ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №2, 2012 Механика

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАГНИТОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩИХ (НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ) ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Саркисян Л.С., Саркисян С.О.

Ключевые слова: микрополярный, электропроводящий, оболочка, тонкая, магнитоупругость, модель.
Key words: micropolar, conductive, shell, thin,magnetoelasticity, model.

Սարգսյան Լ.Ս., Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար էլեկտրահաղորդիչ (ոչ ֆերոմագնիսական) բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության մաթեմատիկական մոդելները

Աշխատանքում հիմք ընդունելով թաղանթի բարակ տիրույթում միկրոպոլյար էլեկտրահաղորդիչ (ոչ ֆերոմագնիսական) նյութի դեպքում մագնիսաառաձգականության եռաչափ դինամիկական տեսության նախնական - եզրային խնդրի ասիմպտոտիկ լուծման որակական առանձնահատկությունները, ընդունվում են բավական ընդհանուր բնույթի վարկածներ և, կախված միկրոպոլյար նյութի ֆիզիկական անչափ պարամետրերի ընդունած արժեքներից կառուցվում են միկրոպոլյար էլեկտրահաղորդիչ բարակ թաղանթների մագնիսաառաձգականության ազատ և կաշկանդված պտույտներով կիրառական մոդելները:

Sargsyan L.S., Sargsyan S.H.
Mathematical Models of Magnetoelasticity of Micropolar Conductive (No Ferromagnetic) Thin Shells

In the paper, taking into consideration qualitative aspects of the asymptotic solution of three dimensional initial boundary-value problem of magnetoelasticity for micropolar conductive (no ferromagnetic) body, general hypotheses are formulated and, depending on values of physical dimensionless parameters, general mathematical models of magnetoelasticity of micropolar conductive thin shells with free and constrained rotations are constructed.

В работе, принимая за основу качественные стороны асимптотического решения в тонкой области оболочки начально-граничной динамической задачи трёхмерной магнитоупругости для микрополярного электропроводящего (неферромагнитного) тела, формулируются достаточно общие гипотезы и, в зависимости от значений физических безразмерных параметров, построены общие математические модели магнитоупругости микрополярных электропроводящих тонких оболочек со свободным и со стеснённым вращениями.

Введение. С проблемой о построении моделей механики твёрдого деформируемого тела, учитывающей не только силовые, но и моментные напряжения, приходится сталкиваться при изучении задач об определении напряжённо-деформированного состояния для материалов, обладающих электромагнитными свойствами [1-7]. С этой точки зрения актуально построение общих математических моделей упругих электропроводящих неферромагнитных, а также ферромагнитных тонких оболочек и пластин на основе трёхмерной несимметричной теории магнитоупругости.

В работах [8-11], применяя асимптотический метод, впервые сформулированы гипотезы магнитоупругости тонких тел и построены математические модели магнитоупругости электропроводящих тонких оболочек и пластин на основе классической теории упругости.

В работах [12-14] с требуемой математической полнотой изучены асимптотические свойства решения начально-граничной задачи классической трёхмерной магнитоупругости в области тонкой оболочки, сформулированы адекватные гипотезы и построены прикладные модели магнитоупругости и магнитотермоупругости тонких оболочек.

В работах [15-19] на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое подтверждение, построены общие прикладные модели микрополярно-упругих тонких оболочек, пластин и стержней.

В работах [20,21] асимптотическим методом изучена начально-краевая динамическая задача микрополярной магнитоупругости в области тонкой оболочки.

В данной работе на основе качественных результатов асимптотического анализа [20,21] начально-граничной задачи микрополярной магнитоупругости в области тонкой оболочки формулируются адекватные гипотезы и строятся общие прикладные модели магнитоупругости микрополярных тонких оболочек. Основные уравнения и начально-граничные условия магнитоупругости микрополярных пластин и стержней могут быть получены как частные случаи теории оболочек.

1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропную оболочку постоянной толщины $2h$ как трёхмерное микрополярное упругое электропроводящее (неферромагнитное) однородное тело и отнесём его к триортогональной неподвижной системе координат [12]. Пусть оболочка находится во внешнем стационарном однородном магнитном поле с заданным вектором напряжённости $\vec{H}^0 = \{H_{01}, H_{02}, H_{03}\}$. Будем исходить из основных уравнений линеаризованной теории магнитоупругости для трёхмерной микрополярной среды [3-6].

