ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №2, 2012 Механика

УДК 531.36:534.1М

УСЛОВИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ С ВЗАИМОСВЯЗАННЫМИ ФОРМИРУЮЩИМИ И ФИЛЬТРУЮЩИМИ ПОДСИСТЕМАМИ УПРАВЛЯЮЩИХ СИГНАЛОВ

Матвийчук К.С.

Ключевые слова: техническая устойчивость и неустойчивость систем, нестационарные системы автоматического управления с переменной структурой, коммутируемые фильтры сигналов, метод дифференциальных неравенств, нормированные функции Ляпунова, системы сравнения.
Key words: technical stability and instability of the systems, non-stationary control systems with variable structure, switched filters of the signals, method of differential inequalities, Lyapunov’s normalized functions, systems of comparison.

Մատվիյչուկ Կ.Ս.

Փոփոխական կառուցվածքով ավտոմատ ղեկավարման փոխկապակցված ձևավորող և ֆիլտրող ղեկավարող ազդանշանների ենթահամակարգերով ոչ ստացիոնար համակարգերի դինամիկ վիճակների տեխնիկական կայունության պայմանները

Հետազոտվում են փոփոխական կառուցվածքով ավտոմատ ղեկավարման ոչ ստացիոնար համակարգերի դինամիկ վիճակների ըստ չափի տեխնիկական կայունության հատկությունները ղեկավարող ազդանշանների ֆիլտրացիայի առկայությամբ: Համապատասխան դիֆերենցիալ հավասարումները պարունակում են թռիչքաձև փոփոխվող գործակիցներ: Փոփոխական կառուցվածքով ավտոմատ ղեկավարման ոչ ստացիոնար համակարգերի տարբեր տիպի ըստ չափի տեխնիկական կայունության հայտանիշները ստացված են դիֆերենցիալ անհավասարությունների մեթոդի և որոշակի դրական ֆունկցիաների դասի հատկությունների զուգորդմամբ

Matviychuk K.S.

Conditions of Technical Stability on Non-Stationary Processes of Automatic Control of Variable Structure with Correlative Forming and Filtering Systems of Control Signals

The conditions of technical stability by measure of the dynamical states of the non-stationary control systems with variable structure are investigated in presence of filtration process of the control signals. The suitable systems of the differential equations have the changing coefficients, which are altering in time and by jumplike together with jumplike changing of the control function of the process and with simultaneous jumplike changing at the direction of the suitable phase velocity vector of the process. The criteria of technical stability by measure on finite and infinite intervals of time, asymptotical technical stability by measure, and also the criterion of the technical instability by measure of given, inwardly dependent on quality of filtering of control signals of non-stationary dynamical systems with variable structure are determiner under base of the differential inequalities method at combination with properties of the class of the absolutely positive functions, for all feasible initial disturbances from the pre-assigned by measure set of initial states of the process.

Исследуются свойства технической устойчивости по мере динамических состояний нестационарных систем автоматического управления с переменной структурой при наличии процессов фильтрации управляющих сигналов. Соответствующие системы дифференциальных уравнений содержат переменные коэффициенты, изменяющиеся во времени и скачкообразно совместно со скачкообразным изменением функции управления процесса и с одновременным скачкообразным изменением направления соответствующего вектора фазовой скорости этого процесса. Критерии технической устойчивости по мере на конечном и бесконечным интервалах времени, асимптотической технической устойчивости относительно меры, а также критерий технической неустойчивости по мере заданных, внутренне зависящих от качества фильтрации управляющего сигнала, нестационарных динамических систем переменной структуры установлены на основе метода дифференциальных неравенств в сочетании со свойствами класса определенно положительных функций, при всех допустимых начальных возмущениях из заранее заданного по мере множества начальных состояний процесса.

Введение. Получены достаточные условия технической устойчивости по мере движения нестационарных систем автоматического управления с переменной структурой, в управляющих устройствах которых используются охватываемые внутренней обратной связью подсистемы фильтрования управляющего сигнала, функционирующие совместно с формирующими и с исполнительными звеньями процесса управления. Системы переменной структуры с фильтрами управляющего сигнала важны, в частности, для решения практических задач в процессах автоматизации полётов объектов, в практических задачах автоматического управления надводными и подводными кораблями и системами, а также для других динамических процессов и объектов, при управлении которыми необходим учёт нестационарности во времени их параметров при высокой точности управления [1–9]. Нестационарные параметры рассматриваемого здесь процесса с переменной структурой меняются в заданных диапазонах с ограниченной скоростью при подходяще выбранных параметрах законов управления, с регулированием по сигналу рассогласования, его производных конечного порядка и всех переменных параметров блока фильтрования сигналов [3, 4, 9]. При этом, параметры гиперплоскости переключения остаются постоянными. Предложенный подход изучения технической устойчивости заданных систем с переменной структурой не связывается с условиями существования скользящего режима на границе переключений в фазовом пространстве [1, 3, 5, 9– 28]. Построены условия технической неустойчивости по мере заданного процесса автоматического фильтрованного управления с использованием свойств систем сравнения снизу [5,10,15, 17- 21, 23,]. Полученные общие критерии технической устойчивости и неустойчивости по мере применены к нестационарной системе автоматического фильтрованного управления с переменной структурой третьего порядка. Применяется метод сравнения совместно с прямым методом Ляпунова на основе свойств нормированных функций Ляпунова и определенно положительных квадратичных форм [13 – 17, 22-26].

1. Постановка задачи. Рассматривается движение нестационарной системы автоматического управления с переменной структурой, в которой с целью обеспечения высококачественного управления реальными процессами предусматривается функциональное использование коммутируемых фильтрующих сигнал подсистем [1, 3, 4, 6, 9]. Полагаем, что движение основной части заданной системы – исполнительного устройства и объекта управления, имеющих переменные во времени t параметры, – описывается дифференциальным уравнением n-го порядка вида [3, 9]:

$$\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}(t)\frac{d^i x}{dt^i} = -\sum_{j=0}^{m} b_{j+1}(t)\frac{d^j u}{dt^j},\ (a_{n+1}(t)=1);$$

$$\text{(при условии } \sum_{p=0}^{\ell} c_{p+1}(t)\frac{d^p f}{dt^p} = -\sum_{i=0}^{n} a_{i+1}(t)\frac{d^i g}{dt^i}), \tag{1}$$

где n, m, ℓ – целые положительные постоянные числа, $n \ge m$; $n \ge \ell$; $a_i(t),\ b_j(t),\ c_p(t)$ – переменные, дифференцируемые по времени t коэффициенты, зависящие от параметров объекта управления и исполнительного устройства системы; $a_i(t),\ b_j(t)$ изменяются вместе со своими производными в области, заданной ниже [3, 7]; x – сигнал ошибки рассогласования. Считаем, что управляющее устройство заданной системы функционально включает в себя взаимосвязанные формирующую и фильтрующую подсистемы [1, 3, 8]; $u(t)$ – управление, представляющее выходную величину фильтра управляющего устройства системы, является основной входной координатой исполнительного устройства. По предположению на вход формирующей подсистемы поступает величина $x = \varphi(t) - g(t)$, где $g(t)$ – задающая координата системы управления на входе управляющего устройства, $\varphi(t)$ – выходная координата объекта управления, поступающая ко входу формирующего устройства по каналу главной внешней обратной связи для сравнения с координатой g; $f(t)$ – внешнее воздействие на управляемый объект. Согласно (1) принято: выходная координата $y(t)$ исполнительного устройства и её производные по t конечного порядка, при исключении их как промежуточные переменные, допускают возможность представления им замены в виде соотношения, состоящего из функции управления u и её производных до $(m-1)$ порядка при известных коэффициентах $b_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m)$ [1, 3, 6, 9,11, 13 – 15,20]; $g, f \equiv \mathrm{const}$ – возможный частный случай в (1). В составе формирующего устройства имеются дифференциаторы, осуществляющие дифференцирование сигнала x, и ключевые логические элементы, которые в соответствии с выбранным законом управления меняют структуру управляющего устройства системы. В такого класса системах переменной структуры порядка, выше второго, требуется информация не только о выходной координате фильтра, но и о промежуточных координатах его [3, 9]. Полагаем, что с выхода формирующего устройства заданной системы переменной структуры скачкообразно меняющаяся формирующая координата v подается на вход коммутируемого обратной связью фильтра этой системы. Фильтр, по предположению, состоит из $m-1$ последовательно соединённых звеньев с выходными координатами $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$ [3, 9]. Пусть движение фильтра описывается уравнениями вида [3, 9]:

$$\frac{dz_i}{dt} = \frac{1}{T_i}\left(z_{i-1} - z_i\right), \qquad i = 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где T_i – постоянные времени фильтра, соответствующие i-му инерционному звену фильтра, при этом принимаем $z_0 = \mathrm{v}$, $z_{m-1} = u$.

