – коэффициент теплопередачи. Предполагается, что температура по толщине пластинки и шайбы не меняется.

1. Одностороннее растяжение. Рассмотрим деформацию пластинки из вязкоупругого материала с круговым отверстием с радиусом R , в которую вложена шайба из другого вязкоупругого материала. На пластинку действует растягивающаяся нагрузка, меняющаяся по гармоническому закону $p = p_0 \cos \omega t$ с постоянной амплитудой, равной p_0 . Положим, что составляющая комплексной податливости $J''(T, \omega)$ мала по сравнению с $J'(T, \omega)$. Для определения напряжённого состояния можно воспользоваться решением упругой задачи о растяжении пластинки с вложенной упругой шайбой. Отметим знаком 1 все элементы, относящиеся к шайбе, а к пластинке – знаком 2. Компоненты напряжения в полярной системе координат будут [2]

$$\sigma_{\rho}^{(j)} = \sigma_{0\rho}^{(j)} \cos \omega t, \quad \sigma_{\theta}^{(j)} = \sigma_{0\theta}^{(j)} \cos \omega t, \quad \tau_{\rho\theta}^{(j)} = \tau_{0\rho\theta}^{(j)} \cos \omega t, \quad (\rho = r/R, j = 1, 2) \quad (1.1)$$

где $\sigma_{0\rho}^{(j)}, \sigma_{0\theta}^{(j)}, \tau_{0\rho\theta}^{(j)}$ – компоненты напряжения упругой задачи.

При вложении шайбы в отверстие, радиусы шайбы и отверстия пластинки до деформации были одинаковы. Трение между пластинкой и шайбой отсутствует. Связь между компонентами деформации и напряжения возьмём в виде [3]

$$\varepsilon_{\rho}^{(j)} = \frac{\sigma_{\rho}^{(j)}}{E_j} + \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \sigma_{\rho}^{(j)}(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_{\theta}^{(j)}}{E_j} - \nu \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \sigma_{\theta}^{(j)}(\tau) d\tau, \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_{\theta}^{(j)} = \frac{\sigma_{\theta}^{(j)}}{E_j} + \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \sigma_{\theta}^{(j)}(\tau) d\tau - \frac{\nu \sigma_{\rho}^{(j)}}{E_j} - \nu \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \sigma_{\rho}^{(j)}(\tau) d\tau,$$

$$\gamma_{\rho\theta}^{(j)} = \frac{2(1+\nu)}{E_j} \tau_{\rho\theta}^{(j)} + 2(1+\nu) \int_{-\infty}^t K(T_j, t - \tau) \tau_{\rho\theta}^{(j)}(\tau) d\tau, \quad (j = 1, 2).$$

Подставляя значение $\sigma_{\rho}^{(j)}, \sigma_{\theta}^{(j)}, \tau_{\rho\theta}^{(j)}$ из (1.1) в (1.2), введя переменную $\zeta = t - \tau$ и комплексную податливость

$$J^*(T_j, \omega) = \int_0^{\infty} K(T_j, \zeta) e^{-i\omega\zeta} d\zeta = J'_j(T_j, \omega) - iJ''_j(T_j, \omega) = \\ = J(T_j, \omega) \cos \phi_0^{(j)} - iJ(T_j, \omega) \sin \phi_0^{(j)} \quad (j = 1, 2), \quad (1.3)$$

получаем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\rho}^{(j)} &= (\sigma_{0\rho}^{(j)} - \nu\sigma_{0g}^{(j)}) \left\{ \left[\frac{1}{E_j} + J'(T_j, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T_j, \omega) \sin \omega t \right\}, \\
\varepsilon_g^{(j)} &= (\sigma_{0g}^{(j)} - \nu\sigma_{0\rho}^{(j)}) \left\{ \left[\frac{1}{E_j} + J'(T_j, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T_j, \omega) \sin \omega t \right\}, \\
\gamma_{\rho g}^{(j)} &= 2(1+\nu)\tau_{0\rho g}^{(j)} \left\{ \left[\frac{1}{E_j} + J'(T_j, \omega) \right] \cos \omega t + J''(T_j, \omega) \sin \omega t \right\},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Работа, совершаемая при вязкоупругой деформации, равна

$$W_j = \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_{\rho}^{(j)} \frac{d\varepsilon_{\rho}^{(j)}}{dt} dt + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \sigma_g^{(j)} \frac{d\varepsilon_g^{(j)}}{dt} dt + \int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \tau_{\rho g}^{(j)} \frac{d\gamma_{\rho g}^{(j)}}{dt} dt \quad (j=1,2) \tag{1.5}$$