Уравнения движения микрополярного (неферромагнитного) упругого электропроводящего тела с учётом массовых сил электромагнитного происхождения:

$$\nabla_m \sigma^{mn} + f^n = \rho \frac{\partial^2 V^n}{\partial t^2}, \qquad \nabla_m \mu^{mn} + e^{nmk}\sigma_{mk} = J\frac{\partial^2 \omega^n}{\partial t^2}; \tag{1}$$

обобщённый закон Гука

$$\begin{aligned} \sigma_{mn} &= (\mu+\alpha)\gamma_{mn} + (\mu-\alpha)\gamma_{nm} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{nm}, \\ \mu_{mn} &= (\gamma+\varepsilon)\kappa_{mn} + (\gamma-\varepsilon)\kappa_{nm} + \beta\kappa_{kk}\delta_{nm}; \end{aligned} \tag{2}$$

геометрические соотношения

$$\gamma_{mn} = \nabla_m V_n - e_{kmn}\omega^k, \qquad \kappa_{mn} = \nabla_m \omega_n. \tag{3}$$

Уравнения электродинамики (квазистационарной) в области движущегося тела (с конечной электропроводностью)

$$\mathrm{rot}\vec{h} = \frac{4\pi}{c}\vec{j}, \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{h} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{E} = 4\pi\rho_e. \tag{4}$$

Уравнения электродинамики (квазистационарной) во внешней от тела области (вакуума):

$$\mathrm{rot}\vec{h}^{(e)} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{E}^{(e)} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{h}^{(e)}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\vec{E}^{(e)} = 0, \quad \mathrm{div}\vec{h}^{(e)} = 0. \tag{5}$$

Здесь $m, n = 1, 2, 3$; σ^{nm}, μ^{nm} – компоненты силового и моментного тензоров напряжений; γ_{mn}, κ_{mn} – компоненты тензора деформации и тензора изгиба-кручения; V_n – компоненты вектора перемещения; ω_n – компоненты вектора независимого поворота;

$$\vec{F}=\left\{f^1,f^2,f^3\right\}=\frac{1}{c}\vec{j}\times\vec{H}^0, \qquad (6)$$

$\vec{F}$ – вектор массовых сил электромагнитного происхождения;

$$\vec{j}=\sigma\left(\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\times\vec{H}^0\right), \qquad (7)$$

$\vec{j}$ – вектор плотности возбуждённого в теле полного электрического тока; $\vec{E},\vec{E}^{(e)}$ – векторы напряжённости возбуждённого электрического поля, соответственно, в теле и в вакууме; $\vec{h},\vec{h}^{(e)}$ – векторы напряжённости возбуждённого магнитного поля, соответственно, в теле и в вакууме; ρ_e – объёмная плотность электрического заряда в теле; $\lambda,\mu,\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon$ – упругие константы микрополярного материала тела, ρ – плотность, J – мера инерции при вращении; σ – коэффициент электропроводности материала тела; c – электродинамическая постоянная, численно равная скорости света в вакууме; δ_{nm} – символы Кронекера, e^{nmk} – компоненты тензора Леви-Чивиты.

Механические граничные условия на лицевых поверхностях оболочки имеют вид:

$$\sigma_{k3}\Big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm q_k^{\pm} \quad (k=1,2,3), \qquad \mu_{k3}\Big|_{\alpha_3=\pm h}=\pm m_k^{\pm}. \qquad (8)$$

На поверхности края оболочки Σ предполагается, что заданы граничные условия либо первого, либо второго, либо смешанного варианта граничных условий микрополярной теории упругости.

Электродинамические граничные условия, как на лицевых поверхностях оболочки, так и на поверхности края оболочки будут представлять следующие соотношения:

$$n^k\left[E_k\right]_-=4\pi\hat{\rho}_e,\ e^{nmk}n_m\left[h_k\right]_-=0,\ n^k\left[h_k\right]_-=0,\ e^{nmk}n_m\left[E_k\right]_-=0, \qquad (9)$$

Здесь $[\cdot]_-$ – скачок искомой величины через поверхность раздела сред (тела и вакуума); $\hat{\rho}_e$ – плотность поверхностного электрического заряда; $n^k\ (k=1,2,3)$ – компоненты вектора нормали к поверхности тела.

Условия на бесконечности будут служить требованию, чтобы убывание определяющих векторов электромагнитного поля в вакууме с расстоянием происходило по закону:

$$\left|\vec{E}^{(e)}\right|=0\left(\frac{1}{r}\right),\ \left|\vec{h}^{(e)}\right|=0\left(\frac{1}{r}\right) \quad \text{при} \quad r\to\infty,\ \ 0\le t<\infty, \qquad (10)$$

где r – расстояние от начала координат до точки наблюдения.

При помощи начальных условий, при $t=0$, задаются значения компонентов вектора перемещения, вектора независимого поворота, компоненты линейной и вращательной скоростей точек тела, а также компоненты определяющих векторов возбуждённого электромагнитного поля в теле и в вакууме.