С учётом содержания уравнений движения (1) и (2) далее будем предполагать, что в заданной системе управления её управляющее устройство вырабатывает на выходе непрерывное и непрерывно дифференцируемое $(m-2)$ раза по времени t управление, однако его $(m-1)$-я производная $d^{m-1}u/dt^{m-1}$ претерпевает разрыв первого рода [3, 8, 9, 25].

Используя замену переменных $x_1 = x,\ dx_i/dt = x_{i+1}$, $i = 1, \ldots, n-1$, вместо (1) используем систему n дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \quad i = 1, \ldots, n-1; \quad \frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t)x_i - P(D)u,$$

$$P(D) = \sum_{i=0}^{m-1} b_{i+1}(t)D^i, \quad D = \frac{d}{dt}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что производная t является функцией координаты $z_{m-1} = u$ и её производных до порядка $(m-1)$ включительно. Убедимся, что все производные $d^i z_{m-1}/dt^i$ можно выразить через переменные $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$. Пусть имеем представление вида [3, 9]

$$\frac{d^i z_{m-1}}{dt^i} = \sum_{j=0}^{i} A_{j,i} z_{m-1-j}, \qquad A_{j,i} = \text{const}. \tag{4}$$

Найдём рекуррентную зависимость коэффициентов $A_{j,i}$ от величин $1/T_{m-j}$ [3, 9]. Продифференцируем слева и справа соотношение (4):

$$\frac{d^{i+1} z_{m-1}}{dt^{i+1}} = \sum_{j=0}^{i} A_{j,i} \frac{dz_{m-1-j}}{dt}. \tag{5}$$

В (5) справа воспользуемся уравнениями (2) и перегруппировкой слагаемых:

$$\sum_{j=0}^{i} A_{j,i}\left[\frac{1}{T_{m-1-j}}\left(z_{m-j-2} - z_{m-j-1}\right)\right] = \sum_{j=0}^{i}\left[\frac{A_{j,i}}{T_{m-1-j}} z_{m-j-2} - \frac{A_{j,i}}{T_{m-1-j}} z_{m-j-1}\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{i+1}\left[A_{j-1,i}\frac{1}{T_{m-j}} - A_{j,i}\frac{1}{T_{m-j-1}}\right] z_{m-j-1}, \quad A_{-1,i} = 0, \ A_{i+1,i} = 0.$$

Следовательно, для (5) находим представление:

$$\frac{d^{i+1} z_{m-1}}{dt^{i+1}} = \sum_{j=0}^{i+1}\left[A_{j-1,i}\frac{1}{T_{m-j}} - A_{j,i}\frac{1}{T_{m-j-1}}\right] z_{m-j-1}, \qquad A_{-1,i} = 0, \ A_{i+1,i} = 0. \tag{6}$$

Подобно (4), введём обозначение

$$\frac{d^{i+1} z_{m-1}}{dt^{i+1}} = \sum_{j=0}^{i+1} A_{j,i+1} z_{m-1-j}, \qquad A_{j,i+1} = \text{const}. \tag{7}$$

Из соотношений (4) – (7) находим следующие свойства для коэффициентов

$$A_{j,i+1} = A_{j-1,i}\frac{1}{T_{m-j}} - A_{j,i}\frac{1}{T_{m-j-1}}; \ A_{-1,i} = 0, \ A_{i+1,i} = 0;$$

$$A_{0,1} = -\frac{1}{T_{m-1}}, \ A_{1,1} = \frac{1}{T_{m-1}}. \tag{8}$$

В силу (3), (4) при свойствах (8) и с учётом, что $z_0 = \mathrm{v}$, $z_{m-1} = u$, получаем следующие равенства:

$$\sum_{i=0}^{m-1} b_{i+1}(t)\frac{d^i u}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m-1} b_{i+1}(t)\frac{d^i z_{m-1}}{dt^i} = b_1(t) z_{m-1} + \sum_{i=1}^{m-1} b_{i+1}(t)\frac{d^i z_{m-1}}{dt^i} = \sum_{i=1}^{m-1} b_{i+1}(t)\sum_{j=0}^{i} A_{j,i} z_{m-1-j} +$$

$$+ b_1(t) z_{m-1} = \sum_{j=1}^{m-2}\left(\sum_{i=j}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{j,i}\right) z_{m-1-j} + \left(\sum_{i=1}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{0,i} + b_1(t)\right) u + b_m(t) A_{m-1,m-1}\mathrm{v}. \tag{9}$$

Согласно (9), последнее уравнение в (3) принимает вид

$$\frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} a_i(t) x_i - \sum_{j=1}^{m-2}\left(\sum_{i=j}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{j,i}\right) z_{m-1-j} - \left(\sum_{i=1}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{0,i} + b_1(t)\right) u - b_m(t) A_{m-1,m-1}\mathrm{v}. \tag{10}$$

Обозначим T заданный ограниченный интервал времени, на котором исследуется исходный процесс: $T \subset I \equiv [t_0, +\infty)$, $t_0 \geq 0$. При выбранной структуре рассматриваемой системы автоматического управления её фазовые состояния характеризуются непрерывными переменными $(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_{m-1}) \in R^{n+m-1}$, R^{n+m-1} – $(n+m-1)$-мерное евклидово пространство. Пусть координата z_0 на входе фильтра управляющего устройства этой системы задана линейной комбинацией с разрывными коэффициентами вида [3, 9]

$$z_0 = -\sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i - \sum_{i=1}^{m-1} \psi_i^z z_i \ , \tag{11}$$

где ψ_i^x, ψ_i^z принимают одно из двух значений (α_i^x или β_i^x) и (α_i^z или β_i^z) соответственно.

Из соотношений (1) – (11) находим, что движение заданной нестационарной системы автоматического управления с переменной структурой, функционально содержащей в себе коммутируемую фильтрующую подсистему, описывается уравнениями вида [1, 3, 4, 9,11]

$$\begin{aligned}
&\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}, \ i = 1, \ldots, n-1; \\
&\frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n-1} \left(a_i(t) - b_m(t) A_{m-1,m-1} \psi_i^x \right) x_i - a_n(t) x_n - \\
&-\sum_{j=1}^{m-2} \left(\sum_{i=j}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{j,i} - b_m(t) A_{m-1,m-1} \psi_{m-1-j}^z \right) z_{m-1-j} - \\
&-\left(\sum_{i=1}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{0,i} + b_1(t) - b_m(t) A_{m-1,m-1} \psi_{m-1}^z \right) z_{m-1}; \\
&\frac{dz_j}{dt} = \frac{1}{T_j} (z_{j-1} - z_j), \quad j = 1, \ldots, m-1; \quad T \subset I;
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\mathrm{v} = -\sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i - \sum_{j=1}^{m-1} \psi_j^z z_j \ . \tag{13}$$

Коэффициенты $A_{j,i}$ в (12) характеризуются свойствами (8). Полагаем, что зависящие от времени $t \in T$ коэффициенты $a_i(t), b_j(t)$ изменяются с ограниченной скоростью в заданных диапазонах области

$$\begin{aligned}
&\Gamma = \left\{ a_i(t), \ \frac{da_i(t)}{dt}, \ b_j(t), \ \frac{db_j(t)}{dt} : a_{i\,\min} \le a_i(t) \le a_{i\,\max} \right., \\
&0 < \frac{da_i(t)}{dt} \le \bar{a}_{i,\max}; \ \varepsilon_3 = \frac{9+\sqrt{41}}{2}, \ 0 < \frac{db_j(t)}{dt} \le \bar{b}_{j,\max}; \\
&i = 1, \ldots, n; \ j = 1, \ldots, m; \ a_{i\,\min}, a_{i\,\max}, b_{j\,\min}, b_{j\,\max} = \mathrm{const}; \\
&\left. \bar{a}_{i,\max}, \bar{b}_{j,\max} = \mathrm{const} > 0 \right\}.
\end{aligned} \tag{14}$$

В заданном процессе управления сформируем в R^n функцию переключения [1, 3, 9]

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \ , \ c_i = \mathrm{const}, \ c_n = 1. \tag{15}$$

В фазовом пространстве системы (12) при соотношениях (13) – (15) гиперплоскость переключения S определим уравнением $s(t) = 0$. Пусть заданы законы изменения на S коэффициентов ψ_i^x, ψ_j^z в виде:

$$\psi_i^x = 2^{-1}\left\{\alpha_i^x\left[1+\operatorname{sign}(x_i s)\right]+\beta_i^x\left[1-\operatorname{sign}(x_i s)\right]\right\},\ i=1,\ldots,n-1; \tag{16}$$

$$\psi_j^z = 2^{-1}\left\{\alpha_j^z\left[1+\operatorname{sign}(z_j\ s)\right]+\beta_j^z\left[1-\operatorname{sign}(z_j\ s)\right]\right\},\ j=1,\ldots,m-1. \tag{17}$$

Для заданной системы с переменной структурой (12) – (17) фазовые траектории непрерывны, ибо непрерывны фазовые координаты $x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,z_{m-1}$. Вектор фазовой скорости этой системы на гиперплоскости $S(s=0)$ может скачкообразно изменить своё направление, так как его координата dx_n/dt по предположению может иметь разрывы первого рода.