подставляя (1.1) и (1.4) в (1.5), получим

$$W_j = \pi J_j''(T_j, \omega) \left[(\sigma_{0\rho}^{(j)})^2 - 2\nu\sigma_{0\rho}^{(j)}\sigma_{0g}^{(j)} + (\sigma_{0g}^{(j)})^2 + 2(1+\nu)(\tau_{0\rho g}^{(j)})^2 \right] (j=1,2). \tag{1.6}$$

Работа, совершаемая за один цикл при деформации, позволяет определить интенсивность выделения тепла

$$q_j = \frac{\lambda\omega k_j^*}{2\pi} W_j \quad (j=1,2), \tag{1.7}$$

где k_i – величина, обратная механическому эквиваленту тепла, λ – коэффициент, равный доле механической работы, переходящий в тепло. С целью установления максимального нагрева будем полагать λ постоянным и $\lambda = 1$. Известно [1], что компоненты комплексной податливости и модуля связаны соотношением

$$\begin{aligned}
J^*(T, \omega) &= \frac{1}{E^*(T, \omega)}, \\
J'(T, \omega) &= \frac{E'(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2}, \\
J''(T, \omega) &= \frac{E''(T, \omega)}{[E'(T, \omega)]^2 + [E''(T, \omega)]^2}.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

В случае относительно небольшого температурного интервала для $E'(T_j, \omega)$ и $E''(T_j, \omega)$ можно воспользоваться линейной аппроксимацией, при этом, $E'(T_j, \omega)$ будем считать постоянной

$$E_j'(T_j, \omega) = A_j, E_j''(T_j, \omega) = B_j + C_j T_j \quad (j=1,2). \tag{1.9}$$

Обычно, $E''(T_j, \omega) \ll E'(T_j, \omega)$, тогда $E''(T_j, \omega)$ по сравнению с $E'(T_j, \omega)$ можно пренебречь [1] и

$$J'_j(T_j, \omega) = 1/A_j, \quad J''_j(T_j, \omega) = (B_j + C_j T_j) / A_j^2. \quad (1.10)$$

Для стационарного случая уравнение теплопроводности в каждой области принимает вид

$$L_j(T_j) \equiv \Delta T_j + \mu_0^{(j)} J''_j(T_j, \omega) f_j - \alpha(T_j - T_0) = 0 \quad (j = 1, 2), \quad (1.11)$$

$$\mu_0^{(j)} = \frac{\lambda \omega k_j^* p_0^2}{2a_j c_j},$$

где

$$f_j(\rho, \vartheta) = (\sigma_\rho^{0(j)})^2 - 2\nu \sigma_\rho^{0(j)} \sigma_\vartheta^{0(j)} + (\sigma_\vartheta^{0(j)})^2 + 2(1+\nu)(\tau_{\rho\vartheta}^{0(j)})^2 \quad (j = 1, 2) \quad (1.12)$$

при граничном условии

$$T_1 = T_2 = T_*, \quad r = R,$$

$$k_2 \frac{dT_2}{dr} = k_1 \frac{dT_2}{dr}, \quad r = R, \quad (1.13)$$

$$T_2 < \infty, \quad r \rightarrow \infty,$$

на линии раздела пластинки и шайбы температура (T_* – пока неизвестная функция) и тепловой поток равны, а на бесконечности температура ограничена. Учитывая (1.10), (1.12) и введя обозначения

$$r/R = \rho, \quad (B_j + C_j B_j) / A_j = u_j \quad (j = 1, 2), \quad (1.14)$$

в каждой области получаем

$$L_1(u_1) \equiv \Delta u_1(\rho, \vartheta) = -F_1(\rho, \vartheta) u_1(\rho, \vartheta) - \Phi_1(\rho, \vartheta) \quad (0 \leq \rho < 1, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi), \quad (1.15)$$

$$L_2(u_2) \equiv \Delta u_2(\rho, \vartheta) - \varepsilon^2 u_2(\rho, \vartheta) = -F_2(\rho, \vartheta) u_2(\rho, \vartheta) - \Phi_2(\rho, \vartheta) \quad (1 < \rho < \infty, 0 \leq \vartheta \leq 2\pi), \quad (1.16)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2},$$

$$\Phi_1(\rho, \vartheta) = \frac{\alpha R^2 (B_1 + C_1 T_0)}{A_1} = \alpha_1^{(1)}, \quad \Phi_2(\rho, \vartheta) = \frac{\alpha R^2 (B_2 + C_2 T_0)}{A_2} = \alpha_1^{(2)}, \quad (1.17)$$

$$\alpha_0^{(2)} = \frac{R^2 C_2 \mu_0^{(2)}}{A_2^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\alpha R^2 - 2(1+\nu) C_2 \mu_0^{(2)}}{A_2^2}$$

$F_1(\rho, \vartheta)$ и $F_2(\rho, \vartheta)$ – данные регулярные функции, T_0 – температура