Отметим, что при

$$\alpha=0 \qquad (11)$$

из модели (1)–(10) будут отделяться уравнения, граничные и начальные условия трёхмерной теории магнитоупругости на основе классической теории упругости, а при

$$\alpha\to\infty \qquad (12)$$

будет отделяться трёхмерная модель микрополярной магнитоупругости со стеснённым вращением.

2. Метод гипотез. Прикладная модель магнитоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений. Основная проблема о построении общих математических моделей магнитоупругости тонких оболочек для электропроводящего микрополярного материала заключается в приближённом, но адекватном сведении соответствующей трёхмерной начально-краевой задачи к двумерной задаче. С инженерной точки зрения (как это сложилось исторически) характерен тот алгоритм, когда это сведение осуществляется на основе метода гипотез. На наш взгляд, уместно сформулировать как гипотезы именно качественные результаты исходного приближения асимптотического решения трёхмерной магнитоупругой начально-краевой задачи для электропроводящего микрополярного материала в области тонкой оболочки [20,21].

Поступая таким образом, за основу построения общих прикладных моделей микрополярной магнитоупругости тонких оболочек примем следующие достаточно общие гипотезы:

а) в процессе деформации первоначально прямолинейные и нормальные к срединной поверхности оболочки волокна свободно поворачиваются в пространстве как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной срединной поверхности.

Принятую гипотезу математически запишем так:

$$V_i = u_i(\alpha_1,\alpha_2) + \alpha_3\psi_i(\alpha_1,\alpha_2), \quad V_3 = w(\alpha_1,\alpha_2), \tag{13}$$

$$\omega_i = \Omega_i(\alpha_1,\alpha_2), \qquad \omega_3 = \Omega_3(\alpha_1,\alpha_2) + \alpha_3\iota(\alpha_1,\alpha_2) \quad (i=1,2),$$

Таким образом, нормальное к срединной поверхности перемещение и тангенциальные независимые повороты считаются постоянными функциями по толщине оболочки, а тангенциальные перемещения и нормальный независимый поворот – меняющимися по линейному закону функциями.

Отметим, что с точки зрения перемещений, гипотеза (13), это по сути дела, представляет собой кинематическую гипотезу Тимошенко в классической теории упругих оболочек [22, 23]. Гипотезу (13), в целом, как в работах [15-19], назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории оболочек;

б) силовое напряжение σ_{33} можно пренебрегать относительно силовых напряжений $\sigma_{ii}\,(i=1,2)$ в обобщённом законе Гука (2);

в) пользуясь допущением о тонкостенности оболочки, примем $1+\dfrac{\alpha_3}{R_i}\approx 1$ $(i=1,2)$, где R_i – радиусы главных кривизн срединной поверхности оболочки;

г) тангенциальные компоненты вектора напряжённости возбуждённого электрического поля $E_i\,(i=1,2)$ и нормальная компонента вектора напряжённости возбуждённого магнитного поля h_3, по толщине трёхмерной оболочки остаются неизменными [8-10];

д) нормальной компонентой j_3 электрического тока проводимости в трёхмерной тонкой области оболочки можем пренебрегать;

е) сначала для определения тангенциальных перемещений V_i, силовых и моментных напряжений и электродинамических величин в области оболочки примем, что касательные силовые напряжения σ_{3i} и моментное напряжение μ_{33} не зависят от координаты α_3.

$$\sigma_{3i}=\overset{0}{\sigma}_{3i}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right)\qquad\left(i=1,2\right),\quad \mu_{33}=\overset{0}{\sigma}_{33}\left(\alpha_1,\alpha_2,t\right). \tag{14}$$

После определения указанных величин, напряжения σ_{3i},μ_{33} окончательно определим, прибавляя к принятым значениям (14) слагаемые, получаемые соответственно, из первого, второго и пятого скалярных уравнений движения из (1) интегрированием по независимой переменной α_3 при условии, чтобы усреднённые по толщине оболочки величины были равны нулю;

ж) для определения электромагнитного поля в окружающем оболочку пространстве, трёхмерную область, занимаемую тонкой оболочкой, можем представлять как математический разрез по срединной поверхности оболочки, по которой будут течь поверхностные токи электропроводимости, представляющие собой усреднённые токи по толщине оболочки $\left(\tilde{j}_{10},\tilde{j}_{20}\right)$.

Отметим, что, как показывает асимптотический анализ [20,21] начально-граничной задачи микрополярной магнитоупругости, перечисленные предположения имеют место, когда физические безразмерные параметры микрополярного материала оболочки имеют следующие значения:

$$\frac{\mu}{\alpha}\sim 1,\quad \frac{R^2\mu}{\beta}\sim 1,\quad \frac{R^2\mu}{\gamma}\sim 1,\quad \frac{R^2\mu}{\varepsilon}\sim 1,\; R_m=\frac{\sigma h}{c}\cdot\frac{c_0}{c}\sim 1, \tag{15}$$

(при этом, в исходном асимптотическом приближении вектор вращения точек оболочки независим от вектора перемещений); c_0 – скорость распространения волн в классическом упругом стержне (напр., при растяжении-сжатии).

