ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №2, 2012 Механика

УДК 550

ЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В СРЕДЕ БИО С УЧЁТОМ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ЭФФЕКТОВ

Шекоян А.В., Саноян Ю.Г.

Ключевые слова: среда Био, температура, поры, волна.
Key words: media of Bio, temperature, porous, wave.

Շեկոյան Ա.Վ., Սանոյան Յու.Գ.
Գծային ալիքները Բիոյի միջավայրում ջերմաստիճանային փոփոխման հաշվառմամբ

Արտածված է հավասարումների համակարգ, որը նկարագրում է երկֆազ միջավայրի դեֆորմացիաները, ջերմաստիճանի փոփոխման հաշվառմամբ: Արտածված է գծային ալիքների հավասարումը և գտնված են նրա լուծումները, երբ ֆազերի ջերմաստիճանները նույնն են և տարբեր:

Shekoyan A.V., Sanoyan Yu.G.
The linear wave in media of a Bio taken account the temperature effect

The system of equations describing deformation of two–phase media on account of variation of temperature is derived. The linear dispersion equation is obtained and its solution is find. The cases when temperatures of phases are the same as well as when are different are considered.

Выведена система уравнений, описывающая деформацию двухфазной среды с учётом изменения температуры. Получено линейное дисперсионное уравнение и найдено его решение. Рассмотрены случаи, когда температуры фаз одинаковы и разные.

1. Введение

В статье [1], а также в книге [2] сделан подробный критический анализ существующих теорий, описывающих деформации двухфазной среды, состоящей из твёрдого каркаса с порами, заполненного жидкостью. Такие среды часто называют средой Био в честь американского учёного, впервые предложившего такую модель.

В работах [1,2] из вариационного принципа выведены уравнения, описывающие линейные и нелинейные деформации вышеуказанной двухфазной среды.

Во многих физических процессах существенны температурные эффекты. Однако работ, учитывающих температурные эффекты среды Био, мало [4–9].

В книгах [5,6] выводятся уравнения для температуры фаз. В книге [5] лишь приводят уравнения, а в [6] при исследовании полученных уравнений температура не учитывается. В книге [6] выведена система уравнений, описывающая деформацию среды Био с учётом изменения температуры, причём рассматриваются случаи, когда температура жидкости и каркаса разные. Однако при исследовании уравнений предполагается, что температуры жидкой и твёрдой фаз равны, а температура фигурирует как параметр.

Целью данной статьи является вывести уравнения для двухфазной среды с учётом изменения температуры и исследовать линейные волны в такой среде. Рассмотрен случай, часто встречающийся на практике, когда температуры фаз разные.

2. Исходные уравнения.

Пусть в первоначальный момент температура твёрдой фазы равняется T_{01}, а жидкой $-T_{02}$. В результате различных процессов температуры обеих фаз меняются и получают значения T_1 и T_2 соответственно для твёрдой и жидкой фаз. Следует определить разности температур $\theta_1 = T_1 - T_{01}$ и $\theta_2 = T_2 - T_{02}$.

Из вариационного принципа следует, что уравнения деформации поросреды с учётом температурных эффектов можно написать в следующем виде:

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial t^2} + \left(b_0 f_0^2 - b_2\frac{\partial}{\partial t} + b_3\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_4\frac{\partial^3}{\partial t^3} + \right.$$
$$\left. + b_1 f\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i - \mathrm{v}_i\right) = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1}$$

$$\rho_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} -$$
$$-\left(b_0 f_0^2 - b_2\frac{\partial}{\partial t} + b_3\frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_4\frac{\partial^3}{\partial t^3} + b_1 f\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i - \mathrm{v}_i\right) = \frac{\partial \mathrm{v}_{ik}}{\partial x_k}, \tag{2}$$

$$T_1\frac{\partial S_1}{\partial t} = \chi_1 \Delta\theta_1, \tag{3}$$

$$T_2\frac{\partial S_2}{\partial t} = \chi_2 \Delta\theta_2, \tag{4}$$

$$\sigma_{ik} = \frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)}, \qquad \mathrm{v}_{ik} = \frac{\partial F}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}\right)}, \tag{5}$$