окружающей среды. После обозначения (1.14) граничные условия (1.13) принимают вид:

$$u_1(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = \frac{B_1 + C_1 T_*}{A_1}, \quad u_2(\rho, \vartheta) \Big|_{\rho=1} = \frac{B_2 + C_2 T_*}{A_2}, \quad (1.18)$$

$$\frac{k_2 A_2}{C_2} \frac{du_2}{d\rho} \Big|_{\rho=1} = \frac{k_1 A_1}{C_1} \frac{du_1}{d\rho} \Big|_{\rho=1},$$

$$u_2 < \infty, \rho \rightarrow \infty.$$

Ищем решение уравнений (1.15) и (1.16) при граничном условии (1.18) соответственно в виде

$$u_1(\rho_0, \vartheta_0) = u_1^*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \int_0^1 G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_1^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta, \quad (1.19)$$

$$(0 \leq \rho_0 < 1, 0 \leq \vartheta_0 \leq 2\pi),$$

$$u_2(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{u_2^*(\vartheta_0)}{\rho_0^2} + \int_0^{2\pi} \int_1^\infty G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_2^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta, \quad (1.20)$$

$$(1 < \rho_0 < \infty, 0 \leq \vartheta_0 \leq 2\pi)$$

где G_1 – функция Грина уравнения Лапласа для круга, а G_2 – функция Грина уравнения Гельмгольца для внешности круга

$$G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1 - 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \rho^2 \rho_0^2}{\rho^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \rho_0^2}, \quad (1.21)$$

$$G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \left[W_0(\rho_0, \rho) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} W_n(\rho_0, \rho) \cos(\vartheta - \vartheta_0) \right],$$

$$W_n(\rho_0, \rho) = \begin{cases} \left[I_n(\varepsilon \rho_0) K_n(\varepsilon) - K_n(\varepsilon \rho_0) I_n(\varepsilon) \right] \frac{K_n(\varepsilon \rho)}{K_n(\varepsilon)}, & 1 \leq \rho_0 < \rho, \\ \left[I_n(\varepsilon \rho) K_n(\varepsilon) - K_n(\varepsilon \rho) I_n(\varepsilon) \right] \frac{K_n(\varepsilon \rho_0)}{K_n(\varepsilon)}, & 1 \leq \rho < \rho_0, \end{cases} \quad (1.22)$$

где $I_n(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента, а $K_n(x)$ – функция Макдональда.

Подставляя значение $u_1(\rho, \vartheta)$ из (1.19) в (1.15), получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\mu_1^*(\rho_0, \vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \int_0^1 K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_1^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0), \quad (1.23)$$

где

$$K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = F_1(\rho, \vartheta) G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta), \quad (1.24)$$

$$\Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0) = [\rho_0^2 F_1(\rho_0, \vartheta_0) + 4] u_1^*(\vartheta_0) + u_1^{*//}(\vartheta_0) + \alpha_1^{(1)} \quad (1.25)$$

Из (1.20), подставляя значение $u_2(\rho, \vartheta)$ в (1.16), получаем

$$\mu_2^*(\rho_0, \vartheta_0) + \int_0^{2\pi} \int_1^\infty K_2^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_2^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \Phi_2^*(\rho_0, \vartheta_0), \quad (1.26)$$

где

$$K_2^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = F_2(\rho, \vartheta) G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta), \quad (1.27)$$

$$\Phi_2^*(\rho_0, \vartheta_0) = \left[\frac{\alpha_0^{(2)}}{\rho_0^2} \Psi_2(\rho_0, \vartheta_0) - \left(\frac{4}{\rho_0^4} - \frac{\varepsilon^2}{\rho_0^2} \right) u_2^*(\vartheta_0) + \frac{1}{\rho_0^4} u_2^{*/'}(\vartheta_0) + \alpha_1^{(2)} \right]. \quad (1.28)$$

2. Для решения интегрального уравнения (1.23) его ядро заменим вырожденным, разлагая его в двойной ряд Фурье по ортонормированным системам функции

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta) &= \sqrt{\frac{2(k+1)}{\pi}} \rho^k \cos k\vartheta, \\ \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) &= \sqrt{\frac{2(m+1)}{\pi}} \rho_0^m \cos m\vartheta_0 \quad (k, m = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} A_{km}^{(1)} \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \right\} \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta),$$