Полагаем, что движение системы (12) – (17) рассматривается при заданных начальных условиях

$$x_i(t_0)=x_i^0,\ (i=1,\ldots,n);\ z_j(t_0)=z_j^0,\ (j=1,\ldots,m-1), \tag{18}$$

где $x^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0,\ z_1^0,\ldots,z_{m-1}^0)$ – точка из заданной области возможных начальных значений Ω_0, определяемой ниже. Задачу Коши (12) – (18) рассматриваем в области

$$T\times D,\ D=\left\{\ x_i,z_j:\left|x_i\right|<h_i,\ \left|z_j\right|<k_j,\ i=\overline{1,n};\ j=\overline{1,m-1}\right\},$$

$$h_i=\text{const}>0,\ k_j=\text{const}>0,\ x=(x_1,\ldots,x_n,z_1,\ldots,x_{m-1})\in R^{n+m-1}.$$

Считаем, что задача (12) – (18) удовлетворяет достаточным условиям существования решений, свойственным обыкновенным дифференциальным уравнениям с разрывными правыми частями [1, 3,4,11,12,19]. Например, таким условием, согласно теореме 8 из [12, стр. 66], может быть выполнение свойства $\left|f(x,t)\right|\le m(t),\ t\in T,\ x\in D$;

$$\begin{aligned} f(x,t)=&-\sum_{i=1}^{n-1}\left(a_i(t)-b_m(t)A_{m-1,m-1}\psi_i^x\right)x_i-a_n(t)x_n-\\ &-\sum_{j=1}^{m-2}\left(\sum_{i=j}^{m-1}b_{i+1}(t)A_{j,i}-b_m(t)A_{m-1,m-1}\psi_{m-1-j}^z\right)z_{m-1-j}-\\ &-\left(\sum_{i=1}^{m-1}b_{i+1}(t)A_{0,i}+b_1(t)-b_m(t)A_{m-1,m-1}\psi_{m-1}^z\right)z_{m-1}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $m(t)$ – по предположению суммируемая функция при $t\in T$. Обозначим $x(t)=\left(x_1(t),\ldots,x_n(t),z_1(t),\ldots,z_{m-1}(t)\right)$ решение задачи (12)–(18), считая, что оно существует. Используем малый параметр $\mu\in\left(0,1\right)$ при выполнении условий

$$\mu\le L^{-1},\ \ L=\max\left\{\sup\left|\overline{Y}_\ell(x)\right|,\ x\in D,\ \ell=1,\ldots,n+m-1\right\}, \tag{20}$$

$$\overline{Y}_1(x)=x_2,\ldots,\overline{Y}_{n-1}(x)=x_n,\ \overline{Y}_n(x)=f(t,x)\big|_{a_i(t)=a_{i\min},b_j(t)=b_{j\min}},$$

$$\overline{Y}_{n+1}(x)=z_1,\ldots,\overline{Y}_{m+n-1}(x)=z_{m-1}.$$

Пусть ограниченный интервал времени T задан так: $T=[t_0,C\mu^{-1}]$, $C=\text{const}>0$ – известная величина, зависящая от параметров исходного процесса. Используем меру, характеризующую отклонение функции $x=x(t)$ от $x(t)=0$, в виде: $\rho = \rho(x) \equiv \sum_{i=1}^{N} x_i^2$, $N = n + m - 1$, полагая $x_{n+1} = z_1$, $x_{n+2} = z_2, \ldots, x_N = z_{m-1}$. Пусть заданы области Ω_0, $\Omega(t)$ возможных начальных и текущих состояний нестационарной системы (12)–(18) соответственно так: $\Omega_0 = \{x : \rho(x) \le \gamma, \gamma = \mathrm{const} > 0\}$, $\Omega(t) = \{x : \rho(x) \le \eta(t), \eta(t) > 0\}$,

$$\gamma \le \eta(t_0),\ \Omega_0 \subseteq \Omega(t_0);\quad \eta(t) \le \overline{\eta},\ \forall t \in T;\ \overline{\eta} = \mathrm{const} > 0; \tag{21}$$

$\gamma, \eta(t)$ – заданное число и ограниченная непрерывная в $\mathrm{T} \subset \mathrm{I}$ функция соответственно.

Ставится задача: при заданном законе управления (13), (15) – (17) определить условия, обеспечивающие выполнение по мере $\rho = \rho(x)$ свойства $x(t) \in \Omega(t),\ t \in T$, для решений нестационарной задачи Коши (12) – (18), характеризующей движение заданной системы автоматического управления переменной структуры с изменяющимися согласно (14) параметрами, функционально зависящей от качества процесса фильтрования сигнала управления, и при всех заданных возможных начальных значениях $x_0 \in \Omega_0$ процесса регулирования:

$$x(t_0) = x_0 \equiv \left(x_1^0, \ldots, x_n^0, z_1^0, \ldots, z_{m-1}^0\right),\ \forall x_0 \in \Omega_0. \tag{22}$$

При фиксированных $C,\ \mu^{-1}$ произвольные интервалы времени T_h, $h \ge 0$, пусть заданы аналогично [13 – 16], где $T_0 = T$ при $h = 0$, $T_{+\infty} = I$ при $h = +\infty$.

Определение 1. Динамический нестационарный процесс автоматического управления переменной структуры, функционально зависящий от качественных свойств фильтрования управляемого сигнала, описываемый задачей Коши (12)–(18), (22), называется технически устойчивым на заданном ограниченном промежутке времени $T \subset I$ по заданной мере $\rho(x)$, если вдоль возмущённых решений $x(t)$ задачи Коши (12)–(18), (22) для поставленной в соответствие исходному процессу меры $\rho(x)$ выполняется условие

$$\rho\left(x(t)\right) \le \eta(t),\ t \in T \subset I, \tag{23}$$

лишь только в начальный момент времени $t_0 \in T$ имеет место неравенство

$$\rho\left(x_0\right) \le \gamma,\ t_0 \in T \subset I, \tag{24}$$

где значение $\rho\left(x_0\right)$ (24) меры ρ определено на начальных значениях (22), а заранее заданные постоянная $\gamma = \mathrm{const} > 0$ и ограниченная функция $\eta(t)$ на заранее определенном интервале $T \subset I$ удовлетворяют условиям (21).

Определение 2. Если условия определения 1 выполняются на любом интервале времени $T_h \subseteq I$, то зависимый от фильтрованного управляемого сигнала нестационарный процесс автоматического управления переменной структуры (12)–(18), (22) называется технически устойчивым на бесконечном интервале времени I по мере $\rho(x)$.

Определение 3. Если при выполнении условий определения 2 дополнительно вдоль решений задачи Коши (12)–(18), (22) справедливо свойство

$$\lim_{t \to +\infty} \rho\left(x(t)\right) = 0, \tag{25}$$

то зависимый от фильтрованного управляемого сигнала нестационарный процесс автоматического управления переменной структуры (12) – (18), (22) называется асимптотически технически устойчивым по мере $\rho(x)$.

Определение 4. Зависимый от фильтрованного управляемого сигнала нестационарный процесс автоматического управления переменной структуры (12) – (18), (22) называется технически неустойчивым по мере $\rho(x)$ в T или в I при заданных постоянной γ и функции $\eta(t)$, когда при выполнении условия (24), заданного на любых начальных значениях (18) из области (22), для решений задачи Коши (12) – (18), (22) найдётся значение $t_1 \in T$ или $t_1 \in I$, $t_1 > t_0$, такое, для которого вместо (23) выполняется неравенство

$$\rho\left(x(t_1)\right) > \overline{\eta}\,,\;\; \overline{\eta} = \text{const} > 0\,. \tag{26}$$

2. Условия технической устойчивости по мере нестационарного процесса автоматического фильтрованного управления переменной структуры. С целью решения сформулированной основной задачи определим для системы (12) – (18), (22) функцию Ляпунова. Пусть в соответствие системе (12) – (18), (22) поставлен автономный процесс, который характеризуется устойчивой системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами без управления вида

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i+1}\,,\;\; i = \overline{1, n-1}\,;\;\; \frac{dx_n}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \overline{b}_i x_i\,,\;\; \left(\overline{b}_i = \text{const}\right), \tag{27}$$

$$\frac{dx_\ell}{dt} = 0\,,\;\; \ell = \overline{n+1, N}\,,\text{ при } x_{n+1} = z_1, \ldots, x_N = z_{m-1}\,.$$

Полагаем, что для (27) существует определённо положительная квадратичная форма [14 – 16, 22, 24]

$$Q_1\left(x_1, \ldots, x_N\right) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} b_{ij} x_i x_j\,,\;\; b_{ij} = b_{ji}\,,\;\; b_{ij} = \text{const}\,, \tag{28}$$

