ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №3, 2012 Механика

УДК 539.3

ПЛОСКИЕ ЗАДАЧИ СО СМЕШАННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛОСКОСТИ С ТРЕЩИНАМИ

Арутюнян Л.А.

Ключевые слова: составное тело, трещина, биполярные координаты, функции Папковича-Нейбера, преобразование Фурье.
Key words: compound body, crack, bipolar coordinates, Papkovich-Nejber functions, Fourier transformation

Harutjunyan L.A.
Two-dimensional mixed boundary problems of compound plane with cracks

The two-dimensional problem of the theory of elasticity for compound plane consisting of two half-plane is considered with different elastic characteristic and existing between them finite cracks or semi-infinite cracks. Due to Fourier integral in bipolar system of coordinates the problems are solved closed with the help of Papkovich-Nejber function.

Հարությունյան Լ.Ա.
Ճաքեր պարունակող բաղադրյալ հարթության խառը եզրային պայմաններով հարթ խնդիրներ

Դիտարկված է բաղադրյալ հարթության խառը եզրային պայմաններով հարթ խնդիրներ, որոնք կազմված են տարբեր առաձգական հատկություններ ունեցող, բաժանման մակերևույթի վրա ճաք կամ երկու կիսաանվերջ ճաքեր պարունակող կիսահարթություններից:

Օգտվելով Պապկովիչ-Նեյբերի հարմոնիկ ֆունկցիաներից, երկբևեռ կոորդինատային համակարգում, Ֆյուրեյի ինտեգրալների օգնությամբ, դիտարկվող խնդիրների համար ստացված են փակ լուծումներ:

Դիտարկված է երկու մասնավոր դեպքեր, երբ ճաքի վրա կիրառված է հակադիր ուղղություններով երկու հավասար ինտենսիվությամբ կենտրոնացված ուժեր և մյուս դեպքում երբ ճաքի եզրերին կիրառված է հավասար ինտենսիվությամբ բաշխված բեռներ: Նյութերի բաժանման մակերևույթի և ճաքի վրա լարումների և տեղափոխությունների հաշվման համար ստացված են պարզ անալիտիկ արտահայտություններ:

Рассматриваются плоские задачи теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

При помощи интегралов Фурье в биполярной системе координат через функции Папковича-Нейбера задачи решаются замкнуто.

Рассмотрены две конкретные задачи: когда внешнее усилие, приложенное к берегам трещин, сводится к двум противоположно направленным сосредоточенным силам, и трещины загружены равномерными сжимающими усилиями одинаковой интенсивности. На линии контакта и на берегах трещины для вычисления напряжений и перемещений получены простые аналитические формулы.

Задачи с трещинами связаны с задачами определения напряжённо-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, представляющих интерес в теоретических и практических вопросах прочности разнообразных конструкций, они стали предметом исследования многих авторов [2-6].

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для составной плоскости, состоящей из двух полуплоскостей с различными упругими характеристиками и имеющимися между ними конечными трещинами или полубесконечными трещинами.

В прямоугольной декартовой системе координат (x, y) при $y \geq 0$ полуплоскость имеет упругие характеристики G_1 и ν_1, а при $y \leq 0$ имеет упругие характеристики G_2 и ν_2 (G_1 и G_2 – модули сдвига материалов, ν_1 и ν_2 – коэффициенты Пуассона).

Для решения задачи удобно использовать биполярные системы координат. Связь прямоугольных координат (x, y) с биполярными координатами (α, β) даётся соотношениями [1]:

$$gx = \operatorname{sh}\alpha\,, \quad gy = \sin\beta\,, \quad ag = \operatorname{ch}\alpha + \cos\beta \tag{1}$$

a – размерный параметр.