где

$$\begin{aligned} A_{km}^{(1)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^1 K_1^*(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \rho_0 d\rho_0 d\vartheta_0 \right\} \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^1 G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \rho_0 d\rho_0 d\vartheta_0 \right\} F(\rho, \vartheta) \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставляя значение G_1 из (1.21) в (2.2), после вычисления получаем

$$A_{km}^{(1)} = \frac{l_0^{(1)}}{2\pi} \sqrt{\frac{m+1}{k+1}} \left\{ \varepsilon_{km}^{(0)} J_{km}^{(1)} + \varepsilon_{km}^{(2)} J_{km}^{(2)} + \varepsilon_{km}^{(4)} J_{km}^{(3)} \right\}, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{km}^{(p)} &= \int_0^{2\pi} \cos px \cos kx \cos mx dx \quad (p = 0, 2, 4), \\ J_{km}^{(p)} &= \int_0^1 b_p(x) (1-x^2) x^{k+m+1} dx \quad (p = 1, 2, 3), \end{aligned}$$

Значение K_1^* из (2.1), подставляя в (1.23), получаем

$$\mu_1^*(\rho_0, \vartheta_0) + \sum_{k,m=1}^{\infty} A_{km}^{(1)} \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \int_0^{2\pi} \int_0^1 \varphi_k^{(1)}(\rho, \vartheta) \mu_1^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta = -\Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0), \quad (2.4)$$

где

$\Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0) = \rho_0^2 F_1(\rho_0, \vartheta_0) u_1^*(\vartheta_0) + u_1^{*/'}(\vartheta_0) + 4u_1^*(\vartheta_0) + \alpha_1^{(1)}$ – интегральное уравнение с вырожденным ядром. Как известно, его можно свести к линейным системам алгебраических уравнений

$$X_m^{(1)} + \sum_{k=1}^N A_{km}^{(1)} X_k^{(1)} = \Phi_{1m}^* \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (2.5)$$

где

$$\Phi_{1m}^* = - \int_0^{2\pi} \int_0^1 \Phi_1^*(x, y) \varphi_m^{(1)}(x, y) x dx dy \quad (m = 1, 2, \dots, N). \quad (2.6)$$

$A_{km}^{(1)}$ даётся по формуле (2.3), после чего решение интегрального уравнения (2.4) будет

$$\mu_1^*(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi_1^*(\rho_0, \vartheta_0) + \sum_{k=1}^N Y_m^{(1)} \varphi_m^{(1)}(\rho_0, \vartheta_0) \quad (0 \leq \rho_0 < 1), \quad (2.7)$$

$$Y_m^{*(1)} = \sum_{k=1}^N A_{km}^{(1)} X_k^{(1)} \quad (m = 1, 2, \dots, N)$$

$X_k^{(1)}$ определяется из (2.5). По аналогии можно решить интегральное уравнение (1.26), разница лишь в обозначениях и ортонормированных системах функции, в этом случае будет

$$\varphi_m^{(2)}(\rho_0, \vartheta_0) = \frac{c_m (\rho_0 - 1)}{\rho_0^{m+3}} \cos m \vartheta_0, \quad \varphi_k^{(2)}(\rho, \vartheta) = \frac{c_k (\rho - 1)}{\rho^{k+3}} \cos \vartheta, \quad (2.8)$$

$$c_k = \sqrt{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} / \sqrt{2\pi}$$

Решение будет

$$\mu_2^*(\rho_0, \vartheta_0) = \Phi_2^*(\rho_0, \vartheta_0) + \sum_{k=1}^N Y_m^{(2)} \varphi_m^{(2)}(\rho_0, \vartheta_0) \quad (1 < \rho_0 < \infty), \quad (2.9)$$

$$Y_m^{*(2)} = \sum_{k=1}^N A_{km}^{(2)} X_k^{(2)} \quad (m = 1, 2, \dots, N),$$

$X_k^{(2)}$ определяется из систем уравнений

$$X_m^{(2)} + \sum_{k=1}^N A_{km}^{(2)} X_k^{(2)} = \Phi_{2m}^* \quad (m = 1, 2, \dots, N), \quad (2.10)$$

где

$$A_{km}^{(2)} = 2\pi \alpha_0^{(2)} c_k c_m \left\{ H_{km}^{(1)} \varepsilon_{km}^{(0)} + H_{km}^{(2)} \varepsilon_{km}^{(2)} + H_{km}^{(3)} \varepsilon_{km}^{(4)} \right\}, \quad (2.11)$$

$$H_{km}^{(p)} = \int_1^\infty Q_{mm}^{(2)}(x) a_p(x) \frac{x-1}{x^{k+2}} dx \quad (p = 1, 2, 3),$$

$$Q_{mm}^{(2)}(x) = \int_1^\infty W_m(x, y) \frac{y-1}{y^{k+2}} dy, \quad (2.12)$$

$a_p(x)$ даётся по (1.23), $W_m(x, y)$ – по формуле (1.28), $\varepsilon_{km}^{(p)}$ ($p = 0, 2, 4$) – по (2.5)

$$\Phi_{2m}^* = \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \Phi_2^*(x, y) \varphi_m^{(2)}(x, y) x dx dy = c_m \int_0^{2\pi} \int_1^\infty \Phi_2^*(x, y) \cos my \frac{x-1}{x^{m+2}} dx dy. \quad (2.13)$$