для которой по предположению полная производная по t в силу (27) пусть равна

$$\frac{dQ_1}{dt} = W\left(x_1, \ldots, x_N\right) \equiv -\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,. \tag{29}$$

Обозначим $\varepsilon_i > 0$, $\left(i = \overline{1, N}\right)$ собственные значения в Q_1 (28), предполагая $\varepsilon_i \neq \varepsilon_j$. При (28), (29) рассмотрим функцию

$$\overline{V}\left(t, x_1, \ldots, x_N\right) = \exp\left[\beta(t)\right]\; Q_1\left(x_1, \ldots, x_N\right), \tag{30}$$

где $\beta(t)$ – функция со свойствами согласно [14 – 16,22] и

$$\left|\beta(t)\right| \le K\,,\;\; \left|d\beta(t)/dt\right| \le K_1\,;\;\; K, K_1 = \text{const} > 0\,. \tag{31}$$

Полагаем, что [22, 24]

$$\overline{V}\left(t, x\right) \ge \tilde{c}\rho(x)\,,\;\; \forall t \in T\,,\;\; \forall x \in D\,,\;\; \tilde{c} = \text{const}\,;$$

$$0 < \tilde{c} \le \chi\varepsilon_1\,,\;\; \varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon_i, i = \overline{1, N}\right\},\;\; \chi = \min_{t \in T}\left\{\exp\left[\beta(t)\right]\right\}. \tag{32}$$

Пусть существуют $\varepsilon_N = \max\left\{\varepsilon_i, i = \overline{1, N}\right\}$, $\Lambda = \max\limits_{t \in T}\left\{\exp\left[\beta(t)\right]\right\}$ со свойством

$$\Lambda\varepsilon_N > 1\,. \tag{33}$$

При (28), (30) – (32) и числовом параметре $\theta \equiv \Lambda\varepsilon_N$ (33) рассматриваем нормированную определённо положительную функцию вида

$$V(t,x)=\exp\left[\beta(t)\right]V_1(x),\ V_1(x)\equiv\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}\frac{b_{ij}}{\theta}x_i x_j\,. \tag{34}$$

Обозначим $\mu_i, \left(i=\overline{1,N}\right)$ собственные значения формы $V_1(x)$ (34), где $\mu_i>0,\ \left(i=\overline{1,N}\right)$. Согласно [14 – 16, 22, 24], будут справедливы неравенства

$$V(x,t)\le\rho(x),\ \forall t\in T\,,\ \forall x\in D\,; \tag{35}$$

$$0<\exp\left[\beta(t)\right]\mu_N\le 1,\ \forall t\in T\,,\ \mu_N=\max\left\{\mu_i,\ i=\overline{1,N}\right\}. \tag{36}$$

Для $V(t,x)$ (34) условие (32) верно при $0<\tilde{c}\le\chi\varepsilon_1\theta^{-1}$. Следовательно, при (35), (36) имеем для $\forall x_0\in\Omega_0$ (21) свойство

$$V\left(t,x_0\right)\le\rho(x_0)\le\gamma\,,\ \forall x_0\in\Omega_0\,,\ \forall t\in T\,, \tag{37}$$

в то время как для $\bar{V}(t,x)$ (30), (31) свойство (37) справедливо лишь в $\Omega_{01}\subset\Omega_0:\ \Omega_{01}=\left\{x_0:\rho(x_0)\le\left(r/\sqrt{\theta}\right)^2<r^2,\ r^2\equiv\gamma\right\}$, где r – радиус N-мерной области Ω_0 [13 – 16, 22, 24].

Полагаем, что в области $\bar{K}=\left\{t,V:t\in T_h\subseteq I;\ \left|V\right|<+\infty\right\}$ определена непрерывная функция $Z(t,V)$ со свойством: $Z(t,0)\equiv 0$. Рассмотрим в $\bar{K}$ задачу Коши сравнения для (12) – (18), (22) [14 – 16, 22, 24]

$$dz/dt=Z\left[t,z+\sigma(t)\right],\ \sigma(t)=M\int_{t_0}^{t}\bar{n}(\tau)d\tau\,,\ t\in T_h\subseteq I\,, \tag{38}$$

$$z(t_0)=\bar{z}_0\ge V_0\,,\ 0<\bar{z}_0\left(\chi\mu_1\right)^{-1}\le b\,,\ b\le\eta(t_0)\,,\ b\ge\gamma\,, \tag{39}$$

($M=\text{const}>0$, $b=\text{const}>0$, $\bar{z}_0=\text{const}>0$ – наперёд заданы);

$$V_0=\max_{x_0\in\Omega_0}\left\{\exp\left[\beta\left(t_0\right)\right]V_1\left(x_0\right)\right\},\ V_1\left(x_0\right)\equiv\frac{1}{\theta}\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}b_{ij}x_i^0x_j^0\,;$$

$\bar{n}(t)$ – заданная ограниченная в $T\subset I$ функция, для которой существует интеграл $\sigma(t)$ в (38).

Принимая во внимание, что $x_{n+1}=z_1,\ldots,\ x_N=z_{m-1}$, согласно (34) получаем для $dV_1(x)/dt$:

$$\frac{dV_1(x)}{dt}=\frac{1}{\theta}\left\{\sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}b_{ij}x_i+\sum_{\ell=1}^{m-1}b_{\ell j}z_\ell\right]\frac{dx_j}{dt}+\sum_{\ell=1}^{m-1}\left(\sum_{i=1}^{n}b_{i\ell}x_i+\sum_{r=1}^{m-1}b_{r\ell}z_\ell\right)\frac{dz_\ell}{dt}\right\}$$

$$N=n+m-1\,. \tag{40}$$

При соотношениях (27), (29), (34), (40) на решениях задачи (12)–(18), (22) обозначим

$$V(t) \equiv V(t, x(t)); \; W(t) \equiv -\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t);$$

$$\Phi(t, x(t)) \equiv \frac{d\beta(t)}{dt} V(t) + \frac{1}{\theta}\exp[\beta(t)] W(t);$$

$$\Phi_1(t, x(t), \mathrm{v}, u) \equiv \frac{1}{\theta}\exp[\beta(t)] \Bigg\{ \Bigg[\sum_{i=1}^{n-1} \left(\overline{b}_i - a_i(t) + b_m(t) A_{m-1,m-1} \psi_i^x \right) x_i(t) + \left(\overline{b}_n - a_n(t) \right) x_n(t) -$$

$$- \sum_{j=1}^{m-2} \left(\sum_{i=j}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{j,i} - b_m(t) A_{m-1,m-1} \psi_{m-1-j}^z \right) z_{m-1-j}(t) -$$

$$- \left(\sum_{i=1}^{m-1} b_{i+1}(t) A_{0,i} + b_1(t) - b_m(t) A_{m-1,m-1} \psi_{m-1}^z \right) z_{m-1}(t) \Bigg] \left(\sum_{i=1}^{n} b_{in}(t) x_i(t) + \sum_{\ell=1}^{m-1} b_{\ell n}(t) z_\ell(t) \right) -$$

$$- \left[\sum_{i=1}^{n} b_{i1}(t) x_i(t) + \sum_{r=1}^{m-1} b_{r1}(t) z_1(t) \right] \frac{1}{T_1} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \psi_i^x x_i(t) + \sum_{k=2}^{m-1} \psi_k^z z_k(t) + (\psi_1^z + 1) z_1(t) \right) +$$

$$+ \sum_{\ell=2}^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{n} b_{i\ell}(t) x_i(t) + \sum_{r=1}^{m-1} b_{r\ell}(t) z_\ell(t) \right) \frac{1}{T_\ell} \left(z_{\ell-1}(t) - z_\ell(t) \right) \Bigg\}.$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть справедливы предположения: 1. Нестационарная система (12) –(18), (22) имеет переменные параметры $a_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $b_j(t)$ $(j = 1, \ldots, m)$, подчинённые условиям (14). 2. Задача Коши (12) – (18), (22) удовлетворяет достаточным условиям, при которых существует её решение. 3. Существует определённо положительная функция V вида (34), собственные значения квадратичной формы которой μ_i $(i = 1, \ldots, N)$ удовлетворяют свойству (36). 4. Порождающая автономная система (27) удовлетворяет условию (29). 5. При разрывных логических законах (16), (17) изменения параметров ψ_i^x, $(i = 1, \ldots, n-1)$, ψ_j^z, $(j = 1, \ldots, m-1)$, произвольных начальных значениях $x_0 \in \Omega_0$ (21) на решениях исходной системы (12) – (18), (22) выполняются одновременно условия: а) заданная функция $Z(t, V)$ удовлетворяет условию мажорирования вида $\Phi(t, x(t)) \le Z(t, V(t, x(t)))$, $\forall t \in T$; б) имеет место оценка $\left|\Phi(t, x(t), \mathrm{v}, u)\right| \le M\overline{n}(t)$, $\forall t \in T$; в) множества $C_{\overline{z}_0} = \{x : V(x,t) \le \overline{z}_0\}$, Ω_0 удовлетворяют включению $\Omega_0 \subset C_{\overline{z}_0}$ при $t = t_0$; г) для малого параметра $\mu \in (0,1)$ справедливо условие (20). 6. Существует ограниченное верхнее решение $\overline{z}(t) = \overline{z}(t, t_0, \overline{z}_0)$ задачи Коши сравнения (38), (39), удовлетворяющее в области T `неравенству

$$(\mu_1 \chi)^{-1} \left[\overline{z}(t) + \sigma(t) \right] \le \eta(t), \; \forall t \in T. \tag{41}$$

