

УДК 539.3:534.1

**АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ
ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ
ОТВЕРСТИЕМ И ТОЛЩИННОЙ ПОЛЯРИЗАЦИЕЙ**

Азатян Г.Л., Геворкян Р.С., Погосян А.М.

Ключевые слова: асимптотический метод, электроупругость, пьезоэлектричество.
Keywords: asymptotics methods, electroelasticity, piezoelectrics.

Ազատյան Գ.Լ., Գևորգյան Ռ.Ս., Պողոսյան Հ.Մ.

**Ըստ հաստոյթյան բեւեռացված պիեզակերամիկական կլոր անցքով անհամասեռ սալի
էլէկտրաառաձգականութեան խնդրի ասիմպտոտիկական լուծումը**

Էլէկտրաառաձգականութեան տեսութեան եռաչափ խնդրի հավասարումների ասիմպտոտիկական ինտեգրման եղանակով արտածված են ռեկուրենտ բանաձևեր անվերջ մեծ երկայնական չափսերի պիեզակերամիկական կլոր անցքով բարակ սալի լարումների թենզորի, տեղափոխումների վեկտորի եւ էլէկտրական դաշտի պոտենցիալի համար: Սալը բեւեռացված է ըստ հաստոյթյան: Դիտարկված են այն դեպքերը, երբ սալի դիմալին մակերևութային տրված են ժամանակի ընթացքում սինուսոիդով փոփոխվող էլէկտրական պոտենցիալները առազգականութեան տեսութեան առաջին, երկրորդ և խառը խնդրի պայմանների հետ միասին: Արտածված և լուծված են ռեզոնանսային հաճախությունների դիսպերսիոն հավասարումները: Յուրյ է տրված, որ երբ դիմալին մակերևութային վրա տրված են մեխանիկական լարումները սալի ռեզոնանսային հաճախությունները երկու անգամ մեծ են խառը եզրային պայմաններով սալի ռեզոնանսային հաճախություններից:

Azatyany G.L., Gevorgyan R.S., Poghosyan H.M.

Asymptotics of electroelasticity piezoceramic inhomogeneous plate with a circular hole and the thickness polarization

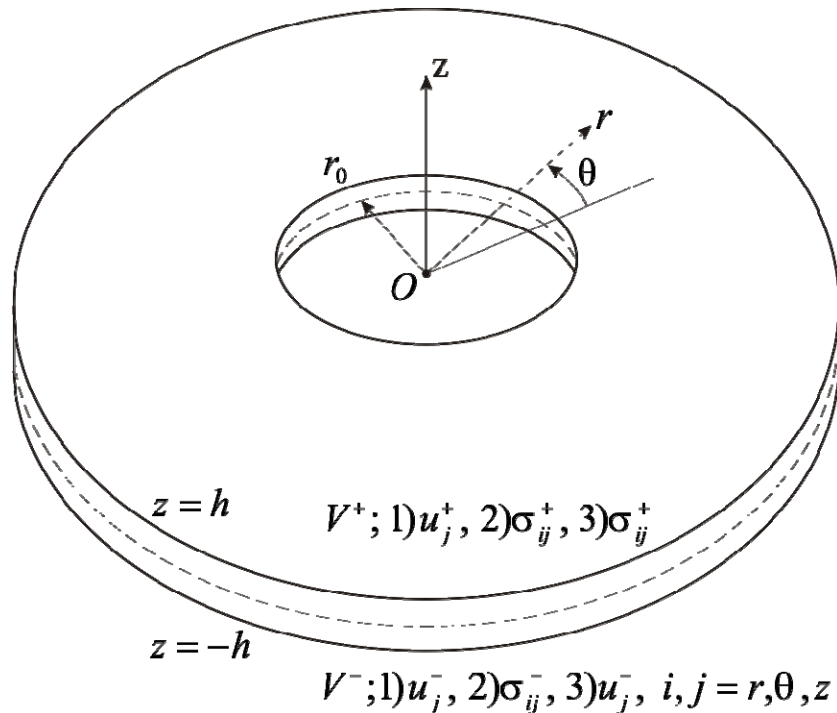
Asymptotic integration of the equations of three-dimensional problems of the theory electroelasticity derived recurrence formulas for determining the components of the stress tensor, displacement vector and electric potential of the plate of infinite longitudinal size with a circular aperture of inhomogeneous in terms of piezoelectric ceramics. The plate is polarized by thickness. Examined cases in which its front surfaces are given electric potentials together with the terms of the first, second or mixed boundary value problems of elasticity theory.

Ասիմպտոտիկական ինտեգրման մեթոդով լուծված է ռեկուրենտ բանաձևեր անվերջ մեծ երկայնական չափսերի պիեզակերամիկական կլոր անցքով բարակ սալի լարումների թենզորի, տեղափոխումների վեկտորի եւ էլէկտրական դաշտի պոտենցիալի համար: Սալը բեւեռացված է ըստ հաստոյթյան: Դիտարկված են այն դեպքերը, երբ սալի դիմալին մակերևութային տրված են ժամանակի ընթացքում սինուսոիդով փոփոխվող էլէկտրական պոտենցիալները առազգականութեան տեսութեան առաջին, երկրորդ և խառը խնդրի պայմանների հետ միասին: Արտածված և լուծված են ռեզոնանսային հաճախությունների դիսպերսիոն հավասարումները: Յուրյ է տրված, որ երբ դիմալին մակերևութային վրա տրված են մեխանիկական լարումները սալի ռեզոնանսային հաճախությունները երկու անգամ մեծ են խառը եզրային պայմաններով սալի ռեզոնանսային հաճախություններից:

Ասիմպտոտիկական լուծումը լուծված է ռեկուրենտ բանաձևեր անվերջ մեծ երկայնական չափսերի պիեզակերամիկական կլոր անցքով բարակ սալի լարումների թենզորի, տեղափոխումների վեկտորի եւ էլէկտրական դաշտի պոտենցիալի համար: Սալը բեւեռացված է ըստ հաստոյթյան: Դիտարկված են այն դեպքերը, երբ սալի դիմալին մակերևութային տրված են ժամանակի ընթացքում սինուսոիդով փոփոխվող էլէկտրական պոտենցիալները առազգականութեան տեսութեան առաջին, երկրորդ և խառը խնդրի պայմանների հետ միասին: Արտածված և լուծված են ռեզոնանսային հաճախությունների դիսպերսիոն հավասարումները: Յուրյ է տրված, որ երբ դիմալին մակերևութային վրա տրված են մեխանիկական լարումները սալի ռեզոնանսային հաճախությունները երկու անգամ մեծ են խառը եզրային պայմաններով սալի ռեզոնանսային հաճախություններից:

рекуррентные формулы позволяют определить компоненты вектора перемещения и тензора механических напряжений, а также напряжение электрического поля с любой асимптотической точностью при различных механических граничных условиях. В каждом случае получены и решены дисперсионные уравнения резонансных частот. Приведены примеры. Последовательность применения выведенных рекуррентных формул является готовым алгоритмом компьютерной программы, позволяющей получить аналитические решения поставленных краевых задач с любой необходимой асимптотической точностью $O(\varepsilon^S)$.

1. Постановка краевых задач. Имеем тонкую пластину толщины $2h$ и бесконечных продольных размеров из трансверсально-изотропной, в плане неоднородной, предварительно поляризованной по толщине керамики класса $6mm$, которая в цилиндрической системе координат занимает область $\Omega = \{r, \theta, z: r_0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi, |z| \leq h \ll r_0\}$ (фигура)



Фигура

На лицевых поверхностях пластины заданы потенциалы электрического поля

$$\varphi^*(r, \theta, z = \pm h, t) = V_0^{*\pm}(r, \theta, t) \quad (1.1)$$

вместе с одной из комбинаций граничных условий:

второй

$$u_j^*(r, \theta, z = \pm h, t) = u_j^{*\pm}(r, \theta, t), \quad j = r, \theta, z, \quad (1.2)$$

первой

$$\sigma_{jz}^*(r, \theta, z = \pm h, t) = \sigma_{jz}^{*\pm}(r, \theta, t), \quad j = r, \theta, z \quad (1.3)$$

и смешанной

$$u_j^*(r, \theta, z = -h, t) = u_j^*(r, \theta, t), \quad \sigma_{jz}^*(r, \theta, z = h, t) = \sigma_{jz}^{*+}(r, \theta, t), \quad j = r, \theta, z \quad (1.4)$$

краевых задач теории упругости.

Граничные условия на торцах тонкого тела не ставятся. Это будет обосновано позже. Не ставятся также начальные условия, предполагая, что рассматривается установившийся процесс.

Требуется найти удовлетворяющее граничным условиям (1.1), (1.2) либо (1.1), (1.3) или (1.1), (1.4) решение полной системы уравнений электроупругости пьезокерамической среды [7,8], которая состоит из динамических уравнений упругой среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}^*}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}^* - \sigma_{\theta\theta}^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_r^*, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^*}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\theta}^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^*}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_\theta^*, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^*}{\partial r} + \frac{\sigma_{rz}^*}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}^*}{\partial z} &= \rho \ddot{u}_z^*, \end{aligned} \quad (1.5)$$

уравнений вынужденной электростатики

$$\operatorname{div} \vec{D}^* = 0, \quad \vec{E}^* = -\operatorname{grad} \varphi^* \quad (1.6)$$

и уравнений состояния предварительно поляризованной трансверсально-изотропной пьезокерамической пластины класса бтм, поперечная ось симметрии которой совпадает с направлением поля предварительной поляризации, по которой направлена также ось Oz цилиндрической системы координат. Они имеют вид [10,11]:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^* &= c_{11}^E \varepsilon_{rr}^* + c_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta}^* + c_{13}^E \varepsilon_{zz}^* - e_{31}^E E_z^*, \quad \sigma_{\theta\theta}^* = c_{12}^E \varepsilon_{rr}^* + c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta}^* + c_{13}^E \varepsilon_{zz}^* - e_{31}^E E_z^*, \\ \sigma_{zz}^* &= c_{13}^E (\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\theta\theta}^*) + c_{33}^E \varepsilon_{zz}^* - e_{33}^E E_z^*, \quad \sigma_{rz}^* = c_{55}^E \varepsilon_{rz}^* - e_{51}^E E_r^*, \\ \sigma_{\theta z}^* &= c_{55}^E \varepsilon_{\theta z}^* - e_{51}^E E_\theta^*, \quad \sigma_{r\theta}^* = c_{66}^E \varepsilon_{r\theta}^*, \\ D_r^* &= \varepsilon_{11}^S E_r^* + e_{51}^E \varepsilon_{rz}^*, \quad D_\theta^* = \varepsilon_{11}^S E_\theta^* + e_{51}^E \varepsilon_{\theta z}^*, \quad D_z^* = \varepsilon_{33}^S E_z^* + e_{31}^E (\varepsilon_{rr}^* + \varepsilon_{\theta\theta}^*) + e_{33}^E \varepsilon_{zz}^*, \\ \varepsilon_{rr}^* &= \frac{\partial u_r^*}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta}^* = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^*}{\partial \theta} + \frac{u_r^*}{r}, \quad \varepsilon_{zz}^* = \frac{\partial u_z^*}{\partial z}, \\ \varepsilon_{\theta z}^* &= \frac{\partial u_\theta^*}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^*}{\partial \theta}, \quad \varepsilon_{rz}^* = \frac{\partial u_r^*}{\partial z} + \frac{\partial u_z^*}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\theta}^* = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta^*}{\partial r} - \frac{u_\theta^*}{r}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