где F – свободная энергия единицы массы среды, χ_1 и χ_2 – температуропроводности твёрдой и жидкой фаз среды соответственно, u_i, v_i – смещения твёрдой и жидкой фаз соответственно, ρ_{11}, ρ_{22} и ρ_{12} – эффективные начальные плотности массы и присоединённая плотность массы соответственно, σ_{ik} и v_{ik} – тензоры напряжений твёрдой и жидкой фаз среды соответственно, коэффициенты b_2 и b_3 обусловлены отклонением течения жидкости в порах от закона Пуазейля, а коэффициенты b_0 и b_1 обусловлены линейным и нелинейным межфазным трением, коэффициент b_4 обусловлен дисперсией.

Энтропии единицы массы среды S_1 и S_2 для твёрдой и жидкой фаз соответственно определяются из соотношений [10]:

$$S_1 = -\left(\frac{\partial F}{\partial \theta_1}\right)_{u_{ik},\, \mathrm{v}_{ik}}, \qquad S_2 = -\left(\frac{\partial F}{\partial \theta_2}\right)_{u_{ik},\, \mathrm{v}_{ik}}. \tag{6}$$

К уравнениям (1)–(4) следует добавить также уравнение изменения пор, имеющее вид:

$$\frac{\partial F}{\partial f} = 0, \tag{7}$$

где $f = f_1 - f_0$; f_0 – пористость до деформации среды, а f_1 – после деформации.

Свободная энергия F имеет следующий вид:

$$F = F_0\left(T_{01}, T_{02}\right) + \frac{\lambda}{2} u_{ll}^2 + \mu u_{ik}^2 + Q u_{ll}\, \mathrm{v}_{ll} + \frac{R}{2} \mathrm{v}_{ll}^2 + M f\left(N u_{ll} - P\, \mathrm{v}_{ll}\right) - \frac{M}{2} f^2 -$$

$$-\gamma_1 \theta_1 u_{ll} - \gamma_2 \theta_2 u_{ll} - \gamma_3 \theta_1\, \mathrm{v}_{ll} - \gamma_4 \theta_2\, \mathrm{v}_{ll} - \gamma_5 f \theta_1 - \gamma_6 f \theta_2 - \frac{c_1}{2} \theta_1^2 - \frac{c_2}{2} \theta_2^2 - c_3 \theta_1 \theta_2 +$$

$$+\frac{\lambda_1}{2} \theta_1 u_{ll}^2 + \mu_1 \theta_1 u_{ik}^2 + Q_1 \theta_1 u_{ll}\, \mathrm{v}_{ll} + \frac{R_1}{2} \theta_1\, \mathrm{v}_{ll}^2 + M_1 \theta_1 f\left(N u_{ll} - P\, \mathrm{v}_{ll}\right) - \frac{M_1}{2} \theta_1 f^2 -$$

$$-\beta_1 \theta_1^2 u_{ll} - \beta_2 \theta_1 \theta_2 u_{ll} - \beta_3 \theta_1^2\, \mathrm{v}_{ll} - \beta_4 \theta_1 \theta_2\, \mathrm{v}_{ll} - \beta_5 f \theta_1^2 - \beta_6 f \theta_1 \theta_2 - \frac{q_1}{3} \theta_1^3 - \frac{q_2}{2} \theta_1 \theta_2^2 -$$

$$-q_3 \theta_1^2 \theta_2 + \frac{\lambda_2}{2} \theta_2 u_{ll}^2 + \mu_2 \theta_2 u_{ik}^2 + \theta_1 \theta_2 u_{ll}\, \mathrm{v}_{ll} + \frac{R_2}{2} \theta_2\, \mathrm{v}_{ll}^2 + M_2 \theta_2 f\left(N u_{ll} - P\, \mathrm{v}_{ll}\right) -$$