Основная система уравнений магнитоупругости микрополярных тонких оболочек с независимыми полями перемещений и вращений, построенных с помощью перечисленных гипотез а)-ж), будет выражаться так:

уравнения движения

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial T_{ii}}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(T_{ii}-T_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial S_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(S_{ji}+S_{ij}\right)+\frac{N_{i3}}{R_i}+$$

$$+\left(-1\right)^j\frac{1}{c}H_{03}\tilde{j}_{j0}-2\rho h\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=-\left(q_i^++q_i^-\right),$$

$$\frac{T_{11}}{R_1}+\frac{T_{22}}{R_2}-\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial\left(A_2N_{23}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial\left(A_1N_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\frac{1}{c}\left(H_{02}\tilde{j}_{10}-H_{01}\tilde{j}_{20}\right)=\left(q_3^++q_3^-\right)-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial M_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(M_{ii}-M_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial H_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(H_{ji}+H_{ij}\right)-$$

$$-N_{3i}-\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\psi_i}{\partial t^2}=-h\left(q_i^+-q_i^-\right), \tag{16}$$

$$\frac{1}{A_i}\frac{\partial L_{ii}}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_j}{\partial\alpha_i}\left(L_{ii}-L_{jj}\right)+\frac{1}{A_j}\frac{\partial L_{ji}}{\partial\alpha_j}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\left(L_{ji}+L_{ij}\right)+$$

$$+\frac{L_{i3}}{R_i}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)-2Ih\frac{\partial^2\Omega_i}{\partial t^2}=-\left(m_1^+ + m_1^-\right),$$

$$\frac{L_{11}}{R_1}+\frac{L_{22}}{R_2}-\left[\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2L_{13}\right)}{\partial\alpha_1}+\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1L_{23}\right)}{\partial\alpha_2}\right]-\left(S_{12}-S_{21}\right)+2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}=m_3^+ + m_3^-,$$

$$L_{33}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_2\Lambda_{13}\right)}{\partial\alpha_1}-\frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial\left(A_1\Lambda_{23}\right)}{\partial\alpha_2}-\left(H_{12}-H_{21}\right)+\frac{2h^3}{3}I\frac{\partial^2\iota}{\partial t^2}=h\left(m_3^+ - m_3^-\right),$$

$$\left(i,j=1,2;\quad i\neq j\right);$$

соотношения упругости

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\ S_{ij}=2h\left[\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{ji}\right],$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\tag{17}$$

$$H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[\left(\mu+\alpha\right)K_{ij}+\left(\mu-\alpha\right)K_{ji}\right],\quad N_{i3}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{i3}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{3i},$$

$$N_{3i}=2h\left(\mu+\alpha\right)\Gamma_{3i}+2h\left(\mu-\alpha\right)\Gamma_{i3},\ L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma\left(\beta+\gamma\right)}{\beta+2\gamma}k_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}k_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{ij}=2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)k_{ij}+\left(\gamma-\varepsilon\right)k_{ji}\right],\quad L_{33}=2h\left[\left(\beta+2\gamma\right)\iota+\beta\left(k_{11}+k_{22}\right)\right],$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+ - m_i^-}{2}\right],\quad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+ + m_i^-}{2h}\right],$$

$$i,j=1,2;\quad i\neq j;$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\qquad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-(-1)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j,\qquad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i-(-1)^j\iota,$$

$$\Gamma_{i3}=-\vartheta_i+(-1)^j\Omega_j,\qquad \Gamma_{3i}=\psi_i-(-1)^j\Omega_j,\tag{18}$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i},\qquad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$

$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\quad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},\quad \vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\quad i,j=1,2;\quad i\neq j.$$

Усреднённые интегро-дифференциальные уравнения электромагнитного поля в области срединной поверхности оболочки (Ω) [12-14]:

$$\tilde{j}_{10}(P,t) = -\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\frac{\tilde{j}_{10}(Q,t)\vec{e}_1(P)\vec{e}_1(Q)+\tilde{j}_{20}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_1(P)}{R_{PQ}}d\Omega +$$
$$+\frac{2\sigma h}{c}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}B_{03}-\frac{\partial w}{\partial t}B_{02}\right),$$
$$\tilde{j}_{20}(P,t) = -\frac{2\sigma h}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\Omega}\frac{\tilde{j}_{10}(Q,t)\vec{e}_1(Q)\vec{e}_2(P)+\tilde{j}_{20}(Q,t)\vec{e}_2(Q)\vec{e}_2(P)}{R_{PQ}}d\Omega + \qquad (19)$$
$$+\frac{2\sigma h}{c}\left(\frac{\partial w}{\partial t}B_{01}-\frac{\partial u_1}{\partial t}B_{03}\right), \quad P\in\Omega$$