В уравнениях и соотношениях (1.5)-(1.7) обозначены: σ_{ij}^* , ε_{ij}^* , u_j^* , ($i, j = r, \theta, z$)

– компоненты соответственно тензоров механических напряжений, деформаций и вектора перемещения; φ – потенциал электрического поля; E_j , D_j , ($i, j = r, \theta, z$)

– компоненты векторов соответственно напряжённости электрического поля и электрической индукции керамической пластины; $c_{11}^E, c_{12}^E, c_{13}^E, c_{33}^E, c_{44}^E$ – коэффициенты упругости керамики при постоянном (нулевом) электрическом поле; $\varepsilon_{11}^S, \varepsilon_{33}^S$ – электрические проницаемости при постоянной (нулевой) деформации;

e_{31}, e_{15}, e_{33} – пьезомодули керамики. Считается, что все физико-механические коэффициенты керамики могут быть функциями от продольных координат (r, θ) .

2. Вывод системы разрешающих уравнений. Для решения поставленных краевых задач предположим, что все искомые и заданные выше функции имеют вид $Q^*(r, \theta, z, t) = Q(r, \theta, z)e^{i\omega t}$, $Q = \{\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^\pm, \varepsilon_{ij}, u_{ij}, u_{ij}^\pm D_j, E_j, \varphi, V^\pm\}$, $i, j = r, \theta, z$ (2.1)

Одновременно во всех уравнениях и соотношениях перейдем к системе безразмерных координат ξ, η, ζ и безразмерным перемещениям по формулам

$$\xi = \frac{r}{r_0}, \quad \eta = \theta, \quad \zeta = \frac{z}{h} = \varepsilon^{-1} \frac{z}{r_0}, \quad \varepsilon = \frac{h}{r_0}, \quad u = \frac{u_r}{r_0}, \quad v = \frac{u_\theta}{r_0}, \quad w = \frac{u_z}{r_0}. \quad (2.2)$$

В результате получим систему уравнений и соотношений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \zeta} + \frac{1}{\xi} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \rho \omega^2 h^2 u &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \zeta} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{\xi} + \rho \omega^2 h^2 v &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \zeta} + \frac{\sigma_{rz}}{\xi} + \rho \omega^2 h^2 w &= 0, \\ \varepsilon^{-1} \frac{\partial D_z}{\partial \zeta} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial D_\theta}{\partial \eta} + \frac{D_r}{\xi} + \frac{\partial D_r}{\partial \xi} &= 0, \\ \sigma_{rr} &= c_{11}^E \varepsilon_{rr} + c_{12}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz} - e_{31}^E E_z, \quad \sigma_{\theta\theta} = c_{12}^E \varepsilon_{rr} + c_{11}^E \varepsilon_{\theta\theta} + c_{13}^E \varepsilon_{zz} - e_{31}^E E_z, \\ \sigma_{zz} &= c_{13}^E (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + c_{33}^E \varepsilon_{zz} - e_{33}^E E_z, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z} &= c_{55}^E \varepsilon_{\theta z} - e_{51}^E E_\theta, \quad \sigma_{rz} = c_{55}^E \varepsilon_{rz} - e_{51}^E E_r, \quad \sigma_{r\theta} = c_{66}^E \varepsilon_{r\theta}, \\ D_r &= \varepsilon_{11}^\sigma E_r + e_{51}^\sigma \varepsilon_{rz}, \quad D_\theta = \varepsilon_{11}^\sigma E_\theta + e_{51}^\sigma \varepsilon_{\theta z}, \\ D_z &= \varepsilon_{33}^\sigma E_z + e_{31}^\sigma (\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta}) + e_{33}^\sigma \varepsilon_{zz}, \\ \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + u \right), \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon^{-1} \frac{\partial w}{\partial \zeta}, \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial u}{\partial \eta} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial \xi}, \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{1}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial v}{\partial \zeta}, \quad \varepsilon_{rz} = \frac{\partial w}{\partial \xi} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial u}{\partial \zeta}, \\ E_r &= -\frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad E_\theta = -\frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad E_z = -\frac{\partial \psi}{\partial \zeta}, \quad \psi = \frac{\varphi}{h}. \end{aligned}$$

Система уравнений и соотношений (2.3) сингулярно возмущена геометрическим малым параметром ε . Её решение складывается из двух видов решений [3,4,12–14]. Первое из них I^{int} – решение внутренней задачи, удовлетворяет граничным условиям, заданным на лицевых поверхностях тонкого тела. Второе решение, I^b является решением задачи пограничного слоя, на лицевых поверхностях тела удовлетворяет соответствующим однородным (нулевым) условиям и в сумме с решением внутренней задачи удовлетворяет граничным условиям, заданным на боковой поверхности (торцах) пластины.

Поскольку рассматриваемая предварительно поляризованная трансверсально-изотропная пьезокерамика тонкая ($h \ll r_0$), ось Oz совпадает с осью упругой симметрии и направлением поля предварительной поляризации, на свободном от электродов торце $r = r_0$ керамики условия не ставлены. Считается, что их действие на электрическое поле внутри керамики и её напряжённо-деформированное состояние незначительны. Это равносильно, чтобы пьезокерамическая пластина имела бесконечные продольные размеры ($r_0 \leq r < \infty$).

Решение внутренней задачи ищем в виде асимптотического разложения

$$Q(x, y, z) = \varepsilon^{\chi_Q} \sum_{s=0}^S \varepsilon^s Q^{(s)}(\xi, \eta, \zeta), \quad (2.4)$$

где Q – любая из неизвестных величин: компоненты u_j вектора перемещения, потенциал электрического поля ψ (φ/h) и компоненты тензора напряжений σ_{ij} ; χ_Q – асимптотический порядок соответствующей величины, причём для всех перемещений $\chi_u = 0$ и $\chi_\psi = \chi_E = \chi_\sigma = -1$, для потенциала и напряжённости электрического поля и для всех механических напряжений.