3. Используя граничные условия (1.18), получаем уравнение для определения неизвестной функции, входящей в решения (2.7) и (2.9),

$$T_*(\vartheta_0) = \frac{\lambda_2^* A_2}{C_2} \frac{d}{d\rho_0} \left[\int_0^{2\pi\infty} \int_1 G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_2^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \right]_{\rho_0=1} - \quad (3.1)$$

$$- \frac{\lambda_1^* A_1}{C_2} \frac{d}{d\rho_0} \left[\int_0^{2\pi 1} \int_0 G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \mu_1^*(\rho, \vartheta) \rho d\rho d\vartheta \right]_{\rho_0=1} + \beta_0^{(0)}$$

$$\lambda_1^* = \frac{k_1}{2(k_1 + k_2)}, \quad \lambda_2^* = \frac{k_2}{2(k_1 + k_2)}, \quad \beta_0^{(0)} = -\frac{2(\lambda_1^* B_1 C_2 + \lambda_2^* B_2 C_1)}{C_1 C_2}. \quad (3.2)$$

Подставляя значение $\mu_1^*(\rho, \vartheta)$ и $\mu_2^*(\rho, \vartheta)$ из (2.7)-(2.9) в (3.1), получаем сингулярное интегро-дифференциальное уравнение с ядром Гильберта при граничных условиях

$$T_*(0) = T_*(2\pi), T_*'(0) = T_*'(2\pi). \quad (3.3)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} T_*'(\vartheta) d\vartheta = \frac{1}{\lambda_1^*} \left\{ -T_*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} H(\vartheta, \vartheta_0) T_*(\vartheta) d\vartheta \right\} + \frac{1}{\lambda_1^*} \Psi_0^{(2)}(\vartheta_0) - 2\pi T_*(0) \cos 2\vartheta_0, \quad (3.4)$$

где

$$H(\vartheta, \vartheta_0) = \lambda_2^* H_0^{(2)}(\vartheta, \vartheta_0) - \lambda_1^* H_0^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0) + \lambda_2^* H_0^{(3)}(\vartheta, \vartheta_0) - \lambda_1^* \frac{\partial \psi_1^{(1)}}{\partial \vartheta}, \quad (3.5)$$

$$H_0^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{d}{d\rho_0} \left\{ \int_0^1 [\rho^2 (l_0^{(1)} f_1(\rho, \vartheta) - \alpha R^2) + 4] G_1(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \rho d\rho \right\}_{\rho_0=1},$$

$$H_0^{(2)}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{d}{d\rho_0} \left\{ \int_1^\infty \left[\frac{\alpha_0^{(2)}}{\rho^2} \psi_2(\rho, \vartheta) + \frac{4 - (\varepsilon\rho)^2}{\rho^4} \right] G_2(\rho_0, \vartheta_0; \rho, \vartheta) \rho d\rho \right\}_{\rho_0=1}, \quad (3.6)$$

$$H_0^{(3)}(\vartheta, \vartheta_0) = \frac{d}{d\rho_0} \left\{ \int_1^\infty \frac{\partial^2 G_2}{\partial \vartheta^2} \frac{d\rho}{\rho^3} \right\}_{\rho_0=1},$$

$$\psi_1^{(1)}(\vartheta - \vartheta_0) = [\pi - (\vartheta - \vartheta_0)] \cos 2(\vartheta - \vartheta_0) + \sin(\vartheta - \vartheta_0) + \sin 2(\vartheta - \vartheta_0) \ln 2 [1 - \cos(\vartheta - \vartheta_0)], \quad (3.7)$$

$$\Psi_0^{(2)}(\vartheta_0) = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\lambda_2^* B_2}{C_2} H_0^{(2)}(\vartheta, \vartheta_0) - \frac{\lambda_1^* B_1}{C_1} H_0^{(1)}(\vartheta, \vartheta_0) \right\} d\vartheta + \sum_{m=1}^N \Psi_m \cos m\vartheta_0 + \frac{\lambda_2^* \alpha_1^{(2)} A_2 K_1(\varepsilon)}{\varepsilon C_2} - \frac{\lambda_1^* \alpha_1^{(1)} A_1}{2C_1} + \beta_0^{(0)}. \quad (3.8)$$

Согласно формуле обращения Гильберта [4,5], из (3.4) получаем

$$T_*'(\vartheta_0) = \frac{1}{2\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\vartheta - \vartheta_0}{2} \left[T_*(\vartheta) - \int_0^{2\pi} H(t, \vartheta) T_*(t) dt - \frac{1}{\lambda_1^*} \Psi_0^{(2)}(\vartheta) \right] d\vartheta + 2\pi T_*(0) \cos 2\vartheta_0 + c_1^* \quad (3.9)$$