$$-\frac{M_2}{2} \theta_2 f^2 - \alpha_2 \theta_2^2 u_{ll} - \alpha_4 \theta_2^2\, \mathrm{v}_{ll} - \alpha_6 f \theta_2^2 - \frac{n_2}{3} \theta_2^3 + \frac{A_0}{3} u_{ik} u_{il} u_{kl} + B_0 u_{ik}^2 u_{ll} +$$

$$+\frac{C_0}{3} u_{ll}^3 + \frac{s_1}{3} \mathrm{v}_{ik} \mathrm{v}_{il} \mathrm{v}_{kl} + s_2 \mathrm{v}_{ik}^2 \mathrm{v}_{ll} + \frac{s_3}{3} \mathrm{v}_{ll}^3 + \frac{q}{2} u_{ik} \mathrm{v}_{ik} \mathrm{v}_{kl} + \frac{\chi}{2} u_{ik} u_{il} \mathrm{v}_{kl} + G_1 f u_{ik} \mathrm{v}_{ik} +$$

$$+D_1 f u_{ik}^2 + E_1 f \mathrm{v}_{ik}^2 + D_2 f u_{ll}^2 + E_2 f \mathrm{v}_{ll}^2 + G_2 f u_{ll} \mathrm{v}_{ll} + B_1 f^2 \mathrm{v}_{ll} + A_1 f^2 u_{ll}, \qquad (8)$$

где $\lambda, \mu, Q, R, M, P, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, c_1, c_2, c_3$ – линейные; $\lambda_1, \mu_1, Q_1, R_1, M_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, q_1, q_2, q_3, \lambda_2, \mu_2, Q_2, R_2, M_2, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, n_2, A_0, B_0, C_0, s_1, s_2, s_3, q, \chi, G_1, D_1, E_1, D_2, E_2, G_2, B_1, A_1$ – нелинейные коэффициенты, F_0 – свободная энергия до возмущения.

Выражение (8) получено методом, описанным в [2].

Выполняя вычисления по формулам (5)–(8), уравнения (1)–(4) можно записать в следующем виде:

$$\rho_{11} \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial t^2} + \left(b_0 f_0^2 - b_2 \frac{\partial}{\partial t} + b_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - b_4 \frac{\partial^3}{\partial t^3} + b_1 f\right) \frac{\partial}{\partial t}\left(u_i - \mathrm{v}_i\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\lambda + \mu\right) \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + Q \frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l} + MGf - \gamma_1 \theta_1 - \gamma_2 \theta_2\right] + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \left(\lambda_1 \theta_1 + \lambda_2 \theta_2 -\right.$$

$$\left.-\gamma_1 \theta_1 - \gamma_2 \theta_2 + \mu \frac{\partial u_p}{\partial x_p} + \mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2 + MGf + Q \frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right) \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_l} +$$

$$+\mu \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_p}{\partial x_l \partial x_p}\right) + \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_l}\right) +$$

$$+\frac{\partial^2 \mathrm{v}_l}{\partial x_i \partial x_l}\left[Q_1 \theta_1 + Q_2 \theta_2 + Q\left(\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l} + \frac{\partial \mathrm{v}_p}{\partial x_p}\right)\right] + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}\left(\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2\right) +$$

$$+\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\mu_1 \theta_1 + \mu_2 \theta_2\right) + MG \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \theta_1\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta_1 \theta_1^2 + \alpha_2 \theta_2^2\right) - \beta_2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\theta_1 \theta_2\right) +$$

$$+M_2 G \frac{\partial}{\partial x_i}\left(f \theta_2\right) + \frac{\partial u_l}{\partial x_l}\left[\left(\lambda_1 - \gamma_1\right) \theta_1 + \left(\lambda_2 - \gamma_2\right) \theta_2 - MGf\right] +$$

$$+\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(Q_1\theta_1+Q_2\theta_2\right)+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(A_0u_{il}u_{kl}+2B_0u_{ik}u_{ll}+\frac{q}{2}\mathrm{v}_{il}\mathrm{v}_{kl}+G_1f\,\mathrm{v}_{ik}+\right.$$