Граничные условия (при $\alpha_1 = \text{const}$) [18,19,12-14]

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, \quad S_{12} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*, \quad N_{13} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*,$$
$$M_{11} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad H_{12} = H_{12}^* \text{ или } K_{12} = K_{12}^*,$$
$$L_{11} = L_{11}^* \text{ или } \kappa_{11} = \kappa_{11}^*, \quad L_{12} = L_{12}^* \text{ или } \kappa_{12} = \kappa_{12}^*, \qquad (20)$$
$$L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \quad \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*,$$
$$\tilde{j}_{10} = 0, \quad \tilde{j}_{20} = 0.$$

Начальные условия при $t = 0$ следует ставить для величин

$$u_i, w, \psi_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \frac{\partial \iota}{\partial t}, \tilde{j}_{i0}. \qquad (21)$$

Здесь $T_{ii}, S_{ij}, N_{i3}, N_{3i}$ – усилия; M_{ii}, H_{ij} – моменты от силовых напряжений; $L_{ii}, L_{i3}, L_{3i}, L_{33}$ – моменты от моментных напряжений; Λ_{i3} –гипермоменты от моментных напряжений; u_i, w – перемещения точек срединной поверхности оболочки; ψ_i – полные углы поворота нормального элемента; Ω_i – независимые повороты нормального элемента; Ω_3 – поворот нормального элемента вокруг нормали к срединной поверхности; ι – интенсивность поворота нормального элемента вдоль этой нормали; $\Gamma_{ii}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{i3}, \Gamma_{3i}$ – деформации; K_{ii}, K_{ij} – изменения кривизн и кручения, связанных с силовыми напряжениями; k_{ii}, k_{ij}, k_{i3} – изменения кривизн и кручения, связанных с моментными напряжениями; l_{i3} – изменение гиперкривизн-кручений; R_{PQ} – расстояние между точками P и Q срединной поверхности оболочки; $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ – орты в точках срединной поверхности оболочки.

В модели (16)-(21) магнитоупругости микрополярных тонких оболочек полностью учитывались поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Из системы уравнений (16)-(21) магнитоупругости микрополярных тонких оболочек, при $\alpha = 0$ будет отделяться начально-краевая задача магнитоупругости тонких оболочек на основе классической теории упругости [13,14] (при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации).

Если в модели (16)-(21) пренебрегать поперечными сдвигами, т.е. считать

$$\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i} = 0 \text{ или } \psi_i = \vartheta_i, \qquad (22)$$

то получим модель магнитоупругости микрополярных тонких оболочек, когда имеют место обобщённые на микрополярный случай кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява (т.е. с применением формулы (13), в целом, с учётом (22)). Система уравнений этой модели магнитоупругости микрополярных тонких оболочек представляет собой: уравнения движения (16) с учётом (22), усреднённые интегро-дифференциальные уравнения электромагнитного поля в области оболочки (19), к которым следует присоединить следующие:

физические соотношения

$$T_{ii}=\frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii}+\nu\Gamma_{jj}\right],\qquad S_{ij}=2h\left[(\mu+\alpha)\Gamma_{ij}+(\mu-\alpha)\Gamma_{ji}\right],$$

$$M_{ii}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}\right],\quad H_{ij}=\frac{2h^3}{3}\left[(\mu+\alpha)K_{ij}+(\mu-\alpha)K_{ji}\right],$$

$$N_{i3}-N_{3i}=4\alpha h\left(\Gamma_{i3}-\Gamma_{3i}\right),\quad L_{ii}=2h\left[\frac{4\gamma(\beta+\gamma)}{\beta+2\gamma}\kappa_{ii}+\frac{2\gamma\beta}{\beta+2\gamma}\kappa_{jj}\right]+\frac{\beta}{\beta+2\gamma}L_{33},$$

$$L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)\kappa_{ij}+(\gamma-\varepsilon)\kappa_{ji}\right],\qquad L_{33}=2h\left[(\beta+2\gamma)\iota+\beta\left(\kappa_{11}+\kappa_{22}\right)\right],\tag{23}$$

$$L_{i3}=2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+-m_i^-}{2}\right],\quad \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}+\frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^++m_i^-}{2h}\right].$$

геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j+\frac{w}{R_i},\qquad \Gamma_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i-(-1)^j\Omega_3,$$

$$K_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\vartheta_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\vartheta_j,\qquad K_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\vartheta_i-(-1)^j\iota,$$

$$\vartheta_i=-\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i}+\frac{u_i}{R_i},\qquad \Gamma_{i3}-\Gamma_{3i}=2\left[-\vartheta_i+(-1)^j\Omega_j\right],\tag{24}$$

$$\kappa_{ii}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i}+\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_j+\frac{\Omega_3}{R_i}\quad \kappa_{ij}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i}-\frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i,$$

$$\kappa_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i}-\frac{\Omega_i}{R_i},\qquad l_{i3}=\frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i}.$$

граничные условия (при $\alpha_1=\text{const}$)

$$T_{11}=T_{11}^*\text{ или }u_1=u_1^*,\qquad S_{12}+\frac{H_{12}}{R_2}=S_{12}^*\text{ или }u_2=u_2^*,$$

$$N_{13}+\frac{1}{A_2}\frac{\partial H_{12}}{\partial\alpha_2}=N_{13}^*\text{ или }w=w^*,\quad M_{11}=M_{11}^*\text{ или }K_{11}=K_{11}^*,$$

$$L_{11}=L_{11}^*\text{ или }\kappa_{11}=\kappa_{11}^*,\quad L_{12}=L_{12}^*\text{ или }\kappa_{12}=\kappa_{12}^*,\tag{25}$$

$$L_{13}=L_{13}^*\text{ или }\kappa_{13}=\kappa_{13}^*,\quad \Lambda_{13}=\Lambda_{13}^*\text{ или }l_{13}=l_{13}^*.$$

$\tilde{j}_{10} = 0, \quad \tilde{j}_{20} = 0$.

Начальные условия необходимо ставить для следующих величин: $u_i, w, \vartheta_i, \Omega_i, \Omega_3, \iota,$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_i}{\partial t}, \frac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \frac{\partial \iota}{\partial t}, \tilde{j}_{i0}. \tag{26}$$

При $\alpha = 0$ из систем уравнений (16), (19), (23), (24), граничных условий (25) и начальных условий (26) будут отделяться основные уравнения, граничные и начальные условия классической магнитоупругости тонких оболочек [12] при помощи гипотез магнитоупругости тонких тел.

Если физические безразмерные параметры имеют значения

$$\alpha \sim \mu, \quad \frac{R^2\alpha}{\beta} << 1, \quad \frac{R^2\alpha}{\gamma} << 1, \quad \frac{R^2\alpha}{\varepsilon} << 1, R_m = \frac{\gamma h}{c} \cdot \frac{c}{c_0} \sim 1, \tag{27}$$

как показывает асимптотический анализ [20,21] начально-краевой задачи (1)-(10), во второй группе уравнений движения из (1), разностями силовых напряжений $e^{nmk} \cdot \sigma_{mk}$ – можно пренебречь. В этом случае в уравнениях движения из (16), содержащих моменты от моментных напряжений, можно пренебрегать разностями усилий $(N_{j3} - N_{3i})$, $(S_{12} - S_{21})$ и разностями от крутящих моментов (от силовых напряжений) $(H_{12} - H_{21})$.

При таком упрощении в модели (16)-(20) “моментная часть” задачи будет полностью отделяться как самостоятельная начально-граничная задача (в “моментной части” задачи не будут присутствовать возбуждённые в оболочке электрические токи проводимости).

Остальную часть задачи из модели (16)-(20) будет представлять “силовая часть” задачи (которая представляет взаимосвязанную механическую-электродинамическую задачу), в физических уравнениях которого будет присутствовать физическая константа α.

3. Прикладная модель магнитоупругости микрополярных тонких оболочек со стеснённым вращением.

Для вышеприведенных физических безразмерных параметров рассмотрим случай, когда они принимают значения:

$$\alpha >> \mu, \quad \frac{R^2\mu}{\beta} \sim 1, \quad \frac{R^2\mu}{\gamma} \sim 1, \quad \frac{R^2\mu}{\varepsilon} \sim 1, \; R_m = \frac{\sigma h}{c} \cdot \frac{c_0}{c} \sim 1. \tag{28}$$

Асимптотический анализ [20,21] поставленной начально-краевой задачи (1)-(10) микрополярной магнитоупругости в области тонкой оболочки, в случае (28), показывает, что в исходном асимптотическом приближении вектор поворота $\vec{\omega}$ связан с вектором перемещения $\vec{V}$ как в классической теории упругости:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{V} \; . \tag{29}$$

Это означает, что построенная ниже прикладная модель микрополярной магнитоупругости тонких оболочек находится в сфере микрополярной теории со стеснённым вращением (отметим, что значения физической постоянной α из (28) соответствует выполнению условия стеснённого вращения (14), т.е. $\alpha \to \infty$).