Чтобы уравнение (3.4) имело решение, необходимо, чтобы

$$\int_0^{2\pi} \left[T_*(\vartheta_0) - \int_0^{2\pi} H(t, \vartheta_0) T_*(t) dt - \frac{1}{\lambda_1^*} \Psi_0^{(2)}(\vartheta_0) \right] d\vartheta_0 = 0. \quad (3.10)$$

Интегрируя по ϑ_0 обе части (3.9), получим

$$T_*(\vartheta_0) = \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln 2 \left| \sin \frac{t - \vartheta_0}{2} \right| - \int_0^{2\pi} H(t, y) \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy \right\} T_*(t) dt - \frac{1}{\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \Psi_0^{(2)}(y) \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy + c_1^* \vartheta_0 + c_2^*. \quad (3.11)$$

Удовлетворяя условиям $T_*(0) = T_*(2\pi)$, $T_*'(0) = T_*'(2\pi)$, получаем $c_1^* = 0$, а из (3.10)-(3.11) следует

$$c_2^* = \frac{1}{2\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \Psi_0^{(2)}(t) dt. \quad (3.12)$$

Введя обозначение в (3.11), имеем

$$T_*(\vartheta_0) + \int_0^{2\pi} K^*(t, \vartheta_0) T_*(t) dt = f^*(\vartheta_0), \quad (3.13)$$

где

$$K^*(t, \vartheta_0) = \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} H(t, y) \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy - \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \ln 2 \left| \sin \frac{t - \vartheta_0}{2} \right|, \quad (3.14)$$

$$f^*(\vartheta_0) = -\frac{1}{\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \Psi_0^{(2)}(y) \ln 2 \left| \sin \frac{y - \vartheta_0}{2} \right| dy + c_2^*,$$

– интегральное уравнение Фредгольма второго рода, которое можно решить, как в пункте 2, решение которого будет

$$T_*(\vartheta_0) = \frac{2\pi\lambda_2^* B_2}{C_2} + f^*(\vartheta_0) + \sum_{n=1}^N Y_n^{(0)} \cos n\vartheta_0, \quad (3.15)$$

$$Y_n^{(0)} = -\sum_{m=1}^N A_{mn}^{(0)} X_m^{(0)} (n = 1, 2, \dots, N),$$

где $X_m^{(0)}$ определяется из линейных систем алгебраических уравнений

$$X_m^{(0)} + \sum_{n=1}^N A_{mn}^{(0)} X_n^{(0)} = F_m^{(0)} (m = 1, 2, \dots, N),$$

$$\begin{aligned}
A_{mn}^{(0)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} K^*(t, x) \cos mt \cos nxdtdx = \\
&= \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} H(t, y) \ln 2 \left| \sin \frac{y-x}{2} \right| dy \right\} \cos mt \cos nxdtdx - \\
&- \frac{1}{\pi\lambda_1^*} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln 2 \left| \sin \frac{t-x}{2} \right| \cos mt \cos nxdtdx.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$F_m^{(0)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^*(x) \cos mx dx.$$

Заметим, что при вычислениях встречаются особые интегралы, которые следует понимать в смысле главного значения.

4. Всестороннее растяжение. Рассмотрим случай, когда на пластинку действует всесторонняя растягивающаяся нагрузка. Принимаем, что шайба в недеформированном состоянии имела радиус, $R + \varepsilon$, где R – радиус отверстия в пластинке до деформации. Считаем ε малой величиной того же порядка, что и допускаемые смещения. Предполагаем, что трение между шайбой и пластинкой отсутствует, так что взаимодействие этих тел сводится к нормальному давлению на обводы шайбы и отверстия. Ввиду полной симметрии давление будет постоянным вдоль контуров. Как известно [2], он равен

$$p_1 = \frac{4\varepsilon E_1 E_2}{2(1+\nu)R[E_1 + 2(1-2\nu)E_2]} = p_0, \tag{4.1}$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{2R(1+\varepsilon)[E_1 + 2(1-2\nu)E_2]}{4E_1 E_2} p_0. \tag{4.2}$$

Имея в виду, что пластинка и шайба более интенсивно нагреваются на линии раздела, принимаем, что интенсивность выделения тепла своё максимальное значение принимает при $r = R(\rho = 1)$. Тогда получим верхнюю оценку температуры.