Тогда справедливы свойства: 1. При разрывных логических законах изменения коэффициентов ψ_i^x, $(i = 1, \ldots, n-1)$, ψ_j^z, $(j = 1, \ldots, m-1)$ (16), (17) исходный нестационарный процесс фильтрованного управления с переменной структурой (12)

– (18), (22) для всех $x_0 \in \Omega_0$ и всех значений $a_i(t)$ $(i=1,\ldots,n)$, $b_j(t)$ $(j=1,\ldots,m)$ из Γ (14) технически устойчив по мере ρ на заданном ограниченном промежутке времени $T \subset I$. 2. Нестационарный процесс фильтрованного управления с переменной структурой (12)–(18), (22) технически устойчив по мере ρ на бесконечном интервале времени I, если условия 1– 6 теоремы 1 выполняются на каждом временном промежутке $T_h \subseteq I$. 3. В случае справедливости условия

$$z(t)+\sigma(t) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to +\infty \tag{42}$$

нестационарный процесс фильтрованного управления с переменной структурой (12) – (18), (22) асимптотически технически устойчив по мере ρ.

Доказательство. Используя условия 1– 4 теоремы 1 и полную производную dV/dt для (34) в силу системы (12), находим с учётом (27) – (29) вдоль решений исходного процесса

$$\frac{dV(t)}{dt}=\frac{d\beta(t)}{dt}V(t)+\exp\left[\beta(t)\right]\frac{1}{\theta}W(t)+\Phi_1\left(t,x(t),\mathrm{v},u\right). \tag{43}$$

Из соотношения (43) и условий 5. а), б) теоремы 1 вдоль решений процесса (12)–(18), (22) определяем оценку [13 – 16,22,23]

$$\frac{dV(t)}{dt}\le Z\left(t,V(t)\right)+M\overline{n}(t),\ t\in T,$$

из которой при $\tilde{\mathrm{v}}(t)=V(t)-\sigma(t)$ следует неравенство

$$\frac{d\tilde{\mathrm{v}}(t)}{dt}\le Z\left(t,\tilde{\mathrm{v}}(t)+\sigma(t)\right),\ t\in T. \tag{44}$$

Из (44) получаем систему вида (38), (39). По теореме 9.5 из [17] о дифференциальных неравенствах имеем (также см. [23])

$$\tilde{\mathrm{v}}(t)\le \overline{z}(t),\ \ t\in T.$$

Отсюда, с учётом (44), справедливо неравенство

$$V(t)\le \overline{z}(t)+\sigma(t),\ \ t\in T. \tag{45}$$

Принимаем во внимание, что здесь при условиях (36) верны свойства

$$\overline{z}(t)+\sigma(t)\le\left(\chi\mu_1\right)^{-1}\left[\overline{z}(t)+\sigma(t)\right],\ \ t\in T,\ \ 0<\chi\mu_1\le 1 \ \text{при}\ \chi>0. \tag{46}$$

Следовательно, используя (24), (39), из (46), (41) определяем неравенства

$$V(t)\le P(t)\le \eta(t),\ \ P(t)\equiv \overline{z}(t)+\sigma(t),\ \ t\in T; \tag{47}$$

$$\left(\chi\mu_1\right)^{-1}V_0\le b,\ V_0\le\left(\chi\mu_1\right)^{-1}V_0,\ \ t_0\in T,\ \ P(t_0)\equiv\overline{z}_0, \tag{48}$$

вдоль решений системы (12)–(18), (22). Из (45)–(48) получаем свойство включения

$$C_{p(t)}\subset\Omega(t),\ \ C_{p(t)}=\left\{x:\ V(t,x)\le P(t),\ \ \forall t\in T,\ \ P(t)\equiv\overline{z}(t)+\sigma(t)\right\}. \tag{49}$$

Из включения (49) и условия 5. в) теоремы 1 следует, что при всех $x_0\in\Omega_0$ (21) свойство технической устойчивости $x(t)\in\Omega(t)$ для решений процесса (12)–(18), (22) имеет место относительно меры $\rho(x)$ и функции Ляпунова $V(t,x)$ (34). Используя свойства (41), (46) и неравенства $\chi\mu_1\rho\left[x(t)\right]\le V\left(t,x(t)\right)\le P(t)$, находим на решениях системы (12) – (18), (22) оценку $\rho\left(x(t)\right)\le\eta(t)$, $\forall t\in T$, откуда следует утверждение 1 теоремы 1 при всех $x_0 \in \Omega_0$ (21) и при всех значениях $a_i(t), b_j(t)$ из области Γ (14).

Пусть при $t \to +\infty$ справедливо мажорирование $\left(\chi\mu_1\right)^{-1} P(t) \le \eta(t)$. Если при этом условия 1–6 теоремы 1 выполняются на каждом интервале времени $T_h \subseteq I$, то при всех $x_0 \in \Omega_0$ (21) и при всех $(a_i(t), b_j(t)) \in \Gamma$ (14), ($i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$), получаем утверждение 2 и при условии (42) утверждение 3 теоремы 1. В последнем случае видим, что при (42) функция $\rho\left(x(t)\right)$ удовлетворяет условию: $\rho\left(x(t)\right) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Полученные для (12) – (18), (22) условия технической устойчивости в T или в I по мере ρ не будут иметь места, если в этих областях имеем свойство

$$P(t) \to +\infty \text{ при } t \in T \text{ или } t \in I, \tag{50}$$

так как при (50) включение (49) не будет возможным.

В случае справедливости неравенства

$$\Phi(t, x) \le -\Phi_1(t, x, \mathrm{v}, u), \; t \in I, \tag{51}$$

исходный процесс (12)–(18), (22) устойчив по Ляпунову по мере ρ при параметрах $a_i(t), b_j(t)$ из области Γ (14). Следовательно, согласно (51) условия технической устойчивости по мере ρ при $t \in I$ включают условия устойчивости по Ляпунову исходного процесса (12) – (18), (22) по мере ρ при всех x_0 из Ω_0 и всех значениях внутренних параметров процесса из области Γ (14).

После попадания изображающей точки x процесса автоматического фильтрованного управления переменной структуры (12) – (18), (22) в область $C_{p(t)} \subset \Omega(t)$ (21) фазового пространства в соответствии с (47), (48) задающее воздействие $g(t)$ заданного процесса будет отслеживаться координатой $\varphi(t)$ с заданной точностью по мере ρ согласно (21) – (23) в заданном интервале времени T или I. Теорема 1 доказана.

3. Критерий технической неустойчивости по мере процесса автоматического фильтрованного управления с переменной структурой. Для заданной нестационарной системы автоматического фильтрованного управления (12) – (18), (22) определим достаточные условия её технической неустойчивости по мере ρ при $t \in T$ или $t \in I$. Для этого используем свойства соответствующих дифференциальных неравенств и оценок снизу, а также свойства нижних решений подходяще определённой задачи Коши сравнения при всех или некоторых начальных значениях $x_0 \in \Omega_0$ процесса и при всех значениях параметров из области Γ (14).

Для $V(x,t)$ (34) и $\rho(x)$ на решениях процесса (12)–(18), (22) имеем [13, 22–24]

$$V\left(t, x(t)\right) \le \rho\left(x(t)\right). \tag{52}$$

Положим, что в области $\overline{K}$ определена непрерывная функция $Q(t,V)$, отличная от функции $Z(t,V)$ и удовлетворяющая свойству: $Q(t,0) \equiv 0$, а также пусть задана функция $\omega(t)$, непрерывная при $t \in T_h \subseteq I$ и со свойствами интегрируемости, аналогичными свойствам функции $\overline{n}(t)$ в (38). Пусть заданные Q и ω порождают в $\bar{K}$ задачу Коши сравнения снизу для (12)–(18), (22) [2, 13-16,18, 19, 22, 23]

$$dr/dt = Q\left[t, r + \tilde{\sigma}(t)\right],\ \tilde{\sigma}(t) = M_1\int_{t_0}^{t}\omega(\tau)d\tau,\ t \in T_h \subseteq I; \tag{53}$$

$$r(t_0) = r_0 \le V_0 \equiv \exp\left[\beta(t_0)\right]V_1(x_0),\ x_0 \in \Omega_0,\ r_0 = \text{const} \ge 0, \tag{54}$$

$t_0 \in T_h \subseteq I$; (x_0 – некоторые или любые значения в Ω_0).