$$\left.+2D_1fu_{ik}++\frac{\chi}{2}u_{il}\,\mathrm{v}_{kl}+\frac{\chi}{2}u_{kl}\,\mathrm{v}_{il}+\mu\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[B_0u_{mn}^2+C_0u_{ll}^2+2D_2fu_{ll}+G_2f\,\mathrm{v}_{ll}+A_1f^2+Q\frac{\partial \mathrm{v}_\rho}{\partial x_\rho}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\frac{Q}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right)^2-\right.$$

$$\left.-MGf\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\frac{3}{2}\lambda\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2\right]+\mu\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right)\frac{\partial u_i}{\partial x_l}\right]+$$

$$+\left(\frac{1}{3}b_5+b_6\right)\frac{\partial^3 u_l}{\partial x_l\partial x_i\partial t}+b_5\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_k^2\partial t}, \qquad (9)$$

$$\rho_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-\left(b_0f_0^2-b_2\frac{\partial}{\partial t}+b_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b_4\frac{\partial^3}{\partial t^3}+b_1f\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i-\mathrm{v}_i\right)=$$

$$=\left(Q+R\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(Q\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+R\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right)+Q\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i\partial x_l}+$$

$$+R\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_l}{\partial x_i\partial x_l}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\left(Q_1\theta_1+Q_2\theta_2\right)\right]+\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(R_1\theta_1+R_2\theta_2\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(R_1\theta_1+R_2\theta_2\right)\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right]-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\gamma_3\theta_1+\gamma_4\theta_2+MTf\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\gamma_3\theta_1+\gamma_4\theta_2+MPf\right)\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right]-M_1P\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f\theta_1\right)-$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\beta_3\theta_1^2+\beta_4\theta_1\theta_2+M_2Tf\theta_2+\alpha_4\theta_2^2\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[S_1\,\mathrm{v}_{il}\mathrm{v}_{kl}+2S_2\,\mathrm{v}_{ik}\mathrm{v}_{ll}+\frac{\chi}{2}u_{lk}u_{il}+G_1fu_{ik}+2E_1f\,\mathrm{v}_{ik}+\frac{q}{2}\left(u_{il}\,\mathrm{v}_{kl}+u_{kl}\,\mathrm{v}_{il}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[S_2\,\mathrm{v}_{mn}^2+S_3\,\mathrm{v}_{ll}^2+2E_2f\,\mathrm{v}_{ll}+G_2fu_{ll}+B_1f^2+MTf\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}+\frac{Q}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2+\right.$$

$$\left.+Q\frac{\partial u_\rho}{\partial x_\rho}\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}+\frac{3}{2}R\left(\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right)^2\right], \qquad (10)$$

$$M\frac{\partial}{\partial x_l}\left(Gu_l-P\,\mathrm{v}_l\right)-Mf-\gamma_5\theta_1-\gamma_6\theta_2+\frac{M}{2}N\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2-\frac{MP}{2}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2+$$

$$+\left(M_1\theta_1+M_2\theta_2\right)\frac{\partial}{\partial x_l}\left(Gu_l-P\,\mathrm{v}_l\right)-\left(M_1\theta_1+M_2\theta_2\right)f-\beta_5\theta_1^2-\beta_6\theta_1\theta_2-$$

$$-\alpha_6\theta_2^2+G_1u_{ik}\,\mathrm{v}_{ik}+D_1u_{ik}^2+E_1\,\mathrm{v}_{ik}^2+D_2u_{ll}^2+E_2\,\mathrm{v}_{ll}^2+G_2u_{ll}+$$

$$+2Bf\,\mathrm{v}_{ll}+2A_1fu_{ll}+\frac{b_0}{2}\sum_{p=1}^{3}\left(\frac{\partial\,\mathrm{v}_p}{\partial t}-\frac{\partial u_p}{\partial t}\right)^2=0, \tag{11}$$

