ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №3, 2012 Механика

УДК 539.3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ОБТЕКАЕМОЙ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ГАЗА, НАБЕГАЮЩИМ НА ЕЁ СВОБОДНЫЙ КРАЙ

Белубекян М.В., Мартиросян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость неконсервативных систем, прямоугольная упругая пластинка, дивергентная неустойчивость, сверхзвуковое обтекание
Key words: the stability of non-conservative systems**,** an elastic rectangular plate, the divergence instability, supersonic gas flow

Բելուբեկյան Մ.Վ., Մարտիրոսյան Ս.Ռ.
Գազի գերձայնային հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդրի մասին, երբ հոսքը սալի ազատ եզրին վրավազք է կատարում

Դիտարկված է գերձայնային գազի հոսքում ուղղանկյուն սալի կայունության մի խնդիր: Հոսքը ուղղված է ազատ եզրից դեպի կոշտ ամրակցված եզրը զուգահեռ մյուս երկու հոդակապորեն ամրակցված եզրերին: Ցույց է տված դիվերգենցիայի առաջացման հնարավորությունը:

Belubekyan M.V., Martirosyan S.R.
On the problem of the stability of a rectangular plate, when the supersonic gas flow is in a direction from the free edge to the clamped edge

The linear problem of the static stability of an elastic rectangular plate in a supersonic flow of gas is investigated. The flow is in a direction from the free edge to the clamped edge, and at the two edges parallel to the flow are hinge joint supported. Its solution shows that the divergence is possible.

Рассматривается задача устойчивости упругой прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа. Скорость потока направлена от свободного края пластинки к жёстко защемлённому краю параллельно двум остальным шарнирно закреплённым краям. Показана возможность возникновения как дивергенции, так и локализованной дивергенции.

В предлагаемой работе в линейной постановке исследуется задача устойчивости прямоугольной упругой пластинки, обтекаемой сверхзвуковым потоком газа, набегающим на её свободный край. Скорость обтекающего потока направлена от свободного края пластинки к жёстко защемлённому краю. А края пластинки, параллельные направлениию скорости потока, шарнирно опёрты. С помощью численно-аналитических методов анализа показана возможность возникновения, как дивергенции, так и локализованной дивергенции в окрестности свободного края пластинки.

Найдена критическая скорость потока газа в зависимости от параметров задачи, приводящая к дивергентной неустойчивости. Показана существенная зависимость критической скорости потока от коэффициента Пуассона и от относительной длины и ширины пластинки.

Установлено, что в случае, когда ширина пластинки превосходит её длину более чем в два раза, поведение прямоугольной пластинки в потоке газа аналогично поведению полубесконечной пластины–полосы: наблюдается явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки. Критическая скорость потока зависит от коэффициента Пуассона: она меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона. А в случае, когда отношение ширины пластинки к её длине порядка одной десятой и меньше, то поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа такое же, как и поведение обтекаемой удлинённой пластинки. При этом критическая скорость потока не зависит от коэффициента Пуассона.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямоугольную тонкую упругую пластинку, которая в декартовой системе координат $Oxyz$ занимает область $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $-h \le z \le h$. Декартова система координат $Oxyz$ выбирается так, что оси Ox и Oy лежат в плоскости невозмущённой пластинки, а ось Oz перпендикулярна к пластинке и направлена в сторону сверхзвукового потока газа, обтекающего пластинку с одной стороны в направлении оси Ox с невозмущённой скоростью V. Течение газа будем считать плоским и потенциальным. А, также, будем считать, что пластинка не подвержена действию усилий в срединной плоскости.

Пусть кромка $x = 0$ пластинки свободна, кромка $x = a$ жёстко защемлена, а кромки $y = 0$ и $y = b$ шарнирно закреплены.

Выясним условия, при которых наряду с невозмущённой формой равновесия (неизогнутая пластинка) возможна искривленная форма равновесия (изогнутая пластинка), когда изгиб пластинки обусловлен соответствующими аэродинамическими нагрузками.

В предположении справедливости гипотезы Кирхгофа и «поршневой теории» [1] дифференциальное уравнение изгиба пластинки описывается соотношением [2,3]

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) + a_0 \rho_0 V \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, w = w(x, y)\,. \tag{1.1}$$

Здесь $w = w(x, y)$ – прогиб точек срединной поверхности пластинки; ρ_0 – плотность невозмущённого потока газа, a_0 – скорость звука в невозмущённой газовой среде; D – цилиндрическая жёсткость пластинки на изгиб.

Граничные условия в принятых предположениях относительно способа закрепления кромок имеют вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 0\,, \quad x = 0\,; \tag{1.2}$$

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0\,, \quad x = a\,; \tag{1.3}$$

$$w = 0\,, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,, \quad y = 0 \text{ и } y = b\,; \tag{1.4}$$

где ν – коэффициент Пуассона.

Требуется найти значения критической скорости потока газа V_{cr}, при превышении которых возникает дивергентная неустойчивость: невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой, а становится устойчивой изогнутая форма. Иными словами, требуется определить значения параметра V, при которых возможны нетривиальные решения дифференциального уравнения (1.1), удовлетворяющие граничным условиям (1.2) – (1.4).

Для нахождения решения поставленной задачи устойчивости пластинки сведём её к задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения.

Общее решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2) – (1.4), будем искать в виде

$$w(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(\lambda_n p x)\cdot \sin(\lambda_n y)\,, \qquad \lambda_n = \pi n b^{-1}. \tag{1.5}$$

Подставляя выражение (1.5) в уравнение (1.1), получаем характеристическое уравнение

$$p^4 - 2p^2 + \alpha_n^3 p + 1 = 0\,,\ \ \alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\lambda_n^{-3}\,, \qquad \alpha_n^3 > 0\,. \tag{1.6}$$

Исследуем поведение корней уравнения (1.6) в зависимости от параметров задачи (1.1) – (1.4).

Перепишем характеристическое уравнение (1.6) в удобном для исследования виде

$$(p^2-1)^2 + \alpha_n^3 p = 0\,, \quad \alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\lambda_n^{-3}\,, \quad \alpha_n^3 > 0\,. \tag{1.7}$$

Очевидно, что характеристическое уравнение (1.7) имеет два отрицательных действительных корня: $p_1 < 0$, $p_2 > 0$ и пару комплексных сопряжённых корня $p_{3,4} = \alpha \pm i\beta$ с положительной вещественной частью $\alpha > 0$.

Найдём решение характеристического уравнения (1.6).

Нетрудно показать, что корни характеристического уравнения (1.7) определяются выражениями

$$p_{1,2} = -\frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{16} - q_1 + \frac{\alpha_n^3}{A}}\,, \quad p_1 < 0\,,\ \ p_2 > 0\,; \tag{1.8}$$

$$p_{3,4} = \frac{A}{4} \pm \sqrt{\frac{A^2}{16} - q_1 - \frac{\alpha_n^3}{A}}\,, \qquad p_{3,4} = \alpha \pm i\beta\,,\ \ \alpha > 0\,. \tag{1.9}$$

Здесь

$$A = 2\sqrt{2(1+q_1)}\,, \quad q_1 > 1\,; \qquad 10)$$

q_1 – единственный действительный корень кубического уравнения

$$q^3 + q^2 - q - 1 - \frac{\alpha_n^6}{8} = 0\,,\ \ \alpha_n^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}\lambda_n^{-3}\,. \tag{1.11}$$

В самом деле, характеристическое уравнение (1.7), являясь алгебраическим уравнением четвёртой степени, в соответствии с известным алгоритмом нахождения решения, предложенным Феррари [5], равносильно следующим двум квадратным уравнениям:

$$p^2 + 0.5\,Ap + (q_1 - \alpha_n^3 A^{-1}) = 0\,, \tag{1.12}$$

$$p^2 - 0.5\,Ap + (q_1 + \alpha_n^3 A^{-1}) = 0\,. \tag{1.13}$$

Здесь A определяется выражением (2.5), а q_1 – действительный корень кубического уравнения (1.11).

Из представления уравнения (1.11) в виде

$$8\cdot(1+q)^2(q-1) = \alpha_n^6 \tag{1.14}$$

и положительности её дискриминанта $Q = \alpha_n^6(\frac{1}{27} + \frac{\alpha_n^6}{256})$ следует, что кубическое уравнение (1.11) при условии $\alpha_n^3 > 0$ имеет один действительный корень q_1 и пару комплексных сопряжённых корня. При этом,

$$q_1 > 1\,. \tag{1.15}$$

А тогда, в соответствии с соотношениями (1.10) и (1.11), выражения (1.8) и (1.9) перепишутся в виде:

$$p_{1,2} = -\frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm \sqrt{\sqrt{q_1^2-1} - \frac{q_1-1}{2}}, \quad p_1 < 0, \quad p_2 < 0; \tag{1.16}$$

$$p_{3,4} = \frac{\sqrt{2(q_1+1)}}{2} \pm i\sqrt{\sqrt{q_1^2-1} + \frac{q_1-1}{2}}, \ \alpha_n^3 > 0.$$

Таким образом, характеристическое уравнение (1.6) имеет два отрицательных действительных корня p_1, p_2 и пару комплексных сопряжённых корня $p_{3,4}$ с положительной вещественной частью, удовлетворяющих квадратным уравнениям (1.12), (1.13) соответственно.

Отметим, что при отсутствии обтекания $\alpha_n^3 = 0$ ($V = 0$) из соотношений (1.7) и (1.14), очевидно, следует, что $q_1 = \pm 1$, $p_{1,2} = -1$, $p_{3,4} = 1$.

2. Общее решение (1.5) дифференциального уравнения (1.1), в соответствии с вышеизложенным, можно представить в виде

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{C_{n1}\exp(\lambda_n p_1 x) + C_{n2}\exp(\lambda_n p_2 x) + \tag{2.1}$$

$$+\exp(\lambda_n \alpha x)\cdot\left(C_{n3}\cos(\lambda_n\beta x) + C_{n4}\sin(\lambda_n\beta x)\right)\}\cdot\sin(\lambda_n y), \quad \lambda_n = \pi n b^{-1},$$

где $p_i, i = \overline{1,4}$ – корни характеристического уравнения (1.7), определяемые выражениями (1.16); C_{nk}, $k = \overline{1,4}$ – произвольные постоянные: $\sum_{k=1}^{4} C_{nk}^2 \neq 0$.

Подставляя выражение (2.1) в граничные условия (1.2) и (1.3), получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_{nk}. Далее, приравнивая нулю определитель полученной системы, получаем следующее дисперсионное уравнение относительно q – единственного действительного корня уравнения (1.14) :

$$F(q,\gamma,n,\nu) = \tag{2.2}$$

$$= B_1 B_2 \exp(-2\pi n\gamma\sqrt{2(q+1)})\left[2(q+1)(q+\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\right]+$$

$$+B_1 B_2\left[2(q+1)(q-\sqrt{q^2-1}-\nu)-(1-\nu)^2\right]+$$

$$+2B_2\exp(-\pi n\gamma\sqrt{2(q+1)})\Big[(q+1)\sqrt{2(q^2-1)}(\sqrt{q+1}+\sqrt{q-1})\,\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$+B_1(4q^2+2q-1+2q\nu+\nu^2)\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)\Big]\cos(\pi n\gamma B_2)+$$

$$+\exp(-\pi n\gamma\sqrt{2(q+1)})\Big[2B_1(q+1)\sqrt{2(q^2-1)}(\sqrt{q+1}-\sqrt{q-1})\,\mathrm{ch}(\pi n\gamma B_1)+$$

$$+(2q^2+3q-1-2(3q^2+3q-2)\nu+(3q+1)\nu^2)\,\mathrm{sh}(\pi n\gamma B_1)\Big]\sin(\pi n\gamma B_2)=0,$$

где

$$\gamma = ab^{-1}, \ \gamma \in (0,\infty); \tag{2.3}$$

$$B_1(q) = \sqrt{\sqrt{q^2-1} - 0.5(q-1)}, \ B_2(q) = \sqrt{\sqrt{q^2-1} + 0.5(q-1)}, \ q > 1. \tag{2.4}$$

Заметим, что здесь и далее в тексте в обозначении действительного корня уравнения (1.14) индекс “1” опущен.