Принимаем, что интенсивность выделения тепла явно не зависит от радиуса r и равна

$$q_j = \frac{\lambda \omega k_j p_0^2}{2} J_j''(T_j, \omega) \quad (j = 1, 2).$$

При таких предположениях уравнение теплопроводности (1.11) принимает вид

$$\frac{d^2 T_j}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dT_j}{d\rho} - \alpha R^2 (T_j - T_0) + 2R^2 \mu_0^{(j)} \frac{B_j + C_j T_j}{A_j^2} = 0 \quad (j = 1, 2) \tag{4.3}$$

при граничном условии (1.18).

В (4.3) сделаем замену (1.14). Получим

$$\frac{d^2 u_1}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_1}{d\rho} - \varepsilon_1^2 u_1 = -\alpha_1^{(1)}, \quad 0 \leq \rho < 1, \tag{4.4}$$

$$\frac{d^2 u_2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{du_2}{d\rho} - \varepsilon_2^2 u_2 = -\alpha_1^{(2)}, \quad 1 < \rho < \infty, \tag{4.5}$$

$$\varepsilon_j^2 = R^2 \left(\alpha - \frac{2C_j \mu_0^{(j)}}{A_j^2} \right), \alpha_1^{(j)} = \frac{\alpha R^2 (B_j + C_j T_0)}{A_j} \quad (j=1,2). \quad (4.6)$$

Общее решение однородных уравнений (4.4) и (4.5) будет

$$u_j(\rho) = A_0 I_0(\varepsilon_j \rho) + B_0 K_0(\varepsilon_j \rho) \quad (j=1,2), \quad (4.7)$$

где $I_0(x)$ – функция Бесселя мнимого аргумента, а $K_0(x)$ – функция Макдональда.

A_0 и B_0 – произвольные постоянные, определяющиеся из граничных условий. Т.к. в центре шайбы температура ограничена, то $B_0 = 0$

$$u_1(\rho) = A_0 I_0(\varepsilon_1 \rho), \quad 0 \leq \rho < 1. \quad (4.8)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ температура ограничена, при этом, $A_0 = 0$, тогда

$$u_2(\rho) = B_0 K_0(\varepsilon_2 \rho), \quad 1 < \rho < \infty. \quad (4.9)$$

Легко получаются общие решения неоднородных уравнений (4.4) и (4.5) соответственно

$$u_1(\rho) = A_0 I_0(\varepsilon_1 \rho) + \frac{\alpha_1^{(1)}}{\varepsilon_1^2}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad (4.10)$$

$$u_2(\rho) = B_0 K_0(\varepsilon_2 \rho) + \frac{\alpha_1^{(2)}}{\varepsilon_2^2}, \quad 1 < \rho < \infty.$$

После удовлетворения граничным условиям (1.18) определяются A_0, B_0 .

Из (4.10) следует

$$u_1(\rho) = \left(\frac{B_1 + C_1 T_*}{A_1} - \frac{\alpha_1^{(1)}}{\varepsilon_1^2} \right) \frac{I_0(\varepsilon_1 \rho)}{I_0(\varepsilon_1)} + \frac{\alpha_1^{(1)}}{\varepsilon_1^2}, \quad 0 \leq \rho < 1 \quad (4.11)$$

$$u_2(\rho) = \left(\frac{B_2 + C_2 T_*}{A_2} - \frac{\alpha_1^{(2)}}{\varepsilon_2^2} \right) \frac{K_0(\varepsilon_2 \rho)}{K_0(\varepsilon_2)} + \frac{\alpha_1^{(2)}}{\varepsilon_2^2}, \quad 1 < \rho < \infty. \quad (4.12)$$

Из второго условия (1.18) получаем уравнение для определения неизвестной температуры T_* ,

$$T_* = \frac{k_2 \varepsilon_1 M_0^{(2)} I_0(\varepsilon_1) K_1(\varepsilon_2) + k_1 \varepsilon_2 M_0^{(1)} I_1(\varepsilon_1) K_0(\varepsilon_2)}{\sqrt{\delta_1 \delta_2} [\varepsilon_1 k_1 I_1(\varepsilon_1) K_0(\varepsilon_2) + \varepsilon_2 k_2 I_0(\varepsilon_1) K_1(\varepsilon_2)]}, \quad (4.13)$$

$$M_0^{(j)} = \alpha T_0 + \frac{2\mu_0^{(j)} B_j}{A_j^2}, \quad \delta_j = \alpha - \frac{2\mu_0^{(j)} C_j}{A_j^2}, \quad \varepsilon_j^2 = R^2 \delta_j \quad (j=1,2).$$

Проведены вычисления в случае всестороннего растяжения при разных значениях R и p_0 . Материалом является полиэтилен.