$$-T_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma_1\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\gamma_3\frac{\partial\,\mathrm{v}_l}{\partial x_l}+c_1\theta_1+c_3\theta_2+M_1f\right)-T_1\left[\left(\lambda_1-\gamma_1\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\frac{\partial^2u_l}{\partial t\partial x_l}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(R_1-\gamma_3\right)\frac{\partial\,\mathrm{v}_l}{\partial x_l}\frac{\partial^2\,\mathrm{v}_l}{\partial t\partial x_l}\right]+T_1\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(MGf-2\beta_1\theta_1-\beta_2\theta_2\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right]-T_1\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(MPf+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\beta_3\theta_1+\beta_4\theta_2\right)\frac{\partial\,\mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right]-T_1\frac{\partial}{\partial t}\left(2\beta_5f+q_1\theta_1\right)\theta_1-T_1\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\beta_6f+\frac{q_2}{2}\theta_2+2q_3\theta_1\right)\theta_2\right]+$$

$$+\frac{1}{2}T_1\mu_1\left[\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial^2u_k}{\partial t\partial x_i}+\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial^2u_i}{\partial x_k\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]+T_1Q\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\frac{\partial\,\mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right)-$$

$$-T_1M_1f\frac{\partial f}{\partial t}=-\chi_1\Delta\theta_1 \tag{12}$$

$$-T_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma_2\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+c_3\theta_1+c_2\theta_2+\gamma_6f\right)-T_2\gamma_2\frac{\partial^2u_l}{\partial t\partial x_l}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+$$

$$+T_2\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\theta_2\frac{\partial\,\mathrm{v}_l}{\partial x_l}-\beta_2\theta_1+\frac{\lambda_2}{2}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+M_2Gf-\frac{\alpha_2}{2}\theta_2\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right]-T_2\gamma_4\frac{\partial\,\mathrm{v}_l}{\partial x_l}\frac{\partial^2\,\mathrm{v}_l}{\partial t\partial x_l}+$$

$$+T_2\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(R_2\frac{\partial\,\mathrm{v}_l}{\partial x_l}-\beta_4\theta_1-M_2Pf-\frac{\alpha_4}{2}\theta_2\right)\frac{\partial\,\mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right]-T_2\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\beta_6f+q_2\theta_2+q_3\theta_1\right)\theta_1\right]+$$

$$+T_2\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(2\alpha_6f-\frac{3}{2}n_2\theta_2\right)\theta_2\right]+2\mu_2T_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)+\frac{\mu_2}{2}\frac{\partial^2u_i}{\partial t\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}-$$

$$-T_2M_2f\frac{\partial f}{\partial t}=-\chi_2\theta_2, \tag{13}$$

где b_5 и b_6 – коэффициенты вязкости твёрдой фазы среды. Вязкость жидкой фазы среды не учтена из-за малого значения её величины.

3. Линейное дисперсионное уравнение и его решение.

После линеаризации системы уравнений (9)–(13) она примет следующий вид:

$$\rho_{11}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial t^2}+\left(b_0 f_0^2-b_2\frac{\partial}{\partial t}+b_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b_4\frac{\partial^3}{\partial t^3}+b_1 f\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i-\mathrm{v}_i\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\lambda+\mu\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+Q\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}+MGf-\gamma_1\theta_1-\gamma_2\theta_2\right]+b_m\frac{\partial^3 u_i}{\partial x_i^2\partial t}, \tag{14}$$

$$\rho_{22}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}-\left(b_0 f_0^2-b_2\frac{\partial}{\partial t}+b_3\frac{\partial^2}{\partial t^2}-b_4\frac{\partial^3}{\partial t^3}+b_1 f\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(u_i-\mathrm{v}_i\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(Q\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+R\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right)-\gamma_3\frac{\partial\theta_1}{\partial x_i}-\gamma_4\frac{\partial\theta_2}{\partial x_i}+MP\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{15}$$

$$M\left(G\frac{\partial u_l}{\partial x_l}-P\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}\right)-Mf-\gamma_5\theta_1-\gamma_6\theta_2=0, \tag{16}$$

$$-T_1\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma_1\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+\gamma_3\frac{\partial \mathrm{v}_l}{\partial x_l}+c_1\theta_1+c_3\theta_2+M_1 f\right)=-\chi_1\Delta\theta_1 \tag{17}$$

$$-T_2\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma_2\frac{\partial u_l}{\partial x_l}+c_3\theta_1+c_2\theta_2+\gamma_6 f\right)=-\chi_2\theta_2. \tag{18}$$