Подставив (2.4) в систему уравнений (2.3) и приравняв коэффициенты при ε^s в левых и правых частях уравнений, получим систему разрешающих уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u^{(s)}}{\partial \zeta^2} + \alpha^2 u^{(s)} &= R_u^{(s)}(u, v, w; \alpha, \beta, \gamma), \quad \alpha = \beta = \sqrt{\rho \omega^2 h^2 / c_{55}^E}, \\ \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \zeta} &= A^{(s)} + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^\sigma} \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + R_\psi^{(s)}, \quad \gamma = \sqrt{\rho \omega^2 h^2 / \delta_{33}}, \quad \delta_{33} = \frac{c_{33}^E \varepsilon_{33}^\sigma + e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^\sigma}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Здесь обозначены:

$$\begin{aligned} R_u^{(s)} &= -\frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} - \left(\frac{\partial \sigma_{rr}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{1}{\xi} (\sigma_{rr}^{(s-1)} - \sigma_{\theta\theta}^{(s-1)}) + e_{15} \frac{\partial^2 \psi^{(s-1)}}{\partial \xi \partial \zeta} \right) / c_{55}^E, \\ R_v^{(s)} &= -\frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 w^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} - \left(\frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(s-1)}}{\xi} + e_{51} \frac{1}{\xi} \frac{\partial^2 \psi^{(s-1)}}{\partial \eta \partial \zeta} \right) / c_{55}^E, \\ R_w^{(s)} &= \left(R_w^{*(s)} - e_{33} \frac{\partial}{\partial \zeta} R_\psi^{(s)} \right) / \delta_{33}, \quad R_w^{*(s)} = -\frac{\partial \sigma_{rz}^{(s-1)}}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(s-1)}}{\partial \eta} - \frac{\sigma_{rz}^{(s-1)}}{\xi} - \frac{\partial \sigma_{zz}^{(s)}}{\partial \zeta}, \\ R_\psi^{(s)} &= \frac{1}{\varepsilon_{33}^\sigma} I_D^{(s)}(\zeta) + \frac{e_{31}}{\varepsilon_{33}^\sigma} \left[\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + u^{(s-1)} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\sigma_{rr}^{(s)} = c_{11}^E \frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + c_{12}^E \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + u^{(s-1)} \right) + c_{13}^E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} - e_{31} \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \zeta} \quad (r, \theta; 11, 12),$$

$$\sigma_{zz}^{(s)} = c_{33}^E \frac{\partial w^{(s)}}{\partial \zeta} + e_{33} \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{zz}^{(s)}, \quad \sigma_{zz}^{(s)} = c_{13}^E \left[\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \eta} + u^{(s-1)} \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r\theta}^{(s)} &= c_{66}^E \frac{1}{\xi} \left(\frac{\partial u^{(s-1)}}{\partial \eta} - v^{(s-1)} \right) + \frac{\partial v^{(s-1)}}{\partial \xi}, \\
\sigma_{rz}^{(s)} &= c_{55}^E \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{rz*}^{(s)}, \quad \sigma_{rz*}^{(s)} = c_{55}^E \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} + e_{51} \frac{\partial \psi^{(s-1)}}{\partial \xi}, \\
\sigma_{\theta z}^{(s)} &= c_{55}^E \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} + \sigma_{\theta z*}^{(s)}, \quad \sigma_{\theta z*}^{(s)} = c_{55}^E \frac{1}{\xi} \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \eta} + e_{51} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi^{(s-1)}}{\partial \eta}, \\
D_r^{(s)} &= -\varepsilon_{11}^\sigma \frac{\partial \psi^{(s-1)}}{\partial \xi} E_r + e_{51} \left(\frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial u^{(s)}}{\partial \zeta} \right), \\
D_\theta^{(s)} &= -\varepsilon_{11}^\sigma \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi^{(s)}}{\partial \eta} + e_{51} \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial w^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial v^{(s)}}{\partial \zeta} \right), \\
D_z^{(s)} &= -\varepsilon_{33}^\sigma A^{(s)} - I_D^{(s)}(\zeta), \quad I_D^{(s)}(\zeta) = \int_0^\zeta \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial D_\theta^{(s-1)}}{\partial \eta} + \frac{D_r^{(s-1)}}{\xi} + \frac{\partial D_r^{(s-1)}}{\partial \xi} \right) d\zeta,
\end{aligned}$$

$A^{(s)}$ – неизвестная пока функция интегрирования.

3. Решение поставленных краевых задач. Проинтегрировав систему разрешающих уравнений (2.5), получаем общий интеграл поставленных краевых задач (1.1)–(1.4) в виде

$$\begin{aligned}
u^{(s)} &= M_u^{(s)} \sin \alpha \zeta + N_u^{(s)} \cos \alpha \zeta + I_u^{(s)}(\zeta) \quad (u, v, w; \alpha, \beta, \gamma), \\
\psi^{(s)} &= A^{(s)} \zeta + B^{(s)} + \frac{e_{33}^\sigma}{\varepsilon_{33}^\sigma} w^{(s)} + I_\psi^{(s)}, \quad I_\psi^{(s)} = \int_0^\zeta R_\psi^{(s)} d\zeta,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где $I_u^{(s)}(u, v, w)$ – частные решения неоднородной системы уравнений, определённые, в частности, методом вариации постоянных

$$I_u^{(s)} = \frac{1}{\alpha} \int_0^\zeta R_u^{(s)} \sin \alpha(\zeta - \tau) d\tau \quad (u, v, w; \alpha, \beta, \gamma). \tag{3.2}$$

Общий интеграл (3.1) содержит неопределённые пока функции интегрирования $M_u^{(s)}, N_u^{(s)}(u, v, w), A^{(s)}, B^{(s)}$, которые однозначно определяются из комбинаций граничных условий (1.1)–(1.4).