Основываясь на результатах асимптотического метода [20,21] интегрирования начально-краевой задачи (1)-(10) трёхмерной микрополярной магнитоупругости, когда безразмерные физические параметры имеют значения (28), для построения общей прикладной модели магнитоупругости микрополярных оболочек со стеснённым вращением примем следующие гипотезы:

1) предположения а)-ж) раздела два (только предположения е) в этом случае необходимо принимать относительно силовых напряжений σ_{3i});
2) условие стеснённого вращения (29).

Основная система уравнений прикладной модели магнитоупругости микрополярных тонких оболочек со стеснённым вращением (с полным учётом поперечных сдвигов) будет выражаться так (отметим, что кинематика деформации у этой модели характеризуется формулами (13) с учётом (29)):

это уравнения движения (16), электродинамические усреднённые уравнения (19) в области срединной поверхности оболочки, следующие физические соотношения:

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}\right], \qquad S_{12} + S_{21} = 4\mu h\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\right),$$

$$M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii} + \nu K_{jj}\right], \qquad N_{i3} + N_{3i} = 4\mu h\left(\Gamma_{i3} + \Gamma_{3i}\right), \tag{30}$$

$$H_{12} + H_{21} = \frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12} + K_{21}\right), \quad L_{ii} = 4\gamma h \kappa_{ii}, \quad L_{ij} = 2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij} + \left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right],$$

$$L_{i3} = 2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+ - m_i^-}{2}\right], \qquad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{m_i^+ + m_i^-}{2h}\right]$$

и геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i}, \qquad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i,$$

$$K_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_j, \qquad K_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\psi_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\psi_i,$$

$$\Gamma_{i3} = -\vartheta_i + (-1)^j\,\Omega_j, \qquad \Gamma_{3i} = \psi_i - (-1)^j\,\Omega_j,$$

$$\kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, \quad \kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i, \tag{31}$$

$$\kappa_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \qquad l_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},$$

$$\Omega_i = -(-1)^i\left(\psi_j + \vartheta_j\right), \qquad \Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{12} - \Gamma_{21}\right),$$

$$\iota = \frac{1}{2}\left(K_{12} - K_{21}\right), \qquad \vartheta_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}.$$

К указанной системе уравнений необходимо присоединить граничные условия (20) и соответствующие начальные условия

Если в указанной модели магнитоупругости микрополярных оболочек со стеснённым вращением будем пренебрегать поперечными сдвигами (т.е. примем условие (20)), в результате получим модель магнитоупругости микрополярных оболочек со стеснённым вращением, при которой вместо обобщённых кинематических гипотез Тимошенко приняты обобщённые кинематические гипотезы Кирхгофа-Лява. Основная система уравнений этой модели магнитоупругости микрополярных оболочек со стеснённым вращением будет представлять собой уравнения движения (16) (в которых необходимо исключить усилия N_{3i}), электродинамические усреднённые уравнения (19) в области срединной поверхности оболочки, следующие физические соотношения:

$$T_{ii} = \frac{2Eh}{1-\nu^2}\left[\Gamma_{ii} + \nu\Gamma_{jj}\right], \qquad M_{ii} = \frac{2Eh^3}{3\left(1-\nu^2\right)}\left[K_{ii} + \nu K_{jj}\right],$$

$$S_{12} + S_{21} = 4\mu h\left(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}\right), \qquad H_{12} + H_{21} = \frac{2h^3}{3}2\mu\left(K_{12} + K_{21}\right),$$

$$L_{ii} = 4\gamma h \kappa_{ii}, \qquad L_{ij} = 2h\left[\left(\gamma+\varepsilon\right)\kappa_{ij} + \left(\gamma-\varepsilon\right)\kappa_{ji}\right], \tag{32}$$

$$L_{i3} = 2h\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\kappa_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\frac{m_i^+ - m_i^-}{2}\right], \qquad \Lambda_{i3} = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3} + \frac{\gamma-\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}\cdot\frac{m_i^+ + m_i^-}{2h}\right]$$

и геометрические соотношения

$$\Gamma_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_j + \frac{w}{R_i}, \qquad \Gamma_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial u_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}u_i,$$

$$K_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\vartheta_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\vartheta_j, \qquad K_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\vartheta_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\vartheta_i,$$

$$\vartheta_i = -\frac{1}{A_i}\frac{\partial w}{\partial\alpha_i} + \frac{u_i}{R_i}, \qquad \kappa_{ii} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_i}{\partial\alpha_i} + \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_2 + \frac{\Omega_3}{R_i}, \tag{33}$$

$$\kappa_{ij} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_j}{\partial\alpha_i} - \frac{1}{A_iA_j}\frac{\partial A_i}{\partial\alpha_j}\Omega_i, \qquad \kappa_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\Omega_3}{\partial\alpha_i} - \frac{\Omega_i}{R_i}, \qquad l_{i3} = \frac{1}{A_i}\frac{\partial\iota}{\partial\alpha_i},$$

$$\iota = \frac{1}{2}\left(K_{12} - K_{21}\right), \qquad \Omega_i = -\left(-1\right)^i\vartheta_j, \qquad \Omega_3 = \frac{1}{2}\left(\Gamma_{12} - \Gamma_{21}\right),$$