Решение системы (14)–(18) ищется в виде бегущей волны $\exp\left(i\omega t-ikx\right)$. Подставив это решение в систему уравнений (14)–(18), получим новую алгебраическую систему уравнений относительно амплитуд. Приравняв детерминант к нулю, получим дисперсионное уравнение, имеющее вид:

$$\begin{vmatrix} A & -B & ikMG & -ik\gamma_1 & ik\gamma_2 \\ A_n & -B_n & -ikMP & -ik\gamma_3 & ik\gamma_4 \\ -ikMG & ikMP & -M & -\gamma_5 & -\gamma_6 \\ k\omega T_1\gamma_1 & k\omega T_1\gamma_3 & i\omega T_1\gamma_5 & n_3 & i\omega c_3 T_1 \\ k\omega T_2\gamma_2 & k\omega T_2\gamma_4 & i\omega T_2\gamma_6 & i\omega c_3 T_2 & n_4 \end{vmatrix}=0 \tag{19}$$

где $A=-\omega^2\rho_{11}+\left(2\mu+\lambda\right)k^2+\varphi,\qquad B=-\omega^2\rho_{12}+\varphi+k^2Q,$

$A_n=-\omega^2\rho_{12}-\varphi+k^2Q,\qquad B_n=-\omega^2\rho_{22}+\varphi+k^2R,$

$n_3=i\omega T_1c_1+\chi_1k^2,\qquad n_4=i\omega T_2c_2+\chi_2k^2,$

$\varphi=i\omega b_0f_0^2+\omega^2b_2-i\omega^3b_3-\omega^4b_1+ik^2\omega b_m,$

b_m – коэффициент вязкости твёрдой фазы.

Уравнение (19) будем решать итерацией подобно [2,4]. Решение имеет вид:

$$\omega=\omega_0+\omega_1+\omega_2+\omega_3, \tag{20}$$

где ω_1 обусловлена коэффициентами b_1, b_2, b_3 и b_4; ω_2 – вязкостью твёрдой фазы, а ω_3 – термическими эффектами. Частоты $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ малы по сравнению с нулевым решением ω_0.

Из выражения для ω_0 можно найти линейную фазовую скорость c_n, которая совпадает с выражением, приведённым в работах [1,2].

Для ω_1 и ω_2 получаются следующие выражения:

$$\omega_1 = \frac{d_2}{d_1}\left[\left(-b_2 + \omega_0^2 b_4\right)\omega_0\right]\omega_0 + i\left(\omega_0^2 b_3 - b_0 f_0^2\right),$$

$$\omega_2 = \frac{ik^2}{d_1}\left(\frac{4}{3}b_5 + b_6\right)\left[k^2\left(R + MT^2\right) - \omega_0^2 \rho_{22}\right],$$

где $$d_1 = 4\omega_0^2\left(\rho_{22}\rho_{11} - \rho_{12}^2\right) + 2k^2\left[2\left(Q - MGT\right)\rho_{12} - \left(R + MT^2\right)\rho_{11} - \right.$$

$$\left. -\left(\lambda + 2\mu + MG^2\right)\rho_{22}\right],$$

$$d_2 = \omega_0^2\left(2\rho_{12} - \rho_{22} + \rho_{11}\right) - k^2\left[2\left(Q - MGT\right) + R + MT^2 + \lambda + 2\mu + MG^2\right]$$

Как видно, ω_2 – чисто мнимое число, поскольку оно обусловлено только вязкостью твёрдой фазы. Действительная и мнимая части ω_3 имеют следующий вид:

$$\mathrm{Re}\,\omega_3 = \frac{P_1 + k^2 P_2 + k^4 P_3 + k^6 P_4}{k\left(P_5 + P_6 k + P_7 k^4\right)}, \tag{21}$$

$$\mathrm{Im}\,\omega_3 = \frac{P_8 + k^2 P_9 + k^4 P_{10}}{P_5 + P_6 k + P_7 k^4}. \tag{22}$$

Выражения (20) и (21) рассчитаны на компьютере. Коэффициенты P_i не приводятся, посколько имеют громоздкий вид.