а) Удовлетворив граничным условиям (1.1), (1.2), для амплитуд компонент вектора перемещения однозначно получим

$$\begin{aligned}
M_u^{(s)} &= F_u^{-(s)} \cos \alpha / \sin 2\alpha, \quad N_u^{(s)} = F_u^{+(s)} \sin \alpha / \sin 2\alpha, \\
F_u^{\pm(s)} &= (u^{+(s)} \pm u^{-(s)}) - (I_u^{(s)}(\zeta=1) \pm I_u^{(s)}(\zeta=-1)), \quad \sin 2\alpha \neq 0,
\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$u^{\pm(0)} = u_r^\pm / l, \quad u^{\pm(s)} = 0, \quad s \neq 0; \quad (u, v, w; \alpha, \beta, \gamma; r, \theta, z).$$

При этом, для всех краевых задач с граничными условиями (1.1)–(1.4) потенциал электрического поля определяется формулами:

$$\psi^{(s)} = \zeta A^{(s)} + B^{(s)} + e_{33}^\sigma w^{(s)} / \varepsilon_{33}^\sigma + I_\psi^{(s)}(\zeta), \quad A^{(s)} = W^{-(s)}, \quad B^{(s)} = W^{+(s)},$$

$$W^{\pm(s)} = \frac{1}{2}(V_0^{+(s)} \pm V_0^{-s}) - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^\sigma} (w^{(s)}(\zeta=1) \pm w^{(s)}(\zeta=-1)) - \frac{1}{2}(I_\psi^{(s)}(\zeta=1) \pm I_\psi^{(s)}(\zeta=-1)), V_0^{\pm(0)} = \varepsilon V_0^\pm/h, V_0^{\pm(s)} = 0, s > 0 \quad (3.4)$$

при значениях $w^{(s)}(\zeta=-1)$, $w^{(s)}(\zeta=1)$ соответствующего варианта механических граничных условий (1.2)–(1.4), что свидетельствует о тесной связи потенциала φ электрического поля с поперечным перемещением w , совпадающим с направлением поляризации пьезокерамики.

Заметим, что при этом дисперсионные уравнения частот резонансных колебаний и их решения для продольных (сдвиговых) и поперечных (нормальных) деформаций будут соответственно

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha = 0 &\Rightarrow \omega_u = \omega_v = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{c_{44}^E/\rho}, \\ \sin 2\gamma = 0 &\Rightarrow \omega_w = \frac{\pi n}{2h} \sqrt{\delta_{33}/\rho}, \quad n=1,2,\dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из формул (3.4) следует, что резонансные частоты сдвиговых колебаний u, v , которые происходят перпендикулярно к оси поляризации, не зависят от пьезоэлектрических коэффициентов пластины.

Рассмотрим пример, когда в граничных условиях (1.1), (1.2) с учётом (2.1), величины амплитуд постоянны: $V_0^\pm = \pm V_0$, $u_j^\pm(r, \theta) = u_j^\pm$, $j = r, \theta, z$.

Тогда, с точностью первого шага итерации, компоненты вектора перемещения и значение потенциала электрического поля примут вид:

$$\begin{aligned} u_r^* &= \frac{e^{i\omega t}}{\sin 2\alpha} [u_r^+ \sin \alpha (1 + \zeta) + u_r^- \sin \alpha (1 - \zeta)] \quad (r, \theta, z; \alpha, \alpha, \gamma), \\ \varphi^* &= e^{i\omega t} \left[\frac{z}{h} \left(V_0 - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^\sigma} (u_z^+ - u_z^-) \right) - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^\sigma} (u_z^+ + u_z^-) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^\sigma \sin 2\gamma} (u_z^+ \sin \gamma (1 + \zeta) + u_z^- \sin \gamma (1 - \zeta)) \right], \end{aligned} \quad (3.6)$$

а компоненты тензора напряжений и индукции электрического поля можно вычислить по формулам (1.7).

С точностью первого шага итерации определим разность потенциалов $V_0(t)$ на электродах пьезоэлектрического генератора, когда одна электродированная (покрытая электродом) лицевая поверхность пьезокерамической пластины с круговым отверстием жёстко закреплена, а противоположной поверхности сообщены нормальные колебания: $u_j^\pm = u_z^\pm = 0$, $j = r, \theta$, $u_z^+ = \text{const}$.

Из (3.6) получаем

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{e^{i\omega t}}{\sin 2\gamma} u_z^+ \sin \gamma (1 + \zeta), \\ \varphi &= \frac{ze^{i\omega t}}{h} V_0 + \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \frac{e_{33} u_z^+ e^{i\omega t}}{2\varepsilon_{33}^\sigma} + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^\sigma} \frac{u_z^+ e^{i\omega t}}{\sin 2\gamma} \sin \gamma (1 + \zeta), \end{aligned} \quad (3.7)$$

а из условия разомкнутости внешней цепи [11]

$$\frac{d}{dt} \iint_{S^+} \vec{n} \vec{D} ds = 0 \Rightarrow \vec{n} \vec{D} = 0 \quad (D_z = 0) \quad (3.8)$$

получаем связь между разностями потенциалов электродированных поверхностей пьезокерамической пластины и амплитудой колебания одной из её поверхностей

$$V_0 = \frac{e_{33} u_z^+}{2\varepsilon_{33}^\sigma} \quad \text{или} \quad u_z^+ = \frac{2\varepsilon_{33}^\sigma}{e_{33}} V_0. \quad (3.9)$$