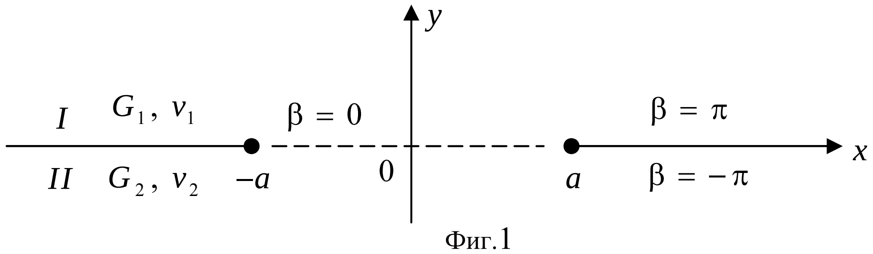
Координата α будет при этом изменяться от $-\infty$ до $+\infty$; в правой полуплоскости $\alpha > 0$; в левой – $\alpha < 0$; ось $0y$ является координатной линией $\alpha = 0$, точки $x = \pm a$, $y = 0$ соответствуют значениям $\alpha = \pm\infty$. Координата β меняется от $-\pi$ до $+\pi$, в верхней полуплоскости $\beta > 0$, в нижней – $\beta < 0$, отрезок $(-a, a)$ является координатной линией $\beta = 0$. Что касается отрезков оси $0x$ при $x < -a$ и $x > a$, то здесь координата β терпит разрыв, равный 2π, а именно: на верхнем берегу $\beta = \pi$, на нижнем берегу $\beta = -\pi$.

Задачи решаются при помощи функции Папковича-Нейбера. Общее решение плоской задачи теории упругости, согласно Папковичу-Нейберу, можно представить через три гармонические функции, причём одна из них принимается произвольно. Пользуясь этой произвольностью, принимаем одну из функций, равной тождественно нулю.

Приведём выражения перемещений U и V, напряжений σ_y и τ_{xy} через функции Папковича-Нейбера [1]:

$$\begin{aligned}
&2GU(x,y) = -\frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial x} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial x}\\
&2GV(x,y) = (3-4\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial y}\\
&\sigma_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[2(1-\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y}\right] - y\frac{\partial^2\Phi_2(x,y)}{\partial y^2}\\
&\tau_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-2\nu)\Phi_2(x,y) - \frac{\partial\Phi_0(x,y)}{\partial y} - y\frac{\partial\Phi_2(x,y)}{\partial y}\right]
\end{aligned} \tag{2}$$

1. Пусть на участках граничной прямой $y = 0$, а именно: на отрезке $|x| < a$ имеем трещину, а на участках $|x| > a$ имеем полный контакт материалов (фиг.1)



Фиг.1

Рассмотрим смешанную краевую задачу, т.е. на берегах трещины заданы нормальные напряжения и касательные перемещения

$$\sigma_y^{(m)}(\alpha,0)=\sigma_m(\alpha),\ U_m(\alpha,0)=0\ \ (m=1,2) \tag{3}$$

Предполагается, что функции $\sigma_m(\alpha)(m=1,2)$ удовлетворяют условиям разложимости в интеграле Фурье.

На линии контакта имеем полное сцепление материалов, т.е. нормальное и касательное перемещения, так как нормальное и касательное напряжения равны:

$$\begin{gathered}U_1(\alpha,\pi)=U_2(\alpha,-\pi)\ \ ;\ \ V_1(\alpha,\pi)=V_2(\alpha,-\pi),\\ \sigma_y^{(1)}(\alpha,\pi)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,-\pi)\ ;\ \ \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,\pi)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,-\pi).\end{gathered} \tag{4}$$