Они зависят от параметров, характеризующих двухфазную среду.

Из коэффициента термического поглощения (22) видно, что при больших k волновое число не влияет на поглощение волны.

Рассмотрим случай, когда температуры жидкой и твёрдой фаз одинаковы, т.е. $\theta_1 = \theta_2$ и $T_{01} = T_{02}$.

Тогда из системы уравнений (14)–(18) выпадает (18). Дисперсионное уравнение легко получится из (19) вычёркиванием пятого столбца и пятой строки.

Полученное дисперсионное уравнение решается итерацией, как и (19), решение ищется в виде (20). Выражения для ω_0, ω_1 и ω_2 остаются прежними, а действительные и мнимые части ω_3 имеют вид:

$$\mathrm{Re}\,\omega_3 = \frac{\left(D_3 + D_4 k^2\right)k^2}{D_5 + D_6 k^2}, \quad \mathrm{Im}\,\omega_3 = \frac{\left(D_7 + k^2 D_8\right)}{D_5 + D_6 k^2}. \tag{23}$$

Как видно из выражения (23), они сильно отличаются от соотношений (21) и (22). Используя выражения (21)–(23), можно получить информацию о температурах жидкой и твёрдой фаз.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shekoyan A.V. Non–linear wave processes in porous media filled with fluid. //"The problems of dynamics of interaction of deformable media" V International conference. Goris. 2005. Pp.338–342.
2. Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах. М.: Физматлит, 2009. 350с.
3. Шекоян А.В. Система уравнений учитывающих температурные эффекты в среде Био. // В сб.: "Материалы международной конференции". Ч.II. Степанакерт: 2009. С.214-216.
4. Багдоев А.Г., Шекоян А.В. Нелинейные акустические волны в пористых средах, заполненных электропроводящей жидкостью. // Нелинейный мир. 2008. Т.6. №5-6. С.314-323.
5. Нигматуллин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 330с.
6. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. Механика насыщенных пористых сред. М.: Недра, 1970. 333с.
7. Lopatnikov S.L., Cheng A.H.–D Variational formulation of fluid infiltrated porous materials in thermal and mechanical equilibrum. // Mechanics of Materials. 2002.V.42. P.685–704.
8. Oka F., Kimoto S., Kum Y.S., Takada N., Higo Y. A finit element analysis of the thermo–hydro–mechanically coopled problem of cohesive deporit. // Poro–Mechanics. III. Editor by Y.N. Abousleiman, A.H.–D. Cheng, F. Ulm. A.A. Balkema Publ. Leiden/London/New York/Philadelphia/Singapore. 2005. P.383-388.
9. Lix S., Zhuo X.Y. Thermodynamics framework for unsaturated granual soil. // Poro–Mechanics. III. Editor by Y.N. Abousleiman, A.H.–D. Cheng, F. Ulm. A.A. Balkema Publ. Leiden/London/New York/Philadelphia/Singapore. 2005. P.509-514.
10. Yamamoto K., Koyama T., Abousleiman Y.N. Poro–mechanical/chemical coupling analysis of borehole instability in geterogeneous shale. // Poro–Mechanics. III. Editor by Y.N. Abousleiman, A.H.–D. Cheng, F. Ulm. In books: A.A. Balkema Publ. Leiden/London/New York/Philadelphia/Singapore. 2005. P.661-668.
11. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987. 248с.

Сведения об авторах:

Шекоян Ашот Вазгенович, кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник Института механики НАН Армении,
тел.: 010 56-85-69
E-mail: ashotshek@mechins.sci.am.

Саноян Юрий Геворкович, кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник Института механики НАН Армении,
тел.: 010 54-13-19.
E-mail: yura@mechins.sci.am,

Поступила в редакцию 28.10.2011