Теорема 2. Пусть верны предположения: 1. Выполняются условия 1 – 4 теоремы 1. 2. Вдоль решений задачи (12)–(18), (22) справедливы оценки снизу:

а). $Q\left(t, V(t, x(t))\right) \le \Phi\left(t, x(t)\right),\ t \in T_h \subseteq I$; (55)

б). $M_1\omega(t) \le \Phi_1\left(t, x(t), \mathrm{v}, u\right),\ M_1 = \text{const} > 0,\ t \in T_h \subseteq I$. (56)

3. Существует нижнее решение $\tilde{r}(t) = \tilde{r}\left(t, t_0, r_0\right)$ соответствующей процессу (12) – (18), (22) задачи Коши сравнения снизу вида (53), (54).

Тогда при разрывных логических законах изменения коэффициентов $\psi_i^x,\ \left(i = \overline{1, n-1}\right),\ \ \psi_j^z,\ \left(j = \overline{1, m-1}\right)$ (16), (17) процесс автоматического фильтрованного управления с переменной структурой (12) – (18), (22) технически неустойчив в T или I по мере ρ, если справедливо свойство

$$B(t) \equiv \tilde{r}(t) + \tilde{\sigma}(t) \to +\infty,\ t \in T \text{ или } t \in I. \tag{57}$$

Доказательство теоремы 2 подобно доказательству теоремы 1, однако, с учётом того, что определяются нижние оценки для исходного процесса. Именно, из (52) – (56) получаем оценки снизу вдоль решения процесса автоматического фильтрованного управления (12) – (18), (22) вида [13 – 16,23]:

$$B(t) \le V(t);\ B(t) \equiv \tilde{r}(t) + \tilde{\sigma}(t);$$

$$r_0 \le V_0 \equiv \exp\left[\beta(t_0)\right]V_1(x_0);\ t_0, t \in T_h \subseteq I; \tag{58}$$

$$B(t) \le \rho\left(x(t)\right);\ r_0 \le \rho(x_0);\ t_0, t \in T_h \subseteq I. \tag{59}$$

Из (58), (59) следует справедливость утверждения теоремы 2 при некоторых или при всех $x_0 \in \Omega_0$ и всех значениях параметров $a_i(t)\ \left(i = \overline{1, n}\right),\ \ b_j(t)\ \left(i = \overline{1, m}\right)$ из области Γ (14).

4.Техническая устойчивость нестационарного процесса автоматического фильтрованного управления с переменной структурой третьего порядка. Рассматривается нестационарная динамическая система с переменной структурой третьего порядка относительно основных переменных $x_i\ (i = 1, 2, 3)$, функционально содержащая подсистему фильтрования управляемого сигнала, вида [3, 4, 9]

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2,\ \frac{dx_2}{dt} = x_3,$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -\sum_{k=1}^{3} a_k(t)x_k - \left(b_2(t)A_{1,1} + b_3(t)A_{1,2}\right)z_1 - \left(b_1(t) + b_2(t)A_{0,1} + b_3(t)A_{0,2}\right)z_2 - b_3(t)A_{2,2}z_0;$$

$$\left(A_{0,1} = -\frac{1}{T_2},\ A_{0,2} = \frac{1}{T_2^2},\ A_{1,1} = \frac{1}{T_2},\ A_{1,2} = \frac{T_2 - T_1}{T_1T_2^2},\ A_{22} = \frac{1}{T_1T_2},\ \sum_{p=0}^{3} c_{p+1}(t)\left(\frac{d^p f}{dt^p}\right) = -\sum_{i=0}^{3} a_{i+1}(t)\left(\frac{d^i g}{dt^i}\right)\right); \tag{60}$$

$$\frac{dz_1}{dt}=\frac{1}{T_1}(z_0-z_1),\ \frac{dz_2}{dt}=\frac{1}{T_2}(z_1-z_2),\ \left(z_0=\mathrm{v},\ z_2=u;\ \ x_1\equiv x=\varphi-g\right); \qquad (61)$$

$$\mathrm{v}=-\psi_1^x x_1-\psi_2^x x_2-\psi_1^z z_1-\psi_1^z u; \qquad (62)$$

$$\psi_i^x=2^{-1}\left\{\alpha_i^x\left[1+\mathrm{sign}(x_i s)\right]+\beta_i^x\left[1-\mathrm{sign}(x_i s)\right]\right\},\ \alpha_i^x,\ \beta_i^x=\mathrm{const},\ i=1,2; \qquad (63)$$

$$\psi_j^z=2^{-1}\left\{\alpha_j^z\left[1+\mathrm{sign}(z_j s)\right]+\beta_j^z\left[1-\mathrm{sign}(z_j s)\right]\right\},\ \alpha_j^z,\ \beta_j^z=\mathrm{const},\ \ j=1,2; \qquad (64)$$

$$s=c_1x_1+c_2x_2+x_3;\ c_i=\mathrm{const},\ c_3=1; \qquad (65)$$

$$x_i(t_0)=x_i^0\left(i=1,2,3\right),\ x_4(t_0)=x_4^0\equiv z_1^0,\ x_5(t_0)=x_5^0\equiv z_2^0;$$

$$\left(z_1^0=z_1(t_0), z_2^0=z_2(t_0)\right),$$

$$\forall x_0=\left(x_1^0,\ldots,x_5^0\right)\in\Omega_0;\ x=\left(x_i,\ i=\overline{1,3};\ x_4=z_1,\ x_5=z_2\right)\in R^5. \qquad (66)$$

Здесь область Ω_0 определена с помощью меры $\tilde{\rho}(x)=\sum_{i=1}^{5}x_i^2$; области $T\subset I$, $D\subset R^5$, функции x,φ,g,f,u при $n=m=3$, $N=5$ аналогичны общему случаю; коэффициенты $A_{j,i}$ в (60) вычислены согласно (8), (12). Формирующая координата v, представляющая выходную координату формирующего устройства и заданная в виде линейной комбинации с разрывными коэффициентами ψ_i^x,ψ_j^z согласно (62) – (65), является координатой на входе коммутируемого внутренней обратной связью фильтра заданной системы: $\mathrm{v}=z_0$ [3, 4, 9]. Движение фильтра описывается уравнениями (61) с учётом (62). Полагаем, что коэффициенты $a_i(t),b_i(t)$ меняются с ограниченной скоростью в области

$$\Gamma=\Big\{a_i(t),\ \frac{da_i(t)}{dt},\ b_i(t),\ \frac{db_i(t)}{dt}:a_{i\min}\le a_i(t)\le a_{i\max},\ 0<\frac{da_i(t)}{dt}\le\bar{a}_i,\ b_{i\min}\le b_i(t)\le b_{i\max},$$
$$0<\frac{db_i(t)}{dt}\le\bar{b}_i,\ a_{i\min},a_{i\max},b_{i\min},b_{i\max}=\mathrm{const},\ \bar{a}_i,\bar{b}_i=\mathrm{const}>0,\ i=1,2,3\Big\}. \qquad (67)$$

Для системы (60)–(67) в $T\times D,\left(T\subset I,\ D\subset R^5\right)$ выберем функцию Ляпунова вида

$$\tilde{V}(t,x)=2^{-1}\exp\left[\beta(t)\right]\tilde{Q}(x),\ \tilde{Q}(x)=x\bar{B}x^*,\ \ x=\left(x_i,\ i=\overline{1,5}\right), \qquad (68)$$

где симметричная матрица $\bar{B}$ и её диагональные определители $\Delta_i\left(i=\overline{1,5}\right)$ равны:

$$\bar{B}=\begin{pmatrix}4&2&2&0&0\\2&4&2&0&0\\2&2&3&0&0\\0&0&0&a_{44}&0\\0&0&0&0&a_{55}\end{pmatrix},\ \Delta_1=4,\ \Delta_2=\begin{Vmatrix}4&2\\2&4\end{Vmatrix}=12,$$

$$\Delta_3 = \begin{Vmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{Vmatrix} = 20\,, \quad \Delta_4 = \Delta_3 a_{44} > 0 \text{ при } a_{44} = \text{const} > 0\,; \quad \Delta_5 = \Delta_4 a_{55} > 0$$

при $a_{55} = \text{const} > 0$ и $\Delta_4 > 0$; * – знак транспонирования.