к которым следует присоединить граничные условия

$$T_{11} = T_{11}^* \text{ или } u_1 = u_1^*, \; S_{12} + \frac{H_{12} - L_{11}}{R_2} = S_{12}^* \text{ или } u_2 = u_2^*,$$

$$M_{11} + L_{12} = M_{11}^* \text{ или } K_{11} = K_{11}^*, \quad N_{13} + \frac{1}{A_2}\frac{\partial\left(H_{12} - L_{11}\right)}{\partial\alpha_2} = N_{13}^* \text{ или } w = w^*, \tag{34}$$

$$L_{13} = L_{13}^* \text{ или } \kappa_{13} = \kappa_{13}^*, \; \Lambda_{13} = \Lambda_{13}^* \text{ или } l_{13} = l_{13}^*$$

и соответствующие начальные условия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жермен П. Механика сплошных сред. М.: Изд. «Мир», 1965. 479с.
2. Савин Г.Н., Немиш Ю.Н. Исследования по концентрации напряжений в моментной теории упругости (обзор) // ПМ. 1968. Т.4. Вып.12. С.1-17.
3. Kaliski S. Thermo-magneto-microelasticity //Bull. De L'Academie Polonise des Sciences. 1968. Vol. XVI. № 1. P.7-13.
4. Kaliski S., Nowacki W. Wave-type Equation of Thermo-magneto-microelasticity// Bull. De L'Academie Polonise des Sciences. 1970. Vol. XVII. № 4. P. 155-159.
5. Eringen A.C. Microcontinuum Field Theories. I. Foundation and Solids. Springer-Verlag. N. Y. 1999. 319p.
6. Maugin G.A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids. 1988.

7. Багдасарян Г.Е., Асанян Д.Д. Основные уравнения и соотношения теории несимметричной магнитоупругости ферромагнитного тела // В сб.: «Проблемы механики деформируемых тел», посвящённом 80-летию С.А. Амбарцумяна. Ереван: Изд. НАН Армении, 2002. С.37-47.
8. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М.: Наука, 1977. 272с.
9. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е. Электропроводящие пластинки и оболочки в магнитном поле. М.: Физматлит, 1996. 288с.
10. Амбарцумян С.А., Белубекян М.В. Некоторые задачи электромагнитоупругости пластин. Ереван: Изд. ЕГУ, 1991. 143с.
11. Багдасарян Г.Е. Колебания и устойчивость магнитоупругих систем. Ереван: Изд. ЕГУ, 1999. 440 с.
12. Саркисян С.О. Общая двумерная теория магнитоупругости тонких оболочек. Ереван: Изд. НАН Армении, 1992. 232с.
13. Саркисян С.О. Общая теория магнитотермоупругости тонких оболочек. //Изв.НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.40-55.
14. Sargsyan S.H. Thermoelastisity of Thin Shells on the Basis of Asymmetrical Theory of Elasticity // Journal of Thermal Stresses. 2009. V.32. № 8. P.791-818.
15. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок // Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. №2. С.121-128.
16. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин// Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №1. С.58-67.
17. Саркисян С.О. Общая прикладная теория микрополярных упругих тонких оболочек // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №2. С.52-62.
18. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. //Физическая мезомеханика. 2011. Т.14. №1. С.55-66.
19. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады АН России. 2011. Т.436. №2. С.195-198.
20. Саркисян С.О., Саркисян Л.С. Магнитоупругость микрополярных упругих тонких оболочек и пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №3. С.52-65.
21. Sargsyan S.H., Sargsyan L.S. Magnetoelasticity of Thin Shells and Plates Based on the Asymmetrical Theory of Elasticity // Mechanics of Generalized Continua. Advances in Mechanics and Mathematics. 2010. Vol.21. P.325-337.
22. Пелех Б.Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жёсткостью. Киев: Наукова думка, 1973. 246с.
23. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин (нестационарные задачи). Ленинград: Судостроение, 1987. 316с.

Сведения об авторе:

Саркисян Самвел Оганесович,
Чл-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференциальных уравнений Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна.
Тел.: (091) 60 57 15
E-mail: slusin@yahoo.com

Поступила в редакцию 02.12.2011