б) Когда на лицевых поверхностях тонкой керамики заданы условия первой краевой задачи теории упругости (1.3), амплитуды колебаний определяются формулами:

$$\begin{aligned} M_u^{(s)} &= \Phi_u^{+(s)} \sin \alpha / \sin 2\alpha, \quad N_u^{(s)} = -\Phi_u^{-(s)} \cos \alpha / \sin 2\alpha \quad (u, v), \\ M_w^{(s)} &= \varepsilon_{33}^\sigma (\Phi_w^{+(s)} / 2 - e_{33} \Phi_\psi^{-(s)}) / \Delta, \quad N_w^{(s)} = \frac{1}{2\gamma\delta_{33}} \Phi_w^{-(s)} / \sin \gamma, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\Delta = (c_{33}^E \varepsilon_{33}^\sigma + e_{33}^2) \gamma \cos \gamma - e_{33}^2 \sin \gamma, \quad \Delta \neq 0, \quad \sin \gamma \neq 0, \quad \sin 2\alpha \neq 0.$$

Здесь обозначены

$$\begin{aligned} \Phi_u^{\pm(s)} &= \frac{1}{\alpha c_{44}^E} \left[\sigma_{rz}^{+(s)} \pm \sigma_{rz}^{-(s)} - c_{44}^E \left(\left. \frac{\partial I_u^{(s)}}{\partial \zeta} \right|_{(\zeta=1)} \pm \left. \frac{\partial I_u^{(s)}}{\partial \zeta} \right|_{(\zeta=-1)} \right) - \right. \\ &\quad \left. - (\sigma_{rz}^{(s)}(\zeta=1) \pm \sigma_{rz}^{(s)}(\zeta=-1)) \right] \quad (r, \theta; u, v), \\ \Phi_w^{\pm(s)} &= \sigma_{zz}^{+(s)} \pm \sigma_{zz}^{-(s)} - \left(c_{33}^E + \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^\sigma} \right) \left(\left. \frac{\partial I_w^{(s)}}{\partial \zeta} \right|_{(\zeta=1)} \pm \left. \frac{\partial I_w^{(s)}}{\partial \zeta} \right|_{(\zeta=-1)} \right) - \\ &\quad - e_{33} (R_\psi^{(s)}(\zeta=1) \pm R_\psi^{(s)}(\zeta=-1)) - (\sigma_{zz}^{(s)}(\zeta=1) \pm \sigma_{zz}^{(s)}(\zeta=-1)), \\ \Phi_\psi^{\pm(s)} &= \frac{1}{2} (V_0^{+(s)} \pm V_0^{-(s)}) - \frac{e_{33}}{2\varepsilon_{33}^\sigma} (I_w^{(s)}(\zeta=1) \pm I_w^{(s)}(\zeta=-1)) - \\ &\quad - \frac{1}{2} (I_\psi^{(s)}(\zeta=1) \pm I_\psi^{(s)}(\zeta=-1)). \end{aligned} \quad (3.11)$$

При граничных условиях (1.3) резонансные частоты сдвиговых колебаний совпадают с резонансными частотами (3.5)

Тригонометрическое дисперсионное уравнение частот резонансных поперечных (нормальных) колебаний и соответствующие резонансные частоты будут:

$$\sin \gamma = 0, \quad \omega_w = \frac{\pi n}{h} \sqrt{\frac{\delta_{33}}{\rho}}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad \delta_{33} = \frac{c_{33}^E \varepsilon_{33}^\sigma + e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^\sigma}, \quad (3.12)$$

а трансцендентное дисперсионное уравнение и часть соответствующих резонансных частот приводим для конкретной пьезокерамики $BaTiO_3$ с физико-механическими коэффициентами

$$c_{11}^E = 1.5 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad c_{13}^E = 0.66 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad c_{33}^E = 1.4 \times 10^{11} \text{ Pa}, \quad c_{44}^E = 0.45 \times 10^{11} \text{ Pa},$$

$$\varepsilon_{33}^\sigma = 10^{-9} \text{ Ф / м}, \quad e_{31} = -4 \text{ К / м}^2, \quad e_{33} = 17 \text{ К / м}^2, \quad e_{15} = 11 \text{ К / м}^2,$$

$$\rho = 6.02 \times 10^3 \text{ кг / м}^3, \quad h = 10^{-3} \text{ м},$$

$$\text{tg} \gamma = \gamma \frac{\varepsilon_{33}^\sigma \delta_{33}}{e_{33}^2} \Rightarrow \quad \omega_{w1} = 8.086 \times 10^6 \text{ Hz}, \quad (3.13)$$

$$\omega_{w2} = 38.54 \times 10^6 \text{ Hz}, \quad \omega_{w3} = 65.57 \times 10^6 \text{ Hz},$$

$$\omega_{w4} = 92.30 \times 10^6 \text{ Hz}, \quad \omega_{w5} = 118.9 \times 10^6 \text{ Hz}.$$

Заметим, что численные значения резонансных частот лежат в ультразвуковом диапазоне.

Приведём пример, когда в граничных условиях (1.1), (1.3) с учётом (2.1), величины амплитуд электрических и механических напряжений $V_0^\pm = \pm V_0$, $\sigma_{jz}^\pm(r, \theta)$, $j = r, \theta, z$ постоянны. С точностью первого шага итерации, компоненты вектора перемещения и значение потенциала электрического поля будут:

$$\begin{aligned} u_r^* &= \frac{he^{i\omega t}}{\alpha c_{44}^E \sin 2\alpha} \left[\sigma_{rz}^- \cos \alpha (1 - \zeta) - \sigma_{rz}^+ \cos \alpha (1 + \zeta) \right] (r, \theta), \\ u_z^* &= \frac{\varepsilon_{33}^\sigma e^{i\omega t}}{2\Delta} \left(h(\sigma_{zz}^+ + \sigma_{zz}^-) - e_{33} V_0 \right) \sin \gamma \zeta + \frac{he^{i\omega t}}{2\gamma \delta_{33} \sin \gamma} (\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-) \cos \gamma \zeta, \\ \varphi^* &= \frac{z}{h} V_0 e^{i\omega t} + \frac{e_{33}}{\varepsilon_{33}^\sigma} \frac{he^{i\omega t}}{2\gamma \delta_{33} \sin \gamma} (\sigma_{zz}^+ - \sigma_{zz}^-) (\cos \gamma \zeta - \cos \gamma) + \\ &\quad + \frac{e_{33} e^{i\omega t}}{2\Delta} \left(h(\sigma_{zz}^+ + \sigma_{zz}^-) - e_{33} V_0 \right) \left(\sin \gamma \zeta - \frac{z}{h} \sin \gamma \right), \end{aligned} \quad (3.14)$$

