ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №2, 2012 Механика
УДК 539.3

К РЕШЕНИЮ ПЕРВОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ О ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН ПРИ НАЛИЧИИ ВЯЗКОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Закарян Т.В.

Ключевые слова: пластинка, вынужденные колебания, вязкость, асимптотический метод.
Key words: plate, vibration, anisotropic, singularly perturbed.

Զաքարյան Տ.Վ.
Օրթոտրոպ սալերի ստիպողական տատանումների առաձգականության տեսության առաջին եզրային խնդրի լուծման մասին, երբ առկա է մածուցիկ դիմադրություն

Ուսումնասիրված են օրթոտրոպ սալի ստիպողական տատանումները դիմային մակերևույթների վրա ժամանակի ընթացքում հարմոնիկ փոփոխվող ուժի ազդեցության դեպքում, հաշվի առնելով ներքին մածուցիկ շփումը: Խնդրի լուծումը բերված է սինգուլյար գրգռված դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի լուծմանը: Գտնված է այդ համակարգի ասիմպտոտիկ լուծումը: Ցույց է տրված, որ ասիմպտոտիկ լուծումը դառնում է ճշգրիտ մաթեմատիկական լուծում, երբ արտաքին ազդեցությունը տանգենցիալ կոորդինատներից բազմանդամ է, բերված է մասնավոր օրինակ:

Zakaryan T.V.
Solution of a first boundary value problem of elasticity theory of forced vibrations of orthotropic plates with viscous resistance

In this paper the forced vibrations of orthotropic plates under the influence of time-varying harmonic forces applied to the face surfaces, taking into account the internalviscous friction We consider. Solution of the problem is reduced to solving a singularly disturbed system of differential equations. The asymptotic solution of this system is obtained. It is shown that the asymptotic solution is mathematically precise, when the external effect depends on the tangential coordinate polynomially, illustrative example is given.

Рассматриваются вынужденные колебания ортотропных пластин под воздействием гармонически изменяющихся во времени сил, приложенных к лицевым поверхностям, с учётом внутреннего вязкого трения. Решение задачи сведено к решению сингулярно возмущённой системы дифференциальных уравнений. Найдено асимптотическое решение этой системы. Показано, что асимптотическое решение становится математически точным, когда внешнее воздействие зависит от тангенциальных координат полиномиально. Приведён иллюстрационный пример.

Введение. Для решения статических и динамических задач тонких тел в последнее десятилетие широко используется асимптотический метод решения сингулярно возмущённых уравнений. При этом рассмотрены как классические краевые задачи теории упругости – на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения соответствующих компонент тензора напряжений, так и неклассические в смысле теории пластин и оболочек задачи – на лицевых поверхностях тонкого тела заданы значения вектора перемещения или смешанные условия теории упругости. Результаты, полученные в статических задачах, обобщены в монографиях [1,2]. Метод оказался эффективным для решения динамических задач как классических, так и неклассических [3-6]. Была установлена, что асимптотика решения в статической первой краевой задаче принципиально отличается от соответствующей асимптотики динамической задачи [7], в то время как для второй и смешанных краевых задач асимптотика одинакова в статических и динамических задачах [1,3,4]. Вынужденные колебания полосы с учётом вязкого сопротивления во второй и смешанной краевых задачах для ортотропной полосы рассмотрены в [8], а для ортотропных пластин – в [6,9]. Асимптотический метод оказался эффективным для исследования взаимодействия тонких тел с различными физическими полями [10-13]. В работе на основе уравнений пространственной задачи рассматриваются вынужденные колебания ортотропных пластин с учётом внутреннего трения под воздействием сил, приложенных к лицевым поверхностям.

1. Постановка задачи, основные уравнения и соотношения. Требуется найти решение динамических уравнений пространственных задач теории упругости для прямоугольных ортотропных пластин $D = \{(x, y, z): 0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b,$ $|z| \le h,\ h << l,\ l = \min(a,b)\}$ с учётом внутреннего вязкого сопротивления (трения), пропорционального скорости точек среды:

уравнения движения

$$\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial z} - k\frac{\partial u}{\partial t} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial z} - k\frac{\partial v}{\partial t} = \rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z} - k\frac{\partial w}{\partial t} = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

соотношения упругости

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a_{11}\sigma_{xx} + a_{12}\sigma_{yy} + a_{13}\sigma_{zz}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = a_{12}\sigma_{xx} + a_{22}\sigma_{yy} + a_{23}\sigma_{zz},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = a_{13}\sigma_{xx} + a_{23}\sigma_{yy} + a_{33}\sigma_{zz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_{66}\sigma_{xy}, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = a_{55}\sigma_{xz}, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = a_{44}\sigma_{yz},$$

при граничных условиях на лицевых поверхностях $z = \pm h$ пластинки:

$$\sigma_{jz}(x, y, h, t) = \sigma^{+}_{jz}(\xi, \eta)\cos\Omega t, \quad j = x, y, z \tag{1.3}$$

$$\sigma_{jz}(x, y, h, t) = -\sigma^{-}_{jz}(\xi, \eta)\cos\Omega t, \quad j = x, y, z, \tag{1.4}$$

где Ω – частота внешнего воздействия, k – коэффициент сопротивления, ρ – плотность, $\xi = x/l$, $\eta = y/l$ и условия на боковой поверхности, которые пока не будем конкретизировать.

2. Общий интеграл внутренней задачи. Решение сформулированной задачи будем искать в виде

$$\sigma_{\alpha\beta}(x, y, z, t) = \sigma_{jkI}(x,y,z)\sin\Omega t + \sigma_{jkII}(x,y,z)\cos\Omega t; \ \alpha,\beta = x,y,z; \ j,k = 1,2,3$$

$$u(x, y, z, t) = u_{xI}(x, y, z)\sin\Omega t + u_{xII}(x, y, z)\cos\Omega t,$$

$$v(x, y, z, t) = u_{yI}(x, y, z)\sin\Omega t + u_{yII}(x, y, z)\cos\Omega t, \tag{2.1}$$

$$w(x, y, z, t) = u_{zI}(x, y, z)\sin\Omega t + u_{zII}(x, y, z)\cos\Omega t.$$

Затем переходя к безразмерным координатам и безразмерным перемещениям:

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = z/h, \quad U_I = u_{xI}/l, \quad U_{II} = u_{xII}/l,$$
$$V_I = u_{yI}/l, \quad V_{II} = u_{yII}/l, \quad W_I = w_{zI}/l, \quad W_{II} = w_{zII}/l \tag{2.2}$$

получим сингулярно возмущённую малым параметром $\varepsilon = h/l$ систему:

$$
\frac{\partial\sigma_{11I}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12I}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13I}}{\partial\zeta}+kl^2\Omega U_{II}=-\rho\Omega^2l^2U_I,
$$

$$
\frac{\partial\sigma_{11II}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12II}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{13II}}{\partial\zeta}-kl^2\Omega U_{I}=-\rho\Omega^2l^2U_{II},
$$

$$
\frac{\partial\sigma_{12I}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22I}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23I}}{\partial\zeta}+kl^2\Omega V_{II}=-\rho\Omega^2l^2V_I,
$$

$$
\frac{\partial\sigma_{12II}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22II}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{23II}}{\partial\zeta}-kl^2\Omega V_{I}=-\rho\Omega^2l^2V_{II},
$$

$$
\frac{\partial\sigma_{13I}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23I}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33I}}{\partial\zeta}+kl^2\Omega W_{II}=-\rho\Omega^2l^2W_I,
$$

$$
\frac{\partial\sigma_{13II}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23II}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial\sigma_{33II}}{\partial\zeta}-kl^2\Omega W_{I}=-\rho\Omega^2l^2W_{II}, \tag{2.3}
$$

$$
\frac{\partial U_I}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11I}+a_{12}\sigma_{22I}+a_{13}\sigma_{33I},\quad \frac{\partial U_{II}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11II}+a_{12}\sigma_{22II}+a_{13}\sigma_{33II},
$$

$$
\frac{\partial V_I}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11I}+a_{22}\sigma_{22I}+a_{23}\sigma_{33I},\quad \frac{\partial V_{II}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11II}+a_{22}\sigma_{22II}+a_{23}\sigma_{33II},
$$

$$
\varepsilon^{-1}\frac{\partial W_I}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11I}+a_{23}\sigma_{22I}+a_{33}\sigma_{33I},\quad \varepsilon^{-1}\frac{\partial W_{II}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11II}+a_{23}\sigma_{22II}+a_{33}\sigma_{33II},
$$

$$
\frac{\partial V_I}{\partial\xi}+\frac{\partial U_I}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12I},\quad \frac{\partial V_{II}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_{II}}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12II},\quad \frac{\partial W_I}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_I}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13I},
$$

$$
\frac{\partial W_{II}}{\partial\xi}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial U_{II}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13II},\quad \frac{\partial W_I}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V_I}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23I},\quad \frac{\partial W_{II}}{\partial\eta}+\varepsilon^{-1}\frac{\partial V_{II}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23II}.
$$

Решение I этой сингулярно возмущённой системы складывается из решений внутренней задачи (I^{int}) и пограничного слоя (I_b) [1,3]

$$
I=I^{\mathrm{int}}+I_b. \tag{2.4}
$$

Решение внутренней задачи будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{jkm}^{\mathrm{int}}=\varepsilon^{-1+s}\sigma_{jkm}^{(s)},\quad j,k=1,2,3,\quad m=I,II,\quad s=\overline{0,N},\\
&(U_m^{\mathrm{int}},V_m^{\mathrm{int}},W_m^{\mathrm{int}})=\varepsilon^s(U_m^{(s)},V_m^{(s)},W_m^{(s)}),\qquad m=I,II.
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

Подставив (2.5) в (2.3), для определения неизвестных коэффициентов $\sigma_{jkm}^{(s)},U_m^{(s)},V_m^{(s)},W_m^{(s)}$ получим систему:

$$
\frac{\partial\sigma_{11I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{13I}^{(s)}}{\partial\zeta}+2H\Omega U_{II}^{(s)}+\rho_1^2\Omega^2U_I^{(s)}=0,
$$

$$
\frac{\partial\sigma_{11II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{13II}^{(s)}}{\partial\zeta}-2H\Omega U_{I}^{(s)}+\rho_1^2\Omega^2U_{II}^{(s)}=0,
$$

$$\frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22I}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{23I}^{(s)}}{\partial\zeta}+2H\Omega V_{II}^{(s)}+\rho_1^2\Omega^2V_I^{(s)}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22II}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{23II}^{(s)}}{\partial\zeta}-2H\Omega V_{I}^{(s)}+\rho_1^2\Omega^2V_{II}^{(s)}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23I}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{33I}^{(s)}}{\partial\zeta}+2H\Omega W_{II}^{(s)}+\rho_1^2\Omega^2W_I^{(s)}=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23II}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial\sigma_{33II}^{(s)}}{\partial\zeta}-2H\Omega W_{I}^{(s)}+\rho_1^2\Omega^2W_{II}^{(s)}=0, \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11I}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22I}^{(s)}+a_{13}\sigma_{33I}^{(s)},\quad \frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}=a_{11}\sigma_{11II}^{(s)}+a_{12}\sigma_{22II}^{(s)}+a_{13}\sigma_{33II}^{(s)},$$

$$\frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11I}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22I}^{(s)}+a_{23}\sigma_{33I}^{(s)},\quad \frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{12}\sigma_{11II}^{(s)}+a_{22}\sigma_{22II}^{(s)}+a_{23}\sigma_{33II}^{(s)},$$

$$\frac{\partial W_I^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11I}^{(s)}+a_{23}\sigma_{22I}^{(s)}+a_{33}\sigma_{33I}^{(s)},\quad \frac{\partial W_{II}^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{13}\sigma_{11II}^{(s)}+a_{23}\sigma_{22II}^{(s)}+a_{33}\sigma_{33II}^{(s)},$$

$$\frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12I}^{(s)},\quad \frac{\partial V_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_{II}^{(s-1)}}{\partial\eta}=a_{66}\sigma_{12II}^{(s)},\quad \frac{\partial W_I^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_I^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13I}^{(s)},$$

$$\frac{\partial W_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_{II}^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{55}\sigma_{13II}^{(s)},\quad \frac{\partial W_I^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V_I^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23I}^{(s)},\quad \frac{\partial W_{II}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V_{II}^{(s)}}{\partial\zeta}=a_{44}\sigma_{23II}^{(s)},$$

$$2H=kh^2,\quad \rho_1^2=\rho h^2.$$

Из системы (2.6) все компоненты тензора напряжений можно выразить через компоненты вектора перемещения по формулам

$$\sigma_{13m}^{(s)}=\frac{1}{a_{55}}\left(\frac{\partial U_m^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W_m^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),\quad \sigma_{23m}^{(s)}=\frac{1}{a_{44}}\left(\frac{\partial V_m^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial W_m^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{12m}^{(s)}=\frac{1}{a_{66}}\left(\frac{\partial U_m^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{\partial V_m^{(s-1)}}{\partial\xi}\right),$$

$$\sigma_{11m}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left(-A_{23}\frac{\partial W_m^{(s)}}{\partial\zeta}+A_{22}\frac{\partial U_m^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{12}\frac{\partial V_m^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

$$\sigma_{22m}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left(-A_{13}\frac{\partial W_m^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{12}\frac{\partial U_m^{(s-1)}}{\partial\xi}+A_{33}\frac{\partial V_m^{(s-1)}}{\partial\eta}\right), \qquad (2.7)$$

$$\sigma_{33m}^{(s)}=\frac{1}{\Delta}\left(A_{11}\frac{\partial W_m^{(s)}}{\partial\zeta}-A_{23}\frac{\partial U_m^{(s-1)}}{\partial\xi}-A_{13}\frac{\partial V_m^{(s-1)}}{\partial\eta}\right),$$

где

$$A_{11}=a_{11}a_{22}-a_{12}^2,\quad A_{12}=a_{12}a_{33}-a_{23}a_{13},\quad A_{13}=a_{11}a_{23}-a_{13}a_{12},\quad A_{22}=a_{22}a_{33}-a_{23}^2,$$

$$A_{23}=a_{13}a_{22}-a_{12}a_{23},\quad A_{33}=a_{11}a_{33}-a_{13}^2,\quad \Delta=a_{11}A_{22}-a_{12}A_{12}-a_{13}A_{23}, \qquad (2.8)$$

а для определения компонент вектора перемещения получим уравнения:

$$\frac{\partial^4 U_I^{(s)}}{\partial\zeta^4}+2\rho_1^2\Omega^2 a_{55}\frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\left(4H^2+\rho_1^4\Omega^2\right)\Omega^2 a_{55}^2 U_I^{(s)}=R_u^{(s)}, \tag{2.9}$$

$$R_u^{(s)}=a_{55}\left[2H\Omega a_{55}\left(\frac{\partial\sigma_{11II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial^2 U_{I*}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+2H\Omega\frac{\partial^2 W_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}-\rho_1^2\Omega^2 a_{55}U_{I*}^{(s)}\right],$$

$$U_{I*}^{(s)}=\frac{\partial\sigma_{11I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial W_I^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial^4 V_I^{(s)}}{\partial\zeta^4}+2\rho_1^2\Omega^2 a_{44}\frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\left(4H^2+\rho_1^4\Omega^2\right)\Omega^2 a_{44}^2 V_I^{(s)}=R_v^{(s)}, \tag{2.10}$$

$$R_v^{(s)}=a_{44}\left[2H\Omega a_{44}\left(\frac{\partial\sigma_{12II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22II}^{(s-1)}}{\partial\eta}\right)-\frac{\partial^2 V_{I*}^{(s)}}{\partial\zeta^2}+2H\Omega\frac{\partial^2 W_{II}^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}-\rho_1^2\Omega^2 a_{44}V_{I*}^{(s)}\right],$$

$$V_{I*}^{(s)}=\frac{\partial\sigma_{12I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{22I}^{(s-1)}}{\partial\eta}+\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial W_I^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}$$

$$\frac{\partial^4 W_I^{(s)}}{\partial\zeta^4}+\frac{2\rho_1^2\Omega^2\Delta}{A_{11}}\frac{\partial^2 W_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\frac{\left(4H^2+\rho_1^4\Omega^2\right)\Omega^2\Delta^2}{A_{11}^2}W_I^{(s)}=R_w^{(s)}, \tag{2.11}$$

$$R_w^{(s)}=\frac{2H\Omega\Delta^2}{A_{11}^2}\left[\frac{\partial\sigma_{13II}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23II}^{(s-1)}}{\partial\eta}-\frac{1}{\Delta}\left(A_{23}\frac{\partial^2 U_{II}^{(s)}}{\partial\xi\partial\zeta}+A_{12}\frac{\partial^2 V_{II}^{(s)}}{\partial\eta\partial\zeta}\right)\right]-$$

$$-\frac{\Delta}{A_{11}}\frac{\partial^2 W_{I*}^{(s)}}{\partial\zeta^2}-\frac{\rho_1^2\Omega^2\Delta^2}{A_{11}^2}W_{I*}^{(s)},$$

$$W_{I*}^{(s)}=\frac{\partial\sigma_{13I}^{(s-1)}}{\partial\xi}+\frac{\partial\sigma_{23I}^{(s-1)}}{\partial\eta}-\frac{1}{\Delta}\left(A_{23}\frac{\partial^2 U_I^{(s-1)}}{\partial\xi\partial\zeta}+A_{12}\frac{\partial^2 V_{II}^{(s-1)}}{\partial\eta\partial\zeta}\right).$$

Остальные компоненты вектора перемещения определятся по формулам:

$$U_{II}^{(s)}=-\frac{1}{2H\Omega}\left[\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^2 U_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\rho_1^2\Omega^2 U_I^{(s)}+U_{I*}^{(s)}\right],$$

$$V_{II}^{(s)}=-\frac{1}{2H\Omega}\left[\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 V_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\rho_1^2\Omega^2 V_I^{(s)}+V_{I*}^{(s)}\right], \tag{2.12}$$

$$W_{II}^{(s)}=-\frac{1}{2H\Omega}\left[\frac{A_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 W_I^{(s)}}{\partial\zeta^2}+\rho_1^2\Omega^2 W_I^{(s)}+W_{I*}^{(s)}\right].$$

Решением уравнения (2.9) является

$$U_I^{(s)}=D_1^{(s)}(\xi)\varphi_1(\zeta)+D_2^{(s)}(\xi)\varphi_2(\zeta)+D_3^{(s)}(\xi)\varphi_3(\zeta)+D_4^{(s)}(\xi)\varphi_4(\zeta)+\bar{U}_I^{(s)} \tag{2.13}$$

где $\bar{U}_I^{(s)}$ – частное решение уравнения (2.9), а

$$\varphi_1=\mathrm{sh}c\zeta\sin d\zeta,\ \varphi_2=\mathrm{sh}c\zeta\cos d\zeta,\ \ \varphi_3=\mathrm{ch}c\zeta\sin d\zeta,\ \varphi_4=\mathrm{ch}c\zeta\cos d\zeta,$$
$$c=\sqrt{\frac{\Omega a_{66}}{2}}\sqrt{-\rho_1^2\Omega+\sqrt{\rho_1^4\Omega^2+4H^2}},\ d=\sqrt{\frac{\Omega a_{66}}{2}}\sqrt{\rho_1^2\Omega+\sqrt{\rho_1^4\Omega^2+4H^2}}. \qquad (2.14)$$

Решением уравнения (2.10) является

$$V_I^{(s)}=F_1^{(s)}(\xi)\varphi_1(\zeta)+F_2^{(s)}(\xi)\varphi_2(\zeta)+F_3^{(s)}(\xi)\varphi_3(\zeta)+F_4^{(s)}(\xi)\varphi_4(\zeta)+\bar{V}_I^{(s)} \qquad (2.15)$$

где $\bar{V}_I^{(s)}$ – частное решение уравнения (2.10), а функции $\varphi_i(\zeta)$ определяются по формулам (2.14) с той разницей, что

$$c=\sqrt{\frac{\Omega a_{44}}{2}}\sqrt{-\rho_1^2\Omega+\sqrt{\rho_1^4\Omega^2+4H^2}},\quad d=\sqrt{\frac{\Omega a_{44}}{2}}\sqrt{\rho_1^2\Omega+\sqrt{\rho_1^4\Omega^2+4H^2}}. \qquad (2.16)$$

Для уравнения (2.11) имеем:

$$W_I^{(s)}=B_1^{(s)}(\xi)\varphi_1(\zeta)+B_2^{(s)}(\xi)\varphi_2(\zeta)+B_3^{(s)}(\xi)\varphi_3(\zeta)+B_4^{(s)}(\xi)\varphi_4(\zeta)+\bar{W}_I^{(s)}, \qquad (2.17)$$

где $\bar{W}_I^{(s)}$ – частное решение уравнения (2.11), а

$$c=\sqrt{\frac{\Omega\Delta}{2A_{11}}}\sqrt{-\rho_1^2\Omega+\sqrt{\rho_1^4\Omega^2+4H^2}},\quad d=\sqrt{\frac{\Omega\Delta}{2A_{11}}}\sqrt{\rho_1^2\Omega+\sqrt{\rho_1^4\Omega^2+4H^2}}. \qquad (2.18)$$

Удовлетворение граничным условиям (1.3) приводит к удовлетворению условиям

$$\sigma_{j3I}^{(s)}(\xi,\eta,1)=0,\ \sigma_{j3II}^{(s)}(\xi,\eta,1)=\sigma_{\alpha zI}^{+(s)}(\xi,\eta),\ j=1,2,3,\ \alpha=x,y,z,$$
$$\sigma_{jz}^{+(0)}=\varepsilon\sigma_{jz}^{+},\quad \sigma_{jz}^{+(s)}=0,\quad s\neq 0. \qquad (2.19)$$

А удовлетворение условиям (1.4) приводит к выполнению условий

$$\sigma_{j3I}^{(s)}(\xi,\eta,-1)=0,\ \sigma_{j3II}^{(s)}(\xi,\eta,-1)=-\sigma_{\alpha zI}^{-(s)}(\xi,\eta),\ j=1,2,3,\quad \alpha=x,y,z,$$
$$\sigma_{jz}^{-(0)}=\varepsilon\sigma_{jz}^{-},\quad \sigma_{jz}^{-(s)}=0,\quad s\neq 0. \qquad (2.20)$$

Используя формулы (2.13), (2.14), (2.7) и удовлетворив условиям (2.19), (2.20) относительно $\sigma_{13I}^{(s)},\sigma_{13II}^{(s)}$, получим алгебраическую систему из четырёх уравнений относительно четырёх неизвестных $D_i^{(s)}$. Решив эту систему, получим:

$$D_1^{(s)}=C_8\delta_1-C_4\delta_2,\ D_2^{(s)}=C_7\delta_3-C_3\delta_4,\ D_3^{(s)}=-C_6\delta_3+C_2\delta_4,\ D_4^{(s)}=-C_5\delta_1+C_1\delta_2, \qquad (2.21)$$

$$\delta_1=\frac{f_{13I}^{(s)}(\xi,\eta,1)-f_{13I}^{(s)}(\xi,\eta,-1)}{2(C_1C_8-C_4C_5)},\ \delta_2=\frac{f_{13II}^{(s)}(\xi,\eta,1)-f_{13II}^{(s)}(\xi,\eta,-1)+\sigma_{xz}^{+(s)}+\sigma_{xz}^{-(s)}}{2(C_1C_8-C_4C_5)},$$
$$\delta_3=\frac{f_{13I}^{(s)}(\xi,\eta,1)+f_{13I}^{(s)}(\xi,\eta,-1)}{2(C_2C_7-C_3C_6)},\ \delta_4=\frac{f_{13II}^{(s)}(\xi,\eta,1)-f_{13II}^{(s)}(\xi,\eta,-1)+\sigma_{xz}^{+(s)}-\sigma_{xz}^{-(s)}}{2(C_2C_7-C_3C_6)}, \qquad (2.22)$$

$$f_{13I}^{(s)}=-\frac{\partial\bar{U}_I^{(s)}}{\partial\zeta}-\frac{\partial W_I^{(s-1)}}{\partial\xi},\ f_{13II}^{(s)}=\frac{1}{2H\Omega a_{55}}\left(\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial^3\bar{U}_I^{(s)}}{\partial\zeta^3}+\rho_1^2\Omega^2\frac{\partial\bar{U}_I^{(s)}}{\partial\zeta}+\frac{\partial U_{I*}^{(s)}}{\partial\zeta}\right)-\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial W_{II}^{(s-1)}}{\partial\xi},$$

$$C_1=c\psi_3+d\psi_2,\ C_2=c\psi_4-d\psi_1,\ C_3=c\psi_1+d\psi_4,\ C_4=c\psi_2-d\psi_3,\ C_5=\frac{b_3\psi_2+b_4\psi_3}{2H\Omega a_{55}},$$

$$C_6=\frac{b_4\psi_4-b_3\psi_1}{2H\Omega a_{55}},\ C_7=\frac{b_4\psi_1+b_3\psi_4}{2H\Omega a_{55}},\quad C_8=\frac{b_4\psi_2-b_3\psi_3}{2H\Omega a_{55}},\quad \psi_i=\varphi_i(\zeta=1),$$

$$b_1=\frac{1}{a_{55}}\left(c^2-d^2\right)+\rho_1^2\Omega^2,\quad b_2=\frac{2cd}{a_{55}},\quad b_3=b_1d+b_2c,\quad b_4=b_1c-b_2d.$$

Аналогичным образом удовлетворяются условия (2.19), (2.20) относительно $\sigma_{23I}^{(s)}$, $\sigma_{23II}^{(s)}$. Данные для этого случая можно получить формальной заменой в формулах (2.21), (2.22) U, $D_i^{(s)}$, a_{55}, $f_{13II}^{(s)}$, ξ на V, $F_i^{(s)}$, a_{44}, $f_{23II}^{(s)}$, η.

После удовлетворения условиям (2.19), (2.20) относительно $\sigma_{33I}^{(s)}$, $\sigma_{33II}^{(s)}$ получим следующие значения для функций $B_i^{(s)}$:

$$\begin{aligned}
&B_1^{(s)} = G_8\delta_1 - G_4\delta_2,\ \ B_2^{(s)} = G_7\delta_3 - G_3\delta_4,\\
&B_3^{(s)} = -G_6\delta_3 + G_2\delta_4,\ \ B_4^{(s)} = -G_5\delta_1 + G_1\delta_2,
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\delta_1 = \frac{f_{33I}^{(s)}(\xi,\eta,1) - f_{33I}^{(s)}(\xi,\eta,-1)}{2(G_1G_8 - G_4G_5)},\ \ \delta_2 = \frac{f_{33II}^{(s)}(\xi,\eta,1) - f_{33II}^{(s)}(\xi,\eta,-1) + \sigma_{xz}^{+(s)} + \sigma_{xz}^{-(s)}}{2(G_1G_8 - G_4G_5)},$$

$$\delta_3 = \frac{f_{33I}^{(s)}(\xi,\eta,1) + f_{33I}^{(s)}(\xi,\eta,-1)}{2(G_2G_7 - G_3G_6)},\ \ \delta_4 = \frac{f_{33II}^{(s)}(\xi,\eta,1) - f_{33II}^{(s)}(\xi,\eta,-1) + \sigma_{xz}^{+(s)} - \sigma_{xz}^{-(s)}}{2(G_2G_7 - G_3G_6)},$$

$$\begin{aligned}
&f_{33I}^{(s)} = A_{11}\frