ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №3, 2012 Механика

УДК 539.3

ТЕОРИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ ОРТОТРОПНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ ПЛАСТИН

Айрапетян Г.С., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярный, ортотропный, упругий, тонкий, пластинка, теория
Key words: mikropolar, elastic, plate, thin, orthotropic, theory

Հայրապետյան Գ. Ս., Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ սալերի տեսությունը

Աշխատանքում ընդունվում են վարկածներ,որոնք ունեն ասիմպտոտիկ հիմնավորում և կառուցվում է միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ սալերի ծռման ստատիկական դեֆորմացիայի ընդհանուր տեսությունը:Խնդիրը ուսումնասիրվում է նաև էներգետիկ տեսակետից և կառուցվում՝ միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ սալերի ծռման ստատիկական դեֆորմացիայի ընդհանուր վարիացիոն հավասարումը,որից կարելի է ստանալ նաև մասնավոր բնույթի վարիացիոն հավասարումներ:

Hayrapetyan G.S., Sargsyan S.H.
Theory of micropolar orthotropic elastic thin plates

In present paper asymptotically confirmed hypotheses are formulated and general theory of bending static deformation of micropolar orthotropic elastic thin plates is constructed. The problem is also studied by energetic approach, general variation equation of bending deformation of micropolar orthotropic elastic thin plates is obtained. On the basis of this general equation variation equations of private nature are obtained.

В работе принимаются гипотезы, которые имеют асимптотическое обоснование и построена общая теория статической деформации изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. Задача изучается также с энергетической точки зрения и построено общее вариационное уравнение статической деформации изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких пластин, из которого можно получить также частные типы вариационных уравнений.

Введение. Микрополярная теория упругости является одной из современных направлений в структурной механике твёрдых деформируемых тел. Обзор исследований о построении прикладных теорий микрополярных упругих тонких пластин и оболочек выполнены в работах [1,2].

Основная проблема в теории микрополярных упругих тонких пластин и оболочек заключается в приближённом, но адекватном сведении трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерным. Для достижения этой цели уместно использование качественных сторон результата асимптотического метода интегрирования трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки или оболочки.

В работах [3-6], используя качественные стороны исходного приближения асимптотического метода интегрирования трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки или оболочки, сформулированы гипотезы, на основе которых построены общие прикладные теории микрополярных упругих изотропных тонких пластин и оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, со стеснённым вращением.

В данной работе развивается этот подход, используя результат асимптотического метода интегрирования трёхмерной граничной задачи микрополярной теории упругости в области тонкой пластинки для ортотропного материала [7], утверждаются те же гипотезы, принятые в работе [4] для изотропных материалов и на этой основе строится общая прикладная теория микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. Для этой теории построен общий вариационный принцип и получена формула энергетического баланса.

1.Постановка задачи. Рассмотрим ортотропную пластинку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное упругое микрополярное тело. Будем исходить из основных уравнений пространственной статической задачи линейной микрополярной теории упругости для ортотропного материала с независимыми полями перемещений и вращений:

уравнения равновесия [8]

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{31}}{\partial x_3}=0 \qquad &&\frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{31}}{\partial x_3}+\sigma_{23}-\sigma_{32}=0\\
&\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{32}}{\partial x_3}=0 &&\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{32}}{\partial x_3}+\sigma_{31}-\sigma_{13}=0 \qquad (1.1)\\
&\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial x_3}=0 &&\frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\mu_{33}}{\partial x_3}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=0
\end{aligned}$$

физические соотношения [9]

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11}=A_{11}\varepsilon_{11}+A_{12}\varepsilon_{22}+A_{13}\varepsilon_{33} \qquad &&\mu_{11}=B_{11}\chi_{11}+B_{12}\chi_{22}+B_{13}\chi_{33}\\
&\sigma_{22}=A_{12}\varepsilon_{11}+A_{22}\varepsilon_{22}+A_{23}\varepsilon_{33} &&\mu_{22}=B_{12}\chi_{11}+B_{22}\chi_{22}+B_{23}\chi_{33}\\
&\sigma_{33}=A_{13}\varepsilon_{11}+A_{23}\varepsilon_{22}+A_{33}\varepsilon_{33} &&\mu_{33}=B_{13}\chi_{11}+B_{23}\chi_{22}+B_{33}\chi_{33}\\
&\sigma_{23}=A_{44}\varepsilon_{23}+A_{45}\varepsilon_{32} &&\mu_{23}=B_{44}\chi_{23}+B_{45}\chi_{32}\\
&\sigma_{32}=A_{45}\varepsilon_{23}+A_{55}\varepsilon_{32} &&\mu_{32}=B_{45}\chi_{23}+B_{55}\chi_{32} \qquad (1.2)\\
&\sigma_{31}=A_{55}\varepsilon_{31}+A_{56}\varepsilon_{13} &&\mu_{31}=B_{55}\chi_{31}+B_{56}\chi_{13}\\
&\sigma_{13}=A_{56}\varepsilon_{31}+A_{66}\varepsilon_{13} &&\mu_{13}=B_{56}\chi_{31}+B_{66}\chi_{13}\\
&\sigma_{12}=A_{77}\varepsilon_{12}+A_{78}\varepsilon_{21} &&\mu_{12}=B_{77}\chi_{12}+B_{78}\chi_{21}\\
&\sigma_{21}=A_{78}\varepsilon_{12}+A_{88}\varepsilon_{21} &&\mu_{21}=B_{78}\chi_{12}+B_{88}\chi_{21}
\end{aligned}$$

или в обратной форме

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11} = a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} + a_{13}\sigma_{33} && \chi_{11} = b_{11}\mu_{11} + b_{12}\mu_{22} + b_{13}\mu_{33} \\
&\gamma_{22} = a_{12}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} + a_{23}\sigma_{33} && \chi_{22} = b_{12}\mu_{11} + b_{22}\mu_{22} + b_{23}\mu_{33} \\
&\gamma_{33} = a_{13}\sigma_{11} + a_{23}\sigma_{22} + a_{33}\sigma_{33} && \chi_{33} = b_{13}\mu_{11} + b_{23}\mu_{22} + b_{33}\mu_{33} \\
&\gamma_{23} = a_{44}\sigma_{23} + a_{45}\sigma_{32} && \chi_{23} = b_{44}\mu_{23} + b_{45}\mu_{32} \\
&\gamma_{32} = a_{45}\sigma_{23} + a_{55}\sigma_{32} && \chi_{32} = b_{45}\mu_{23} + b_{55}\mu_{32} \\
&\gamma_{31} = \tilde{a}_{55}\sigma_{31} + a_{56}\sigma_{13} && \chi_{31} = \tilde{b}_{55}\mu_{31} + b_{56}\mu_{13} \\
&\gamma_{13} = a_{56}\sigma_{31} + a_{66}\sigma_{13} && \chi_{13} = b_{56}\mu_{31} + b_{66}\mu_{13} \\
&\gamma_{12} = a_{77}\sigma_{12} + a_{78}\sigma_{21} && \chi_{12} = b_{77}\mu_{12} + b_{78}\mu_{21} \\
&\gamma_{21} = a_{78}\sigma_{12} + a_{88}\sigma_{21} && \chi_{21} = b_{78}\mu_{12} + b_{88}\mu_{21}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

геометрические соотношения [8]

$$\begin{aligned}
&\gamma_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} \quad \gamma_{22} = \frac{\partial U_2}{\partial x_2} \quad \gamma_{33} = \frac{\partial U_3}{\partial x_3} && \chi_{11} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} \quad \chi_{22} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_2} \quad \chi_{33} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_3} \\
&\gamma_{12} = \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \omega_3 \quad \gamma_{21} = \frac{\partial U_1}{\partial x_2} + \omega_3 && \chi_{12} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_1} \quad \chi_{21} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_2} \\
&\gamma_{23} = \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \omega_1 \quad \gamma_{32} = \frac{\partial U_2}{\partial x_3} + \omega_1 && \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} \quad \chi_{32} = \frac{\partial \omega_2}{\partial x_3} \\
&\gamma_{31} = \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \omega_2 \quad \gamma_{13} = \frac{\partial U_3}{\partial x_1} + \omega_2 && \chi_{31} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x_3} \quad \chi_{13} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь $\sigma_{nm}, \mu_{nm}, \gamma_{nm}, \chi_{nm}$ – компоненты несимметричных тензоров силового и моментного напряжений, деформаций и изгибов – кручений; U_n, ω_n – компоненты векторов перемещения и независимого поворота; $-h \le x_3 \le h$; $\hat{A}, \hat{B}$ – матрицы жёсткостей, $\hat{a}, \hat{b}$ – матрицы податливостей микрополярного ортотропного упругого тела.

Если рассматривать задачу изгиба микрополярных упругих пластин (т.е. антисимметричную по x_3 задачу), то для граничных условий на лицевых плоскостях пластинки $x_3 = \pm h$ будем считать заданными силовые и моментные напряжения следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{31} = \frac{p_1^+ - p_1^-}{2} \quad \sigma_{32} = \frac{p_2^+ - p_2^-}{2} \quad \sigma_{33} = \pm\frac{p_3^+ + p_3^-}{2} \\
&\mu_{31} = \pm\frac{m_1^+ + m_1^-}{2} \quad \mu_{32} = \pm\frac{m_2^+ + m_2^-}{2} \quad \mu_{33} = \frac{m_3^+ - m_3^-}{2}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Граничные условия на боковой поверхности пластинки $\sum$, в зависимости от способа приложения внешней нагрузки или закрепления её точек, записываются в силовых и моментных напряжениях, перемещениях и поворотах или в смешанном виде.

Отметим, что в случае

$$a_{11}=a_{22}=a_{33}=\frac{1}{E}$$
$$a_{12}=a_{13}=a_{23}=-\frac{\nu}{E} \qquad (1.6)$$
$$a_{45}=a_{56}=a_{78}=-\frac{\mu-\alpha}{4\mu\alpha}$$
$$a_{44}=a_{55}=\tilde{a}_{55}=a_{66}=a_{77}=a_{88}=\frac{\mu+\alpha}{4\mu\alpha}$$
$$b_{11}=b_{22}=b_{33}=\frac{\beta+\gamma}{\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}$$
$$b_{12}=b_{13}=b_{23}=-\frac{\beta}{2\gamma\left(3\beta+2\gamma\right)}$$
$$b_{45}=b_{56}=b_{78}=-\frac{\gamma-\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}$$
$$b_{44}=b_{55}=\tilde{b}_{55}=b_{66}=b_{77}=b_{88}=\frac{\gamma+\varepsilon}{4\gamma\varepsilon}$$

вместо (1.3) получим физические соотношения микрополярного изотропного материала, а при

$$a_{45}=a_{56}=a_{78}=0,\quad a_{44}=a_{55},\quad \tilde{a}_{55}=a_{66},\quad a_{77}=a_{88} \qquad (1.7)$$

получим физические соотношения классического ортотропного материала.

Уравнение баланса энергии выражается формулой:

$$\iint\limits_{S}\int\limits_{-h}^{h}W\,ds\,dx_3=\frac{1}{2}\Bigg\{\iint\limits_{S^+=S}\Big[\left(p_1^+U_1+p_2^+U_2+p_3^+U_3\right)+\left(m_1^+\omega_1+m_2^+\omega_2+m_3^+\omega_3\right)\Big]_{x_3=h}ds+$$
$$+\iint\limits_{S^-=S}\Big[\left(p_1^-U_1+p_2^-U_2+p_3^-U_3\right)+\left(m_1^-\omega_1+m_2^-\omega_2+m_3^-\omega_3\right)\Big]_{x_3=-h}ds+ \qquad (1.8)$$
$$+\int\limits_{l}\left\{\int\limits_{-h}^{h}\Big[\left(p_1^0U_1+p_2^0U_2+p_3^0U_3\right)+\left(m_1^0\omega_1+m_2^0\omega_2+m_3^0\omega_3\right)\Big]dx_3\right\}dl\Bigg\}$$

здесь

$$W=\frac{1}{2}\Big[A_{11}\gamma_{11}^2+A_{22}\gamma_{22}^2+A_{33}\gamma_{33}^2+2A_{12}\gamma_{11}\gamma_{22}+2A_{13}\gamma_{11}\gamma_{33}+2A_{23}\gamma_{22}\gamma_{33}+A_{44}\gamma_{23}^2+$$
$$+A_{55}\gamma_{32}^2+2A_{45}\gamma_{23}\gamma_{32}+A_{55}\gamma_{31}^2+A_{66}\gamma_{13}^2+2A_{56}\gamma_{31}\gamma_{13}+A_{77}\gamma_{12}^2+A_{88}\gamma_{21}^2+2A_{78}\gamma_{12}\gamma_{21}+$$
$$+B_{11}\chi_{11}^2+B_{22}\chi_{22}^2+B_{33}\chi_{33}^2+2B_{12}\chi_{11}\gamma_{22}+2B_{13}\chi_{11}\chi_{33}+2B_{23}\chi_{22}\chi_{33}+B_{44}\chi_{23}^2+ \qquad (1.9)$$
$$+B_{55}\chi_{32}^2+2B_{45}\chi_{23}\chi_{32}+B_{55}\chi_{31}^2+B_{66}\chi_{13}^2+2B_{56}\chi_{31}\chi_{13}+B_{77}\chi_{12}^2+B_{88}\chi_{21}^2+2B_{78}\chi_{12}\chi_{21}\Big]$$

представляет собой объёмную плотность потенциальной энергии деформации:

$$\sigma_{11}l+\sigma_{21}m=p_1^0 \qquad \sigma_{12}l+\sigma_{22}m=p_2^0 \qquad \sigma_{13}l+\sigma_{23}m=p_3^0$$
$$\mu_{11}l+\mu_{21}m=m_1^0 \quad \mu_{12}l+\mu_{22}m=m_2^0 \qquad \mu_{13}l+\mu_{23}m=m_3^0 \qquad (1.10)$$

где l, m – компоненты единичной нормали к боковой поверхности пластинки Σ.

Общий вариационный функционал (вариационный функционал типа Рейсснера) имеет вид:

$$\mathrm{I}=\iint\limits_{S}\int\limits_{-h}^{h}\left\langle W-\left\{\sigma_{11}\left(\gamma_{11}-\frac{\partial U_1}{\partial x_1}\right)+\sigma_{22}\left(\gamma_{22}-\frac{\partial U_2}{\partial x_2}\right)+\sigma_{33}\left(\gamma_{33}-\frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right)+\right.\right.$$

$$+\sigma_{12}\left[\gamma_{12}-\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\omega_3\right)\right]+\sigma_{12}\left[\gamma_{12}-\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1}-\omega_3\right)\right]+\sigma_{21}\left[\gamma_{21}-\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\omega_3\right)\right]+$$

$$+\sigma_{13}\left[\gamma_{13}-\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_1}+\omega_2\right)\right]+\sigma_{31}\left[\gamma_{31}-\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3}-\omega_2\right)\right]+\sigma_{23}\left[\gamma_{23}-\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2}-\omega_1\right)\right]+$$

$$+\sigma_{32}\left[\gamma_{32}-\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_3}+\omega_1\right)\right]+\mu_{11}\left(\chi_{11}-\frac{\partial \omega_1}{\partial x_1}\right)+\mu_{22}\left(\chi_{22}-\frac{\partial \omega_2}{\partial x_2}\right)+\mu_{33}\left(\chi_{33}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x_3}\right)+$$

$$+\mu_{12}\left(\chi_{12}-\frac{\partial \omega_2}{\partial x_1}\right)+\mu_{21}\left(\chi_{21}-\frac{\partial \omega_1}{\partial x_2}\right)+\mu_{13}\left(\chi_{13}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x_1}\right)+\mu_{23}\left(\chi_{23}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\right)+$$

$$\left.\left.+\mu_{23}\left(\chi_{23}-\frac{\partial \omega_3}{\partial x_2}\right)+\mu_{31}\left(\chi_{31}-\frac{\partial \omega_1}{\partial x_3}\right)+\mu_{32}\left(\chi_{32}-\frac{\partial \omega_2}{\partial x_3}\right)\right\}\right\rangle ds dx_3- \tag{1.11}$$

$$-\iint\limits_{S^+=S}\left[\left(p_1^+U_1+p_2^+U_2+p_3^+U_3\right)+\left(m_1^+\omega_1+m_2^+\omega_2+m_3^+\omega_3\right)\right]_{x_3=h} ds-$$

$$-\iint\limits_{S^-=S}\left[\left(p_1^-U_1+p_2^-U_2+p_3^-U_3\right)+\left(m_1^-\omega_1+m_2^-\omega_2+m_3^-\omega_3\right)\right]_{x_3=-h} ds-$$

$$-\int\limits_{l}\left\{\int\limits_{-h}^{h}\left[\left(p_1^0U_1+p_2^0U_2+p_3^0U_3\right)+\left(m_1^0\omega_1+m_2^0\omega_2+m_3^0\omega_3\right)\right]dx_3\right\}dl$$

Варьируя функционал (1.11) по всем функциональным аргументам и интегрируя по частям, получим все основные уравнения и граничные условия трёхмерной теории упругости микрополярного ортотропного тела ((1.1)-(1.4), (1.10)).

2.Теория микрополярных ортотропных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений.

Теперь будем излагать основной принцип сведения трёхмерных уравнений теории микрополярной упругости для ортотропного материала к общим двумерным уравнениям тонких пластин. Этот принцип заключается в следующем. Качественные результаты [7] исходного приближения асимптотического метода интегрирования поставленной трёхмерной краевой задачи (1.1)-(1.4) позволяют в случае тонких пластин сформулировать достаточно общие гипотезы, которые идентичны гипотезам в случае изотропного микрополярного материала [4], при помощи которых осуществляется сведение трёхмерной проблемы к общей прикладной модели микрополярных ортотропных упругих тонких пластин.

Принимаемые ниже гипотезы по содержанию можно рассматривать как кинематические и статические.

Кинематическая гипотеза характеризует изменение компонентов вектора перемещения и вектора независимого поворота по координате x_3 вдоль нормали к срединной плоскости пластинки.

К статическим гипотезам, главным образом, относятся гипотезы, определяющие изменение по толщине пластинки касательных силовых напряжений σ_{3i}, нормального моментного напряжения μ_{33} и моментных напряжений $\mu_{i3}(i=1,2)$.

В соответствии с кинематической формулировкой вводятся предположения о линейном распределении компонентов векторов перемещения и независимого поворота по координате x_3 следующего характера:

$$U_i = x_3\psi_i(x_1,x_2) \qquad U_3 = w(x_1,x_2) \qquad i=(1,2) \tag{2.1}$$

$$\omega_i = \Omega_i(x_1,x_2) \qquad \omega_3 = x_3\iota(x_1,x_2) \qquad i=(1,2) \tag{2.2}$$

Кинематическая гипотеза (2.1) относительно перемещений представляет собой известные гипотезы Тимошенко в классической теории упругих пластин [10-12]. По этой гипотезе нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к срединной плоскости пластинки, остаётся после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной срединной плоскости, свободно вращается под некоторым углом, не изменяя при этом своей длины.

Кинематическая гипотеза (2.1), (2.2), в целом, в работах [10-12] названа обобщённой гипотезой Тимошенко в микрополярной теории пластин.

К статическим относятся следующие гипотезы:

1)силовым напряжением σ_{33} в обобщённом законе Гука (1.3) для γ_{11},γ_{22} можем пренебрегать относительно силовых напряжений σ_{11},σ_{22};

2) для определения деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, для силовых напряжений σ_{3i} и моментного напряжения μ_{33} сначала примем

$$\sigma_{3i} = \overset{0}{\sigma}_{3i}(x_1,x_2) \quad i=(1,2) \quad \mu_{33} = \overset{0}{\mu}_{33}(x_1,x_2) \ . \tag{2.3}$$

После определения указанных величин значения σ_{3i} и μ_{33} окончательно определим, соответственно, как сумму значения (2.3) и результата интегрирования либо первых двух, либо шестого из (1.1) уравнений равновесия, для которых потребуем условия, чтобы усреднённые по толщине пластинки величины были равны нулю;

3) в обобщённом законе Гука (1.3) для χ_{i3} $(i=1,2)$, моментным напряжением μ_{3i} можно пренебрегать относительно моментного напряжения μ_{i3} (i=1,2) .

Отметим, что силовая часть перечисленных гипотез (имеем в виду гипотезу 2)) отличается от силовой гипотезы теории Тимошенко в классическом случае [10-12]. Забегая вперёд, отметим, что двумерная теория, построенная на основе представленной выше кинематической гипотезы и силовых гипотез 1)-2) (так и её классический аналог) будет асимптотически точной теорией.

На основе принятой кинематической гипотезы (2.1),(2.2), из формул (1.2), для деформаций, изгибов-кручений получим:

$$\gamma_{11} = x_3K_{11}(x_1,x_2),\ \gamma_{12} = x_3K_{12}(x_1,x_2),\ \gamma_{31} = \Gamma_{31}(x_1,x_2),\ \gamma_{13} = \Gamma_{13}(x_1,x_2),$$
$$\gamma_{22} = x_3K_{22}(x_1,x_2),\ \gamma_{21} = x_3K_{21}(x_1,x_2),\ \gamma_{32} = \Gamma_{32}(x_1,x_2),\ \gamma_{23} = \Gamma_{23}(x_1,x_2), \tag{2.4}$$
$$\gamma_{33} = 0,$$

$$\chi_{11} = k_{11}(x_1,x_2),\quad \chi_{12} = k_{12}(x_1,x_2),\quad \chi_{31} = 0,\quad \chi_{13} = x_3l_{13}(x_1,x_2),$$
$$\chi_{22} = k_{22}(x_1,x_2),\quad \chi_{21} = k_{21}(x_1,x_2),\quad \chi_{32} = 0,\quad \chi_{23} = x_3l_{23}(x_1,x_2), \tag{2.5}$$

$\chi_{33} = k_{33}(x_1, x_2)$,

где приняты следующие обозначения:

$$K_{11} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, K_{22} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, K_{12} = \frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \iota, K_{21} = \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} + \iota,$$

$$\Gamma_{31} = \psi_1 - \Omega_2, \Gamma_{32} = \psi_2 + \Omega_1, \Gamma_{13} = \frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2, \Gamma_{23} = \frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1, \quad (2.6)$$

$$k_{11} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1}, k_{22} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2}, k_{12} = \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1}, k_{21} = \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}, k_{33} = \iota, \quad (2.7)$$

$$l_{13} = \frac{\partial \iota}{\partial x_1}, l_{23} = \frac{\partial \iota}{\partial x_2}$$

Далее используя принятые статические гипотезы 1) и 2), подставляя (2.4) и (2.5) в выражения обобщённого закона Гука (1.3), для силовых и моментных напряжений будем иметь:

$$\sigma_{11} = \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \left(K_{11} - \frac{a_{12}}{a_{22}} K_{22} \right) \quad , \quad \sigma_{22} = \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}^2} x_3 \left(K_{22} - \frac{a_{12}}{a_{11}} K_{11} \right)$$

$$\sigma_{12} = \left(\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{12} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{21} \right) x_3 ,$$

$$\sigma_{21} = \left(\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{21} - \frac{a_{78}}{a_{77}a_{88} - a_{78}^2} K_{12} \right) x_3 \quad (2.8)$$

$$\sigma_{13} = \frac{\tilde{a}_{55}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{13} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{31} ,$$

$$\sigma_{23} = \frac{a_{55}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{23} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{32}$$

$$\overset{0}{\sigma}_{32} = \frac{a_{44}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{32} - \frac{a_{45}}{a_{44}a_{55} - a_{45}^2} \Gamma_{23} ,$$

$$\overset{0}{\sigma}_{31} = \frac{a_{66}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{31} - \frac{a_{56}}{\tilde{a}_{55}a_{66} - a_{56}^2} \Gamma_{13}$$

$$\sigma_{31} = \overset{0}{\sigma}_{31}(x_1; x_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{21}}{\partial x_2} \right),$$

$$\sigma_{32} = \overset{0}{\sigma}_{32}(x_1; x_2) + \left(\frac{h^2}{6} - \frac{x_3^2}{2} \right) \left(\frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \overset{1}{\sigma}_{12}}{\partial x_1} \right), \sigma_{33} = -x_3 \left(\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} \right)$$

$$\mu_{11} = \frac{\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b} \mathrm{k}_{11} - \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{23} & b_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_b} \mathrm{k}_{22} + \frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}}{\Delta_b} \mathrm{k}_{33} ,$$

$$\mu_{22}=\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\b_{13}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{22}-\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{23}\\b_{13}&b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{11}-\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{13}\\b_{12}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{33},$$

$$\overset{0}{\mu}_{33}=\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{12}&b_{22}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{33}+\frac{\begin{vmatrix}b_{12}&b_{22}\\b_{13}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{11}-\frac{\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{13}&b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}k_{22},\qquad \Delta_b=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}\\b_{12}&b_{22}&b_{23}\\b_{13}&b_{23}&b_{33}\end{vmatrix}$$

$$\mu_{12}=\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{12}-\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{21},\tag{2.9}$$

$$\mu_{21}=\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{21}-\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}k_{12},$$

$$\mu_{13}=x_3\frac{1}{b_{66}}l_{13},\qquad \mu_{23}=x_3\frac{1}{b_{44}}l_{23},$$

$$\mu_{31}=-x_3\left(\frac{\partial\mu_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{21}}{\partial x_2}+\sigma_{23}-\sigma_{32}\right),\ \mu_{32}=-x_3\left(\frac{\partial\mu_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{22}}{\partial x_2}+\sigma_{31}-\sigma_{13}\right)$$

$$\mu_{33}=\overset{0}{\mu}_{33}(x_1;x_2)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{x_3^2}{2}\right)\left(\frac{\partial\overset{1}{\mu}_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\overset{1}{\mu}_{23}}{\partial x_2}+\overset{1}{\sigma}_{12}-\overset{1}{\sigma}_{21}\right)$$

С целью приведения трёхмерной задачи микрополярной теории упругости к двумерной, что уже выполнено для перемещений, деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, в теории микрополярных упругих пластин вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные характеристики-усилия N_{i3}, N_{3i}, моменты от силовых напряжений M_{ii}, M_{ij}, моменты от моментных напряжений L_{ii}, L_{33}, L_{ij} и гипермоменты от моментных напряжений Λ_{i3}:

$$N_{i3}=\int_{-h}^{h}\sigma_{i3}dx_3,\ N_{3i}=\int_{-h}^{h}\sigma_{3i}dx_3,\ \mathrm{M}_{ii}=\int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ii}dx_3,\ \ \mathrm{M}_{ij}=\int_{-h}^{h}x_3\sigma_{ij}dx_3,\tag{2.10}$$

$$\mathrm{L}_{ii}=\int_{-h}^{h}\mu_{ii}dx_3,\ \mathrm{L}_{33}=\int_{-h}^{h}\mu_{33}dx_3,\ \mathrm{L}_{ij}=\int_{-h}^{h}\mu_{ij}dx_3,\ \Lambda_{i3}=\int_{-h}^{h}x_3\mu_{i3}dx_3,\quad i=(1,2)$$

Основная система уравнений общей теории статической изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, построенная с помощью перечисленных выше кинематических и статических гипотез, будет выражаться следующим образом:

уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-\tilde{p}_3,\qquad N_{3i}-\left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\right)=h\tilde{p}_i$$

$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\tilde{m}_i \tag{2.11}$$

$$L_{33}-\left[\frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2}+(M_{12}-M_{21})\right]=h\tilde{m}_3$$

физические соотношения

$$\begin{aligned}
&N_{13}=\widetilde{C}_{55}\Gamma_{13}+C_{56}\Gamma_{31} && N_{31}=C_{66}\Gamma_{31}+C_{56}\Gamma_{13}\\
&N_{23}=C_{55}\Gamma_{23}+C_{45}\Gamma_{32} && N_{32}=C_{44}\Gamma_{32}+C_{45}\Gamma_{23}\\
&M_{11}=D_{11}K_{11}+D_{12}K_{22} && M_{22}=D_{22}K_{22}+D_{12}K_{11}\\
&M_{12}=D_{88}K_{12}+D_{78}K_{21} && M_{21}=D_{77}K_{21}+D_{78}K_{12}\\
&L_{11}=d_{11}k_{11}+d_{12}k_{22}+d_{13}k_{33} && L_{12}=d_{88}k_{12}+d_{78}k_{21}\\
&L_{22}=d_{22}k_{22}+d_{21}k_{11}+d_{23}k_{33} && L_{21}=d_{77}k_{21}+d_{78}k_{12}\\
&L_{33}=d_{33}k_{33}+d_{31}k_{11}+d_{32}k_{22}\\
&\Lambda_{13}=\lambda_{66}l_{13} \qquad \Lambda_{23}=\lambda_{44}l_{23}\,;
\end{aligned} \tag{2.12}$$

геометрические соотношения имеют вид (2.6), (2.7);
здесь

$$\widetilde{C}_{55}=2h\frac{\widetilde{a}_{55}}{\widetilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2} \quad C_{66}=2h\frac{a_{66}}{\widetilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2} \quad C_{56}=-2h\frac{a_{56}}{\widetilde{a}_{55}a_{66}-a_{56}^2}$$

$$C_{55}=2h\frac{a_{55}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2} \quad C_{44}=2h\frac{a_{44}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2} \quad C_{45}=-2h\frac{a_{45}}{a_{44}a_{55}-a_{45}^2}$$

$$D_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{22}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} \quad D_{22}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{11}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2} \quad D_{12}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}$$

$$D_{88}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{88}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2} \quad D_{77}=\frac{2h^3}{3}\frac{a_{77}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2} \quad D_{78}=-\frac{2h^3}{3}\frac{a_{78}}{a_{77}a_{88}-a_{78}^2}$$

$$d_{11}=2h\frac{\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23}\\ b_{23} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}\,,\quad d_{12}=-2h\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13}\\ b_{23} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}\,,\quad d_{13}=2h\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13}\\ b_{22} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}$$

$$d_{22}=2h\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ b_{13} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}\,,\quad d_{21}=-2h\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{23}\\ b_{13} & b_{33}\end{vmatrix}}{\Delta_b}\,,\quad d_{23}=-2h\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{13}\\ b_{12} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}$$

$$d_{33}=2h\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{12} & b_{22}\end{vmatrix}}{\Delta_b}\,,\quad d_{31}=2h\frac{\begin{vmatrix} b_{12} & b_{22}\\ b_{13} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta}\,,\quad d_{32}=-2h\frac{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{13} & b_{23}\end{vmatrix}}{\Delta_b}$$

$$d_{88}=2h\frac{b_{88}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\quad d_{77}=2h\frac{b_{77}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2},\quad d_{78}=-2h\frac{b_{78}}{b_{77}b_{88}-b_{78}^2}$$

$$\lambda_{66}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{66}},\qquad \lambda_{44}=\frac{2h^3}{3}\frac{1}{b_{55}},$$

На основе формул (2.8), (2.9), силовые и моментные напряжения выразятся через усреднённые усилия, моменты и гипермоменты следующим образом:

$$\sigma_{ii}=x_3\frac{M_{ii}}{\frac{2h^3}{3}},\qquad \sigma_{i3}=\frac{N_{i3}}{2h},\qquad \overset{0}{\sigma}_{3i}=\frac{N_{3i}}{2h},\qquad \sigma_{ij}=x_3\frac{M_{ij}}{\frac{2h^3}{3}}$$

$$\sigma_{3i}=\frac{N_{3i}}{2h}+\frac{h^2/6-x_3^2/2}{2h^3/3}\left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}\right),$$

$$\mu_{33}=\frac{L_{33}}{2h}+\frac{\frac{h^2}{6}-\frac{x_3^2}{2}}{\frac{2h^3}{3}}\left(\frac{\partial\Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\Lambda_{23}}{\partial x_2}+\left(M_{12}-M_{21}\right)\right)$$

$$\mu_{ii}=\frac{L_{ii}}{2h},\qquad \mu_{ij}=\frac{L_{ij}}{2h},\qquad \mu_{i3}=x_3\frac{\Lambda_{i3}}{\frac{2h^3}{3}},\qquad \overset{0}{\mu}_{33}=\frac{L_{33}}{2h}.$$

К системе уравнений (2.11), (2.12), (2.6), (2.7) микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением присоединим “смягчённые” граничные условия на граничном контуре Γ срединной плоскости пластинки (напр., при $x_1=\text{const}$):

$$M_{11}=M_{11}^* \text{ или } K_{11}=K_{11}^*\ ;\ M_{12}=M_{12}^* \text{ или } K_{12}=K_{12}^*,$$
$$N_{13}=N_{13}^* \text{ или } w=w^*; \tag{2.13}$$
$$L_{11}=L_{11}^* \text{ или } k_{11}=k_{11}^*\ ;\ L_{12}=L_{12}^* \text{ или } k_{12}=k_{12}^*\ ;\ \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13}=l_{13}^*$$

Система уравнений (2.11), (2.12), (2.6), (2.7) и граничные условия (2.13) будут представлять собой математическую модель микрополярных упругих ортотропных тонких пластин с независимыми полями перемещений и вращений, при которой полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации. Это – система дифференциальных уравнений 12-ого порядка с 6-ю граничными условиями на каждом крае срединной плоскости пластинки. Она содержит 35 уравнений относительно 35 неизвестных функций:

$$N_{i3},N_{3i},M_{ii},M_{ij},L_{ii},L_{ij},\Lambda_{i3},L_{33},\Gamma_{i3},\Gamma_{3i},K_{ii},K_{ij},k_{ii},k_{ij},l_{i3},\psi_i,w,\Omega_i,\iota.$$

Уравнение баланса энергии для модели (2.11), (2.12), (2.6), (2.7), (2.13) микрополярных ортотропных упругих тонких пластин будет выражаться так:

$$\iint\limits_{(s)}\tilde{W}ds=\frac{1}{2}\iint\limits_{(s)}\left[\left(p_1h\psi_1+p_2h\psi_2+p_3w\right)+\left(m_1\Omega_1+m_2\Omega_2+m_3h\iota\right)\right]ds+$$
$$+\int\limits_{l}\left[\left(M_{11}^0\psi_1+M_{12}^0\psi_2+N_{13}^0w\right)+\left(L_{11}^0\Omega_1+L_{12}^0\Omega_2+\Lambda_{13}^0\iota\right)\right]dl,$$

где плотность потенциальной энергии деформации имеет вид:

$$\widetilde{W} = \frac{1}{2}\Big[D_{11}K_{11}^2 + D_{22}K_{22}^2 + 2D_{12}K_{11}K_{22} + D_{88}K_{21}^2 + 2D_{78}K_{12}K_{21} + D_{77}K_{12}^2 +$$

$$+ C_{66}\Gamma_{31}^2 + 2C_{56}\Gamma_{31}\Gamma_{13} + \widetilde{C}_{55}\Gamma_{13}^2 + C_{44}\Gamma_{32}^2 + 2C_{45}\Gamma_{32}\Gamma_{23} + C_{55}\Gamma_{23}^2 +$$

$$+ d_{11}k_{11}^2 + d_{22}k_{22}^2 + d_{33}k_{33}^2 + 2d_{12}k_{11}k_{22} + 2d_{13}k_{11}k_{33} + 2d_{23}k_{22}k_{33} + d_{77}k_{21}^2 +$$

$$+ 2d_{78}k_{12}k_{21} + d_{88}k_{12}^2 + \lambda_{66}l_{13}^2 + \lambda_{44}l_{23}^2\Big],$$

а общий вариационный функционал можем представить следующим образом:

$$I = \iint_s \Bigg\langle \tilde{W} - \Bigg\{ M_{11}\left(K_{11} - \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\right) + M_{22}\left(K_{22} - \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\right) + M_{12}\left[K_{12} - \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial x_1} - \iota\right)\right] +$$

$$+ M_{21}\left[K_{21} - \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x_2} + \iota\right)\right] + N_{13}\left[\Gamma_{13} - \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_2\right)\right] +$$

$$+ N_{23}\left[\Gamma_{23} - \left(\frac{\partial w}{\partial x_2} - \Omega_1\right)\right] + L_{11}\left(k_{11} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_1}\right) + L_{22}\left(k_{22} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_2}\right) +$$

$$+ L_{33}(k_{33} - \iota) + L_{12}\left(k_{12} - \frac{\partial\Omega_2}{\partial x_1}\right) + L_{21}\left(k_{21} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial x_2}\right) + \Lambda_{13}\left(l_{13} - \frac{\partial\iota}{\partial x_1}\right) + \Lambda_{23}\left(l_{23} - \frac{\partial\iota}{\partial x_1}\right)\Bigg\}\Bigg\rangle ds -$$

$$- \iint_s \Big[\big(p_1 h\psi_1 + p_2 h\psi_2 + p_3 w\big) + \big(m_1\Omega_1 + m_2\Omega_2 + m_3 h\iota\big)\Big] ds -$$

$$- \int_l \Big[\big(M_{11}^0\psi_1 + M_{12}^0\psi_2 + N_{13}^0 w\big) + \big(L_{11}^0\Omega_1 + L_{12}^0\Omega_2 + \Lambda_{13}^0\iota\big)\Big] dl$$

Отметим, что при (1.6) вместо модели (2.11), (2.12), (2.6), (2.7) и (2.13) получим систему основных уравнений и граничных условий теории микрополярных упругих изотропных пластин с независимыми полями перемещений и вращений [4], а при (1.7), из уравнений (2.11), (2.12), (2.6), (2.7) и граничных условий (2.13) будут отделяться классические уравнения и граничные условия теории упругих пластин на основе гипотез Тимошенко [11,12] (с некоторым отличием, связанным со статической гипотезой 3)).

Заключение. В работе впервые построена общая теория изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких пластин. Построено общее вариационное уравнение этой теории. Построенная теория будет основой для рассмотрения в дальнейшем различных конкретных задач об изгибе микрополярных ортотропных упругих пластин.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках **Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности**, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армения в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней,пластин и оболочек //Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №2.С.84-95.
2. Altenbach J., Altenbach H., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of Plates and Shells: A short review and bibliography// Arch.Appl. Mech.Special Issue.Doi10.1007/s 00419-009-0365-3.
3. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок // Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. №2. С.121-128.
4. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин //Изв.НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №1. С.58-67.
5. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек //Доклады АН России. 2011. Т.436. №2. С.195-198.
6. Sargsyan S.H. Mathematical Models of Micropolar Elastic Thin Shells//Advanced Structured Materials. Volume 15. Shell-like Structures. Non-classical Theories and Applications. Springer. 2011. P.91–100.
7. Айрапетян Г.С. Построение двумерных уравнений статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких пластин асимптотическим методом //В сб. научных трудов международной конференции: "Актуальные проблемы механики сплошной среды". Т.1. Ереван: НАН Армении. 2010. С.56-60.
8. Новацкий В.Теория упругости. М.: Мир, 1975. 862с.
9. Iesen D. Torsion of Anisotropic Micropolar Elastic Cylinders //ZAMM. 1974. V.54. №12. P.773–779.
10. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 967. 444с.
11. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с.
12. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение, 1987. 316с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович,
Член-корр. НАН Армении, доктор физ-мат наук, профессор, зав. кафедрой Математического анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского гос.педагогического института им.М.Налбандяна

Айрапетян Гаяне Сократовна,
Аспирант Гюмрийского гос.педагогического института им. М.Налбандяна

Поступила в редакцию 01.02.2012