а компоненты тензора напряжений и вектора электрической индукции можно вычислить по формулам (1.7). В частном случае, когда к электродированным и одновременно свободным от механических нагрузок лицевым поверхностям пьезокерамической пластины приложены периодически меняющиеся во времени потенциалы $\varphi^\pm = \pm V_0 e^{i\omega t}$, $\sigma_{jz}^\pm = 0$, то из (3.14) получаем

$$\varphi^* = \frac{z}{h} V_0 e^{i\omega t} - \frac{e_{33} e^{i\omega t}}{2\Delta} e_{33} V_0 \left(\sin \gamma \zeta - \frac{z}{h} \sin \gamma \right), \quad u_z^{(U)} = -\frac{e_{33} \varepsilon_{33}^\sigma e^{i\omega t}}{2\Delta} V_0 \sin \gamma \zeta, \quad (3.15)$$

что моделирует работу ультразвукового генератора (УЗГ), излучающего в два

полупространства $z \leq -h$ и $z \geq h$ с амплитудой $u_z^{(2U)} = \frac{e_{33} \varepsilon_{33}^\sigma}{2\Delta} V_0 \sin \gamma$. Излучение

должно иметь частоту, близкую к соответствующим первым модам [10,11,15] резонансных частот (3.13).

в) При смешанных граничных условиях (1.4) шесть функций интегрирования будут

$$\begin{aligned} M_w^{(s)} &= \left(G_{zz}^{(s)} \cos \gamma + D G_w^{(s)} \right) / (C \cos \gamma - D \sin \gamma), \\ N_w^{(s)} &= \left(G_{zz}^{(s)} \sin \gamma + C G_w^{(s)} \right) / (C \cos \gamma - D \sin \gamma), \\ M_u^{(s)} &= \left[G_{rz}^{(s)} \cos \alpha + G_u^{(s)} \sin \alpha \right] / \cos 2\alpha \\ N_u^{(s)} &= \left[G_u^{(s)} \cos \alpha - G_{rz}^{(s)} \sin \alpha \right] / \cos 2\alpha \quad (r, \theta; u, v) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$G_{zz}^{(s)} = \frac{1}{\gamma \delta_{33}} \left(\sigma_{zz}^{+(s)} - \sigma_{zz}^{(s)} - e_{33} \left(R_{\Psi}^{(s)} + \Phi_{\Psi}^{-(s)} \right) - \delta_{33} \frac{\partial I_w^{(s)}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1},$$

$$G_{rz}^{(s)} = \frac{1}{\alpha c_{44}^E} \left(\sigma_{rz}^{+(s)} - \sigma_{rz}^{(s)} - c_{44}^E \frac{\partial I_u^{(s)}}{\partial \zeta} \right)_{\zeta=1} (r, \theta; u, v),$$

$$G_u^{(s)} = u^{-(s)} - I_u^{(s)}(\zeta = -1) \quad (u, v, w),$$

$$C = \frac{\Delta}{\varepsilon_{33}^{\sigma}}, \quad D = \gamma \delta_{33} \sin \gamma, \quad C \cos \gamma - D \sin \gamma \neq 0, \quad \cos 2\alpha \neq 0,$$

а остальные два: А и В определяются по формулам (3.4) при значениях $w^{(s)}(\zeta = -1)$, $w^{(s)}(\zeta = 1)$, соответствующих варианту механических граничных условий (1.4).

Приведём также дисперсионные уравнения частот собственных поперечных и сдвиговых колебаний и часть резонансных частот

$$\cos 2\alpha = 0, \quad \omega_u = \frac{\pi(2n-1)}{4h} \sqrt{c_{44}^E/\rho}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\operatorname{tg} 2\gamma = 2\gamma \frac{\varepsilon_{33}^{\sigma} \delta_{33}}{e_{33}^2} \Rightarrow \omega_{w1}^{**} = 4.043 \times 10^6 \text{ Hz}, \quad (3.17)$$

$$\omega_{w2}^{**} = 19.27 \times 10^6 \text{ Hz}, \quad \omega_{w3}^{**} = 32.78 \times 10^6 \text{ Hz};$$

$$\omega_{w4}^{**} = 46.15 \times 10^6 \text{ Hz}, \quad \omega_{w5}^{**} = 59.47 \times 10^6 \text{ Hz};$$

Заметим, что каждое из механических граничных условий (1.2)-(1.4) имеет свою резонансную частоту, определяемую соответственно формулами (3.5),(3.12),(3.13),(3.17). Причём, из (3.13),(3.17) следует, что резонансные частоты пьезокерамической пластины с механическими граничными условиями первой краевой задачи теории упругости в два раза больше резонансных частот с механическими условиями смешанной краевой задачи.

Рассмотрим пример, когда в граничных условиях (1.1),(1.4) с учётом (2.1), величины амплитуд постоянны: $V_0^{\pm} = \pm V_0$, u_j^- , σ_{jz}^+ , $j = r, \theta, z$.