Имеем собственные значения квадратичной формы $\tilde{Q}(x)$ в $\tilde{V}$ (68) [13 – 16, 24]:

$$\varepsilon_1 = (9 - \sqrt{41})/2\,,\ \varepsilon_2 = 2\,,\ \varepsilon_3 = (9 + \sqrt{41})/2\,,\ \varepsilon_4 = a_{44}\,,\ \varepsilon_5 = a_{55}\,. \qquad (69)$$

Обозначим: $\chi = \min\limits_{t \in T}\left\{\exp\left[\beta(t)\right]\right\}$, $\Lambda = \max\limits_{t \in T}\left\{\exp\left[\beta(t)\right]\right\}$, $\lambda_1 = \min\left\{\varepsilon_i,\ i = \overline{1,5}\right\}$, $\lambda_5 = \max\left\{\varepsilon_i,\ i = \overline{1,5}\right\}$. Если предположить, что a_{44}, a_{55} в (68), (69) представляют непрерывные, с ограниченными производными функции времени $t \in T \subset I$ при условиях $0 < a_{44}(t) \le N_4$, $0 < a_{55}(t) \le N_5$, $\left(N_4, N_5 = \text{const} > 0\right)$, то положим $\lambda_1 = \min\left\{\varepsilon_i,\ i = \overline{1,3};\ N_4, N_5\right\}$, $\lambda_5 = \max\left\{\varepsilon_i,\ i = \overline{1,3};\ N_4, N_5\right\}$. Отсюда имеем оценки [13 – 17,23]

$$\tilde{V}(t,x) \ge 2^{-1}\chi\lambda_1 \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \ge \tilde{c}\tilde{\rho}(x)\,,\ 0 < \tilde{c} \le 2^{-1}\chi\lambda_1\,. \qquad (70)$$

Далее вместо $\tilde{V}$ (68) используем нормированную функцию Ляпунова [13 – 15,22,24]

$$V(t,x) = \exp\left[\beta(t)\right]\ (2\theta)^{-1}\,\tilde{Q}(x)\,;\ \theta = \lambda_5\Lambda\,;\ \exp\left[\beta(t)\right]/\Lambda \le 1\,, \qquad (71)$$

в которой собственные значения её квадратичной формы $\mu_i\left(i = \overline{1,5}\right)$ удовлетворяют условиям

$$0 < \mu_5 \exp\left[(\beta(t)\right] \le 1\,,\ \mu_5 = \lambda_5/(2\theta),\ \forall t \in T \subset I\,; \qquad (72)$$

$$V(t,x) \ge \tilde{c}_1\tilde{\rho}(x)\,;\ 0 < \tilde{c}_1 \le \chi\mu_1\,,\ \mu_1 = \lambda_1/(2\theta);\ 0 < \chi\mu_1 \le 1\,. \qquad (73)$$

Для $\forall x \in \Omega_0$ в случае (71) – (73) справедливо неравенство [13 – 16]

$$V(t,x) \le r_1^2 \equiv \gamma,\ \ \gamma = \text{const} > 0,\ \ \ t > t_0\,. \qquad (74)$$

На решениях процесса (60) – (67) при $\forall x_0 \in \Omega_0$ находим

$$\frac{dV(t)}{dt} \le \Phi(t, x(t)) + \left|\Phi_1(t, x(t), \mathrm{v}, u)\right|\,; \qquad (75)$$

$$\Phi(t, x(t)) = \left(d\beta(t)/dt\right)V(t) - (\exp\left[\beta(t)\right]/\theta)\sum_{i=1}^{3} x_i^2(t)\,,\ V(t) = V(t, x(t))\,;$$

$$\Phi_1(t, x(t), \mathrm{v}, u) = \left(\exp\left[\beta(t)\right]/\theta\right)\left[U_1(t, \overline{x}(t)) + U_2(t, \overline{x}(t)) + U_3(t, \overline{x}(t), z_1(t)) + \right.$$
$$\left. + U_4(t, x(t)) + U_5(t, x(t), \psi^x, \psi^z)\right]\,;$$

$$\overline{x} = (x_1, x_2, x_3),\ \psi^x = \left(\psi_1^x, \psi_2^x\right),\ \psi^z = \left(\psi_1^z, \psi_2^z\right);\ R_1(t) = b_2(t)A_{1,1} + b_3(t)A_{1,2}\,,$$

$$R_2(t) = b_1(t) + b_2(t)A_{0,1} + b_3(t)A_{0,2}\,,\quad R_3(t) = b_3(t)A_{2,2}\,;$$

$$U_1(t, \overline{x}(t)) = (1 - 2a_1(t))x_1^2(t) + (3 - 2a_2(t))x_2^2(t) + (1 - 3a_3(t))x_3^2(t)\,,$$

$$U_2(t,\bar{x}(t)) = -\big[2(a_1(t)+a_2(t)-2)x_1(t)x_2(t)+(3a_1(t)+2a_3(t)-2)x_1(t)x_3(t)+$$
$$+(2a_3(t)-3a_2(t)-6)x_2(t)x_3(t)\big],$$
$$U_3(t,\bar{x}(t),\ z_1(t)) = -\left[R_1(t)X(\bar{x}(t))+\left(a_{44}/T_1\right)z_1(t)\right] z_1(t),$$
$$U_4(t,x(t)) = -\left[R_2(t)X(\bar{x}(t))-\left(a_{55}/T_2\right)(z_1(t)-z_2(t))z_2(t)\right],$$
$$U_5(t,x(t),\psi^x,\psi^z) = -\left[R_3(t)X(\bar{x}(t))-\left(a_{44}/T_1\right)z_1(t)\right]\left(\psi_1^x x_1(t)+\psi_2^x x_2(t)+\psi_1^z z_1(t)+\psi_2^z z_2(t)\right);$$
$$X(\bar{x}(t)) = 2x_1(t)+2x_2(t)+3x_3(t).$$

Пусть функция $\eta(t)$ (21), (23) в области $T\in I$ задана в виде:

$$\eta(t) = e^{-(t^2-t_0^2)}\left[b+\bar{M}e^{-t_0^2}\left(\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]-\exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right]\right)\right], \tag{76}$$

$b=\text{const}>0,\ \bar{M}=\text{const}>0,\ \mu\in(0,1),\ t\ge t_0,\ t_0\ge 0.$

Полагаем, что для (60) – (67) справедливы условия

$\Phi(t,x(t))\le -tV(t,x(t))$, $\left|\Phi(t,x(t),\mathrm{v},u)\right|\le M\bar{\omega}_1(t)$, $t\in T$, $M=\text{const}>0$, $(\chi\mu_1)^{-1}M\le\bar{M}$;

$$\bar{\omega}_1 = \frac{1}{(\mu+t)^2}\exp\left[\frac{1}{\mu+t}-t^2\right]\to 0,\quad t\to+\infty. \tag{77}$$

Используем соответствующую систему сравнения

$$\frac{dz}{dt} = -2t[z+\sigma(t)],\ \ \sigma(t)=M\int_{t_0}^{t}\bar{\omega}_1(\tau)d\tau,\ t\in T, \tag{78}$$

$$z(t_0)=z_0\ge V_0\equiv\max_{x_0\in\Omega_0}V(t_0,x_0);\ \ 0<\chi\mu_1)^{-1}z_0\le b,\ t_0\in T, \tag{79}$$

$$(\chi\mu_1)^{-1}M\le\bar{M};\ \ b\ge\gamma,$$

с её решением

$$\bar{z}(t) = \exp\left[-(t^2-t_0^2)\right]\left[z_0+Me^{-t_0^2}\left\{\exp\left[\frac{1}{\mu+t_0}\right]-\exp\left[\frac{1}{\mu+t}\right]\right\}\right]-\sigma(t), \tag{80}$$

$$\sigma(t) = M\int_{t_0}^{t}\frac{1}{(\mu+\tau)^2}\exp\left[\frac{1}{\mu+\tau}-\tau^2\right]d\tau.$$

При (76) – (80) вдоль решений системы (60) – (67) имеем

$$\chi\mu_1\tilde{\rho}(x(t))\le V(t)\le\bar{z}(t)+\sigma(t)\equiv P(t),\ \ \mathrm{P}(t)\le\eta(t),\ \ (\chi\mu)^{-1}\mathrm{P}(t)\le\eta(t) \tag{81}$$

$(\chi\mu)^{-1}V_0\le b,\ V_0\le b,\ t\in T;\ \eta(t_0)\equiv b;\ P(t_0)\equiv z_0.$

Из (77) – (81) получаем свойство включения множеств

$$C_{P(t)}\subset\Omega(t);\ C_{P(t)}=\left\{x: V(t,x)\le P(t),\ \forall t\in T\right\}. \tag{82}$$

Учитывая (79), (80), (76), находим $\rho(x(t))\le\eta(t),\ t\in T$. Следовательно, исходный нестационарный процесс автоматического управления (60) – (67) при $\forall x_0\in\Omega_0$ технически устойчив на интервале $T\subset I$ по мере $\tilde{\rho}$ согласно теореме 1. Функция

$P(t)$ (81) является ограниченной при $t \in T_h \subseteq I$ при любых фиксированных значениях параметра $\mu \in (0,1)$. Кроме того, при этом имеем $\lim_{t\to+\infty} P(t) = 0$. Отсюда, согласно теореме 1, соотношения (77) – (81) обеспечивают асимптотическую техническую устойчивость по мере $\tilde{\rho}$ процесса (60) – (67) при всех $x_0 \in \Omega_0$. Далее, пусть $t_0 = 0$ и $\mu \to 0$. Тогда, согласно (80), (81), если при $t_0 = 0$ и произвольных $t \geq 0$ величина μ^{-1} растёт одинаково с ростом t^2, тогда предел $\lim_{t\to+\infty} P(t)$ – конечная величина, и, следовательно, в этом случае процесс (60) – (67) технически устойчив по мере $\tilde{\rho}$ на бесконечном временном интервале I, однако, не асимптотически. Если же величина μ^{-1} будет расти быстрее, чем t^2, то сформулированные условия технической устойчивости системы не будут справедливы, поскольку тогда включение (82) не будет иметь места, так как будем иметь $P(t) \to +\infty$ при $t \in T$ или $t \in I$.