Подставляя в граничные условия (3) и (4) выражения (2) перемещений и напряжений через гармонические функции $\Phi_0^{(m)}(\alpha,\beta)$ и $\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)$ $(m=1,2)$ Папковича-Нейбера, мы приходим к следующей краевой задаче. При этом, следует перейти от производных по x и y к производным по α и β [1]

$$\begin{gathered}
2(1-\nu_m)\left.\frac{\partial\Phi_2^{(m)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=\frac{a\sigma_m(\alpha)}{\mathrm{ch}\alpha+1}\ ;\ \left.\frac{\partial\Phi_3^{(m)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}=0\ \ (m=1,2)\\
\frac{1}{G_1}\left[(3-4\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\pi)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\pi)\right]=\frac{1}{G_2}\left[(3-4\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,-\pi)-\right.\\
\left.-\Phi_3^{(2)}(\alpha,-\pi)\right],\qquad \frac{1}{G_1}\left.\frac{\partial\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=\pi}=\frac{1}{G_2}\left.\frac{\partial\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)}{\partial\beta}\right|_{\beta=-\pi}\\
\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=\pi}=\\
=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[2(1-\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=-\pi}\\
\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2\nu_1)\Phi_2^{(1)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(1)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=\pi}=\\
=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[(1-2\nu_2)\Phi_2^{(2)}(\alpha,\beta)-\Phi_3^{(2)}(\alpha,\beta)\right]\Big|_{\beta=-\pi}
\end{gathered} \tag{5}$$

где введены новые граничные функции

$$\Phi_3^{(m)}(x,y)=\frac{\partial\Phi_0^{(m)}(x,y)}{\partial y}\qquad (m=1,2). \tag{6}$$

Рассматриваемая краевая задача допускает точное решение в биполярных координатах, если представить искомые функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)$ $(n=2,3;\ m=1,2)$ в виде интегралов Фурье

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_n^{(m)}(\lambda)\mathrm{ch}\lambda\beta+B_n^{(m)}(\lambda)\mathrm{sh}\lambda\beta\right]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda \tag{7}$$

Подставляя (7) в (5), мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений для определения величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)$ $(n=2,3;\ m=1,2)$, правые части которых будут содержать преобразования Фурье от заданных функций.

После решения этих систем получаем следующие значения для неизвестных величин интегрирования:

$$A_2^{(1)}(\lambda)=\frac{1}{\chi_1+\mu}\left[m_1(\lambda)+\mu\left(m_2(\lambda)-m_3(\lambda)\right)\right]$$

$$A_2^{(2)}(\lambda)=\frac{1}{\mu\chi_2+1}\left[m_2(\lambda)+m_3(\lambda)-m_1(\lambda)\right]$$

$$2A_3^{(1)}(\lambda)=\chi_1A_2^{(1)}(\lambda)+A_2^{(2)}(\lambda)-m_2(\lambda)-m_3(\lambda)$$

$$2A_3^{(2)}(\lambda)=A_2^{(1)}(\lambda)+\chi_2A_2^{(2)}(\lambda)-m_2(\lambda)+m_3(\lambda)$$

$$B_2^{(m)}(\lambda)=\frac{2\bar{\sigma}_m(\lambda)}{\chi_m+1};\ B_3^{(m)}(\lambda)=0\ \ m=1,2 \tag{8}$$

где

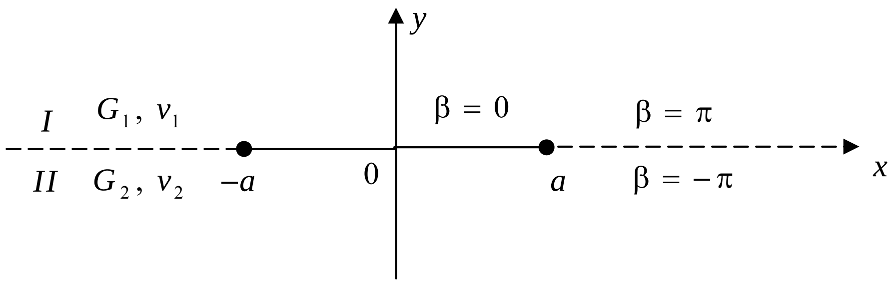
$$\bar{\sigma}_m(\lambda)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_m(\alpha)}{\mathrm{ch}\alpha+1}e^{i\lambda\alpha}d\alpha\ ,\quad \mu=\frac{G_1}{G_2}\ ,\ \chi_m=3-4\nu_m\ \ (m=1,2)$$

$$m_1(\lambda)=-\left[\chi_1B_2^{(1)}(\lambda)+\mu\chi_2B_2^{(2)}(\lambda)\right]\mathrm{th}\lambda\pi$$

$$m_2(\lambda)=\left[-\frac{\chi_1+1}{2}B_2^{(1)}(\lambda)+\frac{\chi_2+1}{2}B_2^{(2)}(\lambda)\right]\mathrm{cth}\lambda\pi \tag{9}$$

$$m_3(\lambda)=-\left[\frac{\chi_1-1}{2}B_2^{(1)}(\lambda)+\frac{\chi_2-1}{2}B_2^{(2)}(\lambda)\right]\mathrm{th}\lambda\pi$$

2. На участках граничной прямой $y=0$, а именно, на отрезках $|x|>a$, имеем трещину, а на участках $|x|<a$ имеем полный контакт материалов (фиг.2).



Фиг.2

Граничные и контактные условия в этом случае имеют вид:

$$\sigma_y^{(m)}\left(\alpha,\,(-1)^{m+1}\pi\right)=\sigma_m(\alpha)\,;\; U_m\left(\alpha,\,(-1)^{m+1}\pi\right)=0\;\;(m=1,2)$$

$$U_1(\alpha,0)=U_2(\alpha,0)\,;\; V_1(\alpha,0)=V_2(\alpha,0) \tag{10}$$

$$\sigma_y^{(1)}(\alpha,0)=\sigma_y^{(2)}(\alpha,0);\;\; \tau_{xy}^{(1)}(\alpha,0)=\tau_{xy}^{(2)}(\alpha,0)$$

В этом случае функции $\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)\;(n=2,3;\;m=1,2)$ ищем в следующем виде интегралов Фурье:

$$\Phi_n^{(m)}(\alpha,\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\Big[A_n^{(m)}(\lambda)\,\mathrm{ch}\lambda\left(\pi+(-1)^m\beta\right)+ \\ +B_n^{(m)}(\lambda)\,\mathrm{sh}\lambda\left(\pi+(-1)^m\beta\right)\Big]\frac{e^{-i\lambda\alpha}}{\lambda}d\lambda \tag{11}$$

После удовлетворения краевым и контактным условиям (10) , учитывая формулы (1,2,11) для неизвестных величин $A_n^{(m)}(\lambda)$ и $B_n^{(m)}(\lambda)\;(n=2,3;\;m=1,2)$ получаем опять значения (8 и 9), только в этом случае $\bar{\sigma}_m(\lambda)\;(m=1,2)$ имеет следующие значения:

$$\bar{\sigma}_m(\lambda)=\frac{(-1)^{m+1}a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sigma_m(\alpha)}{\mathrm{ch}\alpha-1}e^{i\lambda\alpha}d\alpha \tag{12}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Ленинград: Наука, 1968. 401с.
2. Попов Г.Я. Конструкция упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Черепанов Г.П. Механика разрушения композиционныв материалов. М.: Наука, 1983. 296с.
4. Акопян В.Н. Об одной смешанной задаче для составной плоскости, ослабленной трещиной. //Изв.НАН Армении. Механика. 1995. Т.48. №4. С.57–65.
5. Даштоян Л.Л. Об одной смешанной задаче для составной плоскости с двумя полубесконечными трещинами. //Материалы XII Республиканской конференции молодых учёных „Механика”, Ереван: 2003. С.78-82.
6. Арутюнян Л.А. Плоская задача составной плоскости с трещинами. //Междунар. Научно-техническая конференция „Архитек. и строит.”, 2008; Ереван: С.34-37.

Сведения об авторе:

Арутюнян Левон Арсенович – к.ф.м.н., с.н.с., Институт механики НАН Армении

Поступила в редакцию 17.11.2010