Тогда с точностью первого шага итерации компоненты вектора перемещения и значение потенциала электрического поля получают вид:

$$u_r^* = \frac{e^{i\omega t}}{\cos 2\alpha} \left(h \frac{\sigma_{rz}^+}{\alpha c_{44}^E} \sin \alpha(1 + \zeta) + u_r^- \cos \alpha(1 - \zeta) \right) \quad (r, \theta; u, v),$$

$$u_z^* = \frac{e^{i\omega t}}{\Delta} \left(h \sigma_{zz}^{+(s)} - e_{33} V_0 \right) \sin \gamma(1 + \zeta) + \frac{u_z^- e^{i\omega t}}{\Delta} \left(\gamma \delta_{33} \cos \gamma(1 - \zeta) - \frac{e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^{\sigma}} \sin \gamma \cos \gamma \zeta \right), \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \varphi^* &= \frac{z}{h} V_0 e^{i\omega t} - \frac{e_{33} e^{i\omega t}}{2\Delta \varepsilon_{33}^\sigma} (h \sigma_{zz}^{+(s)} - e_{33} V_0) \left[\left(\frac{z}{h} + 1 \right) \sin 2\gamma - 2 \sin \gamma (1 + \zeta) \right] - \\ &- \frac{u_z^- e_{33} e^{i\omega t}}{2\Delta \varepsilon_{33}^\sigma} \left[2\gamma \delta_{33} \left(\left(\frac{z}{h} - 1 \right) \sin^2 \gamma + 1 - \cos \gamma (1 - \zeta) \right) + \frac{2e_{33}^2}{\varepsilon_{33}^\sigma} \sin \gamma (\cos \gamma \zeta - \cos \gamma) \right], \\ \bar{\Delta} &= \gamma \delta_{33} \cos 2\gamma - \frac{e_{33}^2}{2\varepsilon_{33}^\sigma} \sin 2\gamma, \end{aligned}$$

а компоненты тензора напряжений и вектора электрической индукции можно вычислить по формулам (1.7). В частном случае, когда к электродированным лицевым поверхностям пьезокерамической пластины приложены периодически меняющиеся во времени потенциалы $\varphi^\pm = \pm V_0 e^{i\omega t}$, одна из них жёстко закреплена $u_z^- = 0$, а противоположная свободна от механических нагрузок $\sigma_{jz}^+ = 0$, то из (3.18) получаем

$$u_z^{(1U)} = -\frac{e_{33} e^{i\omega t}}{\Delta} V_0 \sin \gamma (1 + \zeta), \quad (3.19)$$

$$\varphi^{(1U)} = \frac{z}{h} V_0 e^{i\omega t} + \frac{e_{33} e^{i\omega t}}{2\Delta \varepsilon_{33}^\sigma} e_{33} V_0 \left[\left(\frac{z}{h} + 1 \right) \sin 2\gamma - 2 \sin \gamma (1 + \zeta) \right],$$

которое моделирует работу УЗГ, излучающего ультразвук в полупространство $z \geq h$ с амплитудой $u_z^{(1U)} = \frac{e_{33}}{\Delta} V_0 \sin 2\gamma$, с частотой, близкой к соответствующим первым модам резонансных частот (3.17), причём, частота УЗГ двустороннего излучения (3.13) в два раза выше частот УЗГ одностороннего излучения (3.17).

Заметим, что последовательность применения рекуррентных формул (2.4)–(2.6) является готовым алгоритмом компьютерной программы, позволяющей получить аналитические (и численные) решения поставленных краевых задач с любой необходимой асимптотической точностью $O(\varepsilon^S)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. О структуре решения одного класса плоских задач теории упругости анизотропного тела // Ереван: Механика. Изд-во ЕГУ, 1982. С.7–12.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи пластин с общей анизотропией // В сб. трудов 4-го Всесоюзного Симпозиума по механике конструкций из композиционных материалов. Новосибирск: Наука, 1984. С.105–110.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М: Наука.Физматлит, 1997. 414с.
4. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Гитутюн, 2005. 468с.

5. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С., Хачатрян Г.Г. Смешанные краевые задачи для анизотропных пластин переменной толщины // ПММ. 1996. Т.60. Вып.2. С.290–298.
6. Агаловян Л.А., Халатян Л.М. Асимптотика вынужденных колебаний ортотропной полосы при смешанных граничных условиях.// Доклады НАН Армении. 1999. Т.99. № 4. С.315–321.
7. Геворкян Р.С. Асимптотические решения установившихся динамических (связанных) задач термоупругости для изотропных пластин. // Изв. РАН. ПММ. 2008. Вып.1.С.148-156.
8. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Асимптотические решения связанных динамических задач термоупругости для тонких тел из анизотропных, в плане анизотропных материалов //ПММ. 2011. Т.75. Вып. 5. С.858-871.
9. Агаловян Л.А., Азатян Г.Л., Геворкян Р.С., Погосян А.М. Об асимптотическом решении пространственной динамической задачи для прямоугольной пьезо-керамической пластины// Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. № 2. С.129–137.
10. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. Киев: Наукова думка, 1988. 472с.
11. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев: Наукова думка, 1989. 279с.
12. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
13. Агаловян Л.А. Упругий пограничный слой для одного класса плоских задач // Межвуз. сборник научн.трудов. Механика. Ереван: Изд-во ЕГУ, 1984. С.51–58.
14. Геворкян Р.С. Асимптотика пограничного слоя для одного класса краевых задач анизотропных пластин // Изв.АН АрмССР. Механика. 1984. Т.37. №6. С.3–15.
15. Агрант Б.А., Башкиров В.И., Китайгородский Ю.И., Хавский Н.Н. Ультразвуковая Технология. М.: «Металлургия», 1974. 504с.

Сведения об авторах:

Азатян Григор Леваевич – кандидат физ-мат. наук,
научный сотрудник Института механики НАН РА.

E-mail: grigor_a@bk.ru

Рубен Степанович Геворкян – профессор, доктор физ-мат. наук,
ведущий научный сотрудник Института механики НАН РА.

E-mail: gevorgyanrs@mail.ru Тел.: (37410) 270828

Погосян Айк Менилович – кандидат физ-мат. наук,
научный сотрудник Института механики НАН РА.

E-mail: haikp@mail.ru

Поступила в редакцию 29.02.2012