При условиях 1 – 3 теоремы 1 для (60) – (67) и при (72) для $\tilde{\rho}$ в $T \times D$ имеем [13 – 17]

$$V(t,x) \leq \tilde{\rho}(x). \tag{83}$$

Пусть вдоль решений задачи (60) – (67) справедливы нижние оценки

$$\begin{gathered} -2MtV(t,x(t)) \leq \Phi(t,x(t)),\ t \in T_h \subseteq I; \\ M_1\overline{\omega}_2(t) \leq \Phi_1(t,x(t)\mathrm{v},u);\ M, M_1 = \mathrm{const} > 0,\ t \in T_h \subseteq I; \\ \overline{\omega}_2(t) = \frac{1}{(\mu+t)^2}\exp\left[\frac{1}{\mu+t} - Mt^2\right] \to 0,\ t \to +\infty,\ \mu \in (0,1). \end{gathered} \tag{84}$$

При (84) для (60) – (67) получаем систему сравнения снизу

$$\frac{dr}{dt} = -2Mt\left[r + \tilde{\sigma}(t)\right],\ \tilde{\sigma}(t) = M_1\int_{t_0}^{t}\overline{\omega}_2(\tau)d\tau,\ \mathrm{t} \in \mathrm{T_h} \subseteq \mathrm{I}; \tag{85}$$

$$r(t_0) = r_0 \leq V_0 \equiv V(t_0,x_0),\ r_0 = \mathrm{const} \geq 0,\ \mathrm{t_0} \in \mathrm{T_h} \subseteq \mathrm{I} \tag{86}$$

при некоторых или всех $x_0 \in \Omega_0$. Из (83) – (86) имеем оценки снизу вдоль решения процесса (60) – (67) [9, 13 – 17]

$$P_1(t) \leq V(t),\ P_1(t) = \exp\left[-M(t^2 - t_0^2)\right]\left[r_0 + M_1e^{-Mt_0^2}\left\{\exp\left(\frac{1}{\mu+t_0}\right) - \exp\left(\frac{1}{\mu+t}\right)\right\}\right], \tag{87}$$

$$\begin{gathered} r_0 \leq V_0;\ t_0, t \in T_h \subseteq I; \\ P_1(t) \leq \tilde{\rho}(x(t));\ r_0 \leq \tilde{\rho}(x_0);\ t_0, t \in T_h \subseteq I. \end{gathered} \tag{88}$$

Система (60) – (67), согласно (88) и теореме 2, будет технически неустойчивой в T или I по мере $\tilde{\rho}$ при условии

$$P_1(t) \to +\infty,\ t \in T \text{ или } t \in I. \tag{89}$$

В частности, условие (89) имеет место при $t_0 = 0$ и произвольных $t \geq 0$ в случае мажорант снизу (84), когда $\mu \to 0$ и если, согласно (87), (88), величина μ^{-1} будет возрастать быстрее, чем t^2. При этом и для $\eta(t)$ (76) будем иметь $\eta(t) \to +\infty$ при $\mu \to 0$, $t \to +\infty$ одновременно с (89) в (87), (88).

Условия устойчивости по Ляпунову относительно меры $\tilde{\rho}(x)$ процесса (60) – (67) имеют содержание, аналогичное общему виду (51).

При надлежащем смысловом представлении коэффициентов в трёхмерном случае рассмотренная система с переменной структурой (60) – (67), в частности, представляет вариант математической модели режима нестационарного процесса управления программным полетом объекта в случае изменяющихся во времени основных параметров, которые характеризуют управляемый объект в движении, например изменение массы объекта в связи с выгоранием топлива, и точность заданной траектории его полета, а также переменные показатели величин внешней среды [1, 2, 3, 6 – 9, 16].

Полученные здесь критерии технической устойчивости нестационарных процессов автоматического фильтрованного управления с переменной структурой не зависят от условий возможного существования скользящего режима [1, 3,4,13–16] в заданных процессах управления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ащепков Л.Т. Оптимальное управление разрывными системами. Новосибирск: Наука, 1987. 226 с.
2. Байрамов Ф.Д. Обеспечение технической устойчивости управляемых систем // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Наука, 1991. С.134–139.
3. Емельянов С.В., Уткин В.И., Таран В.А. и др. Теория систем с переменной структурой. М.: Наука, 1970. 592 с.
4. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. Управление при неопределённости. М.: Наука, 1997. 352 с.
5. Кунцевич В.М., Лычак М.М. Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова. М.: Наука, 1977. 400 с.
6. Куликовский Р. Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. (Перев. с польского). М.: Наука, 1967. 380 с.
7. Петров Б.Н., Соколов Н.И., Липатов А.В. и др. Системы автоматического управления объектами с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1986. 256 с.
8. Попов Е.П., Пальтов И.П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1960. 792 с.
9. Уткин В.И. Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой. М.: Наука, 1974. 272 с.
10. Абгарян К.А. Устойчивость движения на конечном интервале / Итоги науки и техники. Общая механика. М.: ВИНИТИ. – 1976. – **3**. С.43–124.
11. Барбашин Е.А. Введение в теорию устойчивости. М.: Наука, 1967. 223 с.
12. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 224 с.
13. Matviychuk K.S. Technical Stability of Nonstationary Automatic-Control Systems with Variable Structure // Int. Appl. Mech. 2003. **39**, № 3. P.356–367.
14. Matviychuk K.S. Stability of Nonstationary Automatic-Control Sytems of Variable Structure in Forced Motion // Int. Appl. Mech. 2003. **39**, N 10. P.1221–1230.
15. Matviychuk K.S. Technical Stability of Forced Motion in Nonstationary Automatic Control Systems of Variable Structure // Int. Appl. Mech. 2004. **40**, № 1. P.103–114.
16. Matviychuk K.S. Asymptotic Technical Stability by the Measure of Nonlinear Control Motion of an Elastic Flying Systems // Int. Appl. Mech. 2004. **40**, № 4. P.508 – 518.
17. Szarski J. Differential Inequalities. Warszawa: PWN, 1967. 256 p.

18. Бублик Б.Н., Гаращенко Ф.Г., Кириченко Н.Ф. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков. Киев: Наукова думка, 1985. 304 с.
19. Гаращенко Ф.Г., Пантилиенко Л.А. Исследование задач практической устойчивости и чувствительности динамических систем с переменной структурой // Автоматика. 1993. №2. С. 3–8.
20. Зубов В.И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 496 с.
21. Каменков Г.И. Об устойчивости на конечном интервале времени // Прикл. математика и механика. 1953. **17**. № 5. С.529–540.
22. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 481 с.
23. Лаврентьев М.А., Люстерник Л.А. Основы вариационного исчисления. М.–Л.: ОНТИ, 1935. Т.1. Ч. 1. 148 с.
24. Larin V.B. On Stabilization of Systems with Delay // Int. Appl. Mech. 2008. **44**, № 10. P. 1148 – 1160.
25. Larin V.B. Control of a Compound Wheeled Vehicle with Two Steering Wheels // Int. Appl. Mech. 2008. **44**, №12. P. 1413 – 1420.
26. Larin V.B. Solution if Matrix Equations in Problems of the Mechanics and Control // Int. Appl. Mech. 2009. **45**, № 8. P. 847 – 872.
27. Larin V.B. Control Problems for Wheeled Robotic Vehicles // Int. Appl. Mech.– 2009. **45**, № 4. P. 363 – 388.
28. Lila D.M., Martynyuk A.A. Setting up Lyapunov Functions for the Class of Systems with Quasiperiodic Coefficients // Int. Appl. Mechanics. 2008. **44**, № 12. P. 1421 – 1429.

Сведения об авторе:

Матвийчук Константин Саввич,
Институт механики им. С.П. Тимошенко НАН Украины, Киев (Украина)
E-mail: model@inmech.kiev.ua; gyaroschuk@ukrtelecom.ua

Поступила в редакцию 09.01.2012