Из выражений (2.4) следует, что

$$B_1(q) > 0,\quad B_2(q) > 0 \quad \text{при всех } q > 1. \tag{2.5}$$

Легко показать, что дисперсионное уравнение (2.2) в предельных случаях, для которых $\gamma \to 0$ ($b \to \infty$) и $\gamma \to \infty$ ($a \to \infty$), соответственно, приводится к виду

$$\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{3}{2}sa\right) + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}sa\right) = 0,\ \gamma \to 0; \tag{2.6}$$

$$2(q+1)\cdot(q - \sqrt{q^2-1} - \nu) - (1-\nu)^2 = 0,\ \gamma \to \infty; \tag{2.7}$$

где $s^3 = a_0\rho_0 V D^{-1}$ или, в соответствии с обозначениями (1.5), (1.6), (2.3) и соотношением (1.14),

$$sa = \pi n \gamma \sqrt{2q}. \tag{2.8}$$

Следует отметить, что дисперсионное уравнение (2.6) в точности такое же, как и дисперсионное уравнение, полученное при исследовании задачи статической устойчивости удлинённой консольной пластинки ($0 \le x \le a$, $-\infty \le y \le \infty$) в условии обтекания её сверхзвуковым потоком газа в направлении от свободного края $x = 0$ к защемлённому $x = a$ [2,4]. Точное решение уравнения (2.6)

$$V_{cr.\,div} \approx 6.33D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.7) в точности совпадает с дисперсионным уравнением, полученным в работе [6] при изучении явления локализованной дивергентной неустойчивости, возникающей в окрестности свободного края ($x = 0$) консольной упругой полубесконечной пластины–полосы ($0 \le x < \infty$, $0 \le y \le b$), обтекаемой сверхзвуковым потоком газа вдоль полубесконечных шарнирно закреплённых краёв в направлении от свободного края ($x = 0$) к защемлённому краю ($x = \infty$). При этом, критическая скорость потока $V_{cr\,div}$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν. В табл. 1 приведены для нескольких значений коэффициента Пуассона ν соответствующие значения критической скорости потока $V_{cr.div}$.

Таблица 1

ν	0	0.125	0.25	0.375	0.5
$V_{cr.div}\cdot(a_0\rho_0 b^3)D^{-1}$	2453.012	537.191	173.371	120.741	77.398

В соответствии с обозначениями (1.5), (1.6) и соотношением (1.14), значение критической скорости потока, приводящее к дивергентной неустойчивости, определяется выражением

$$V_{cr.\,div} = 2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3 n^3 D\left(a_0\rho_0 b^3\right)^{-1}, \tag{2.10}$$

или, учитывая обозначение (2.3),

$$V_{cr.div} = 2\sqrt{2(q-1)}\cdot(q+1)\cdot\pi^3 n^3\gamma^3 D\left(a_0\rho_0 a^3\right)^{-1}. \tag{2.11}$$

Отсюда очевидно, что критическая скорость дивергенции существует только в том случае, если $q > 1$, q – действительный корень кубического уравнения (1.14).

Таким образом, анализ устойчивости плоской формы пластинки в потенциальном сверхзвуковом потоке сводится к исследованию уравнения (2.2).

3. С помощью численных методов анализа найдены первые корни q^* уравнения (2.2), соответствующие различным значениям коэффициента Пуассона ν и параметра $\gamma \in (0, \infty)$, определяемого выражением (2.3). Подставляя полученные значения $q = q^*$ в соотношения (2.10) или (2.11), получаем соответствующие значения критической скорости потока $V_{cr\,div}$, приводящие к дивергентной неустойчивости: при значениях скорости потока $V \geq V_{cr\,div}$ невозмущённая форма равновесия пластинки перестаёт быть устойчивой. Некоторые результаты расчётов – значения $V_{cr\,div} \cdot D^{-1}\left(a_0 \rho_0 a^3\right)$, соответствующие различным значениям ν и γ, представлены в табл. 2.

Отметим, что для всех ν и γ наименьшее значение скорости потока достигается при значении $n = 1$.

В результате расчёта было установлено, что при значениях $\gamma \succ 0.01$ критическая скорость $V_{cr\,div}$ зависит от величины коэффициента Пуассона ν и отношения сторон $\gamma = ab^{-1}$ прямоугольника. Для всех $\gamma \succ 0.01$ критическая скорость $V_{cr\,div}$ меньше в пластинах из материалов с большим коэффициентом Пуассона ν, а с возрастанием γ значение критической скорости растёт (табл. 2).

Таблица 2

m \ ν	0.125	0.25	0.375	0.5
0.01	6.328	6.328	6.328	6.328
0.10	6.812	6.673	6.577	6.467
0.30	10.260	10.076	9.213	8.286
0.50	20.421	19.058	16.048	14.081
0.80	71.329	58.809	47.869	36.614
1.00	193.487	128.501	95.967	71.519
1.20	469.173	278.718	170.116	128.388
1.50	1035.455	583.041	402.272	254.948
1.80	1854.292	1007.488	695.125	440.546
2.00	2598.091	1382.022	953.537	604.313

В случае достаточно длинных пластинок $\left(\gamma = ab^{-1} \leq 0.01\right)$ значение $q = q^* \gg 1$ не зависит от коэффициента Пуассона ν. А соответствующее значение критической скорости $V_{cr\,div}$ не зависит как от коэффициента Пуассона ν, так и от отношения сторон γ. При этом, критическая скорость равна

$$V_{cr.\,div} \approx 6.329 \cdot D \cdot \left(a_0 \rho_0 a^3\right)^{-1}, \qquad \gamma \leq 0.01. \tag{3.1}$$

Из сопоставления значений (2.9) и (3.1) очевидно, что при всех значениях $\gamma \leq 0.01$ критическая скорость потока, при которой прямоугольная пластинка теряет статическую устойчивость, с точностью $\chi = 0.001$ равно значению критической скорости (2.9). Это означает, что при значениях $\gamma \leq 0.01$ поведение обтекаемой в сверхзвуковом потоке газа прямоугольной пластинки примерно такое же, как и у удлинённой пластинки $\gamma \to 0$ ($b \to \infty$): в обоих случаях пластинки теряют статическую устойчивость при скоростях потока, превышающих значение $V_{cr.\,div} \approx 6.33D(a_0\rho_0 a^3)^{-1}$.

Начиная с $\gamma = 2$, значения критических скоростей потока, найденные в данной работе для различных значений коэффициента Пуассона ν (табл.2), пересчитанные по формуле (2.10), примерно равны значениям критических скоростей потока, полученных в работе [6] (табл.1). В соответствии с соотношением (2.7), очевидно, что по мере возрастания γ, значения критических скоростей потока с большей точностью равны предельным значениям, приведённым в табл.1. Тем самым, начиная с $\gamma = 2$, прямоугольная пластинка в потоке газа теряет статическую устойчивость при скоростях потока, равных критическим скоростям дивергенции полубесконечной пластины–полосы (табл.1).

Таким образом, в случае, когда ширина пластинки превосходит её длину более чем в два раза, поведение прямоугольной пластинки в потоке газа аналогично поведению полубесконечной пластины–полосы: критические скорости потока, приводящие к статической потере устойчивости, равны и зависят от коэффициента Пуассона. Критическая скорость потока меньше в пластинках из материалов с большим коэффициентом Пуассона. В этом случае наблюдается явление локализованной дивергентной неустойчивости в окрестности свободного края пластинки. А в случае, когда отношение ширины пластинки к её длине порядка одной десятой и меньше, то поведение прямоугольной пластинки в сверхзвуковом потоке газа такое же, как и поведение обтекаемой удлинённой пластинки. При этом, значение критической скорости потока не зависит от коэффициента Пуассона.

Работа выполнена в рамках the European Union Seventh Framework Programme ([FP7/2007-2013] under grant agreement n^0 269160).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. // ПММ. 1956. Т.20. № 6. С.733-755.
2. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Наука, 1961. 329с.
3. Мовчан А.А. О колебаниях пластинки, движущейся в газе. // Изв. АН СССР. ПММ. 1956. Т.20. С.211-212.
4. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1987. 352с.
5. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1978. 832с.
6. Belubekyan M.V., Martirosyan S.R. The Localized Instability of the Elastic Plate-Strip Streamlined by Supersonic Gas Flow// Изв. НАН Армении. Механика. 2012. Т.65. №1. С.29-34.

Сведения об авторах:

Белубекян Мелс Вагаршакович – кандидат физ-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт механики НАН Армении, Ереван, Армения (+374 10) 521503, (+374 10) 580096, **E-mail:** mbelubekyan@yahoo.com

Мартиросян Стелла Размиковна – кандидат физ-мат. наук, старший научный сотрудник, Институт механики НАН Армении,

Ереван, Армения (+374 10) 524890, **E-mail:** mechinsstella@mail.ru

Поступила в редакцию 20.06.2012