При вычислении использованы следующие данные [1,3,6]:

$$A_1 = 2,5 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad A_2 = 3,4 \cdot 10^4 \text{ кг/см}^2, \quad B_1 = B_2 = 3,87 \cdot 10^2 \text{ кг/см}^2$$

$$C_1 = C_2 = 3,87 \text{ кг/см}^2 \cdot \text{град.}, \quad a_1 c_1 = a_2 c_2 = 0,28 \text{ ккал/м.час.град.},$$

$$\omega = 100 \text{ гу}, \quad k_1 = k_2 = 0,00234 \text{ ккал/кгм}, \quad T_0 = 20^\circ \text{C}, \quad \alpha = 0,71 \text{ см}^{-2}.$$

Введём безразмерные координаты

$$V_j^* = T^*/T_0, \quad V_j = T_j/T_0 \quad (j=1,2) \quad p_* = P_0/p_n, \quad p_n = 10^3 \text{ кг/см}^2, \quad \rho = r/R, \quad (4.14)$$

где T_* – температура на линии раздела двух тел, T_0 – температура окружающей среды, p_n – начальная нагрузка.

В табл. 1–3 приведены значения V_j^* , зависящие от различных значений R, p_*

$R=10\text{см}$

Таблица 1

p_*	1	2	3	4	5	6	7
V_1^*	1.248	1.324	1.450	1.628	1.863	2.171	2.592

$R=12\text{ см}$

Таблица 2

p_*	1	2	3	4	5	6	7
V_2^*	1.119	1.189	1.305	1.471	1.694	1.994	2.415

$R=14\text{ см}$

Таблица 3

p_*	1	2	3	4	5	6	7
V_3^*	1.029	1.094	1.204	1.362	1.578	1.875	2.3

Из табл. 1–3 видно, что при увеличении нагрузки увеличивается температура на линии раздела двух тел, а при увеличении радиуса отверстия температура уменьшается.

В табл. 4–5 приведены значения V_j , зависящие от ρ , при $R=10\text{ см}$, $p_*=3$

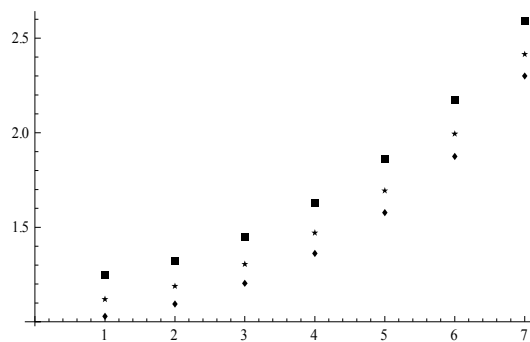
Таблица 4

ρ	0	0.2	0.4	0.6	0.8	0.7	0.9	1
V_1	1.007	1.007	1.011	1.026	1.049	1.11	1.211	1.45

Таблица 5

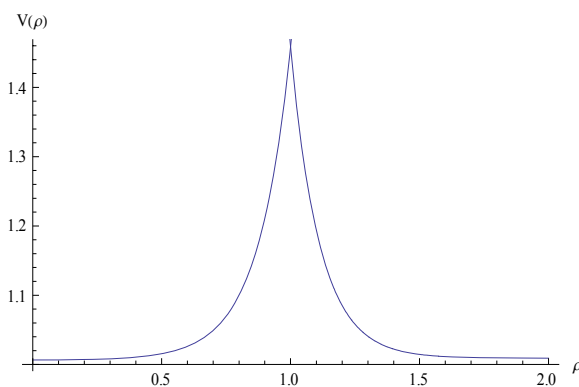
ρ	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2	2.2	2.4
V_2	1.451	1.085	1.022	1.011	1.01	1.009	1.009	1.009

Из табл. 4–5 видно, что в шайбе при увеличении радиуса с центра до линии раздела температура увеличивается, а в пластинке с удалением от обвода температура сильно уменьшается. Это объясняется тем, что вязкоупругие тела имеют низкую теплопроводность.



Фиг. 1

На фиг. 1 показан график изменения V_j^* в зависимости от R и p_* при R = 10, 12, 14 см.



Фиг. 2.

На фиг. 2. показан график изменения V_j в зависимости от ρ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М.: Изд. ИЛ, 1963. 535с.
2. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Физматгиз, 1966. 201с.
3. Вермишян Г.Б. Действие вибрационной нагрузки на пластинку с круговым отверстием из вязкоупругого материала. //Изв. АН СССР. МТТ.1983. N3. С.86–93.
4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Второе издание. М.: Наука, 1963. 62с.
5. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 117с.
6. Галин Л.А. О действии вибрационной нагрузки на полимерные материалы. //Изв. АН СССР. Механика. 1965. N6.

Сведения об авторе:

Вермишян Гарник Бахшович – канд. физ-мат.наук, доцент каф. высшей математики Ереванского Государственного Университета Архитектуры и Строительства
Тел.: дом (25-06-71), моб.: (095)45 62 65

Поступила в редакцию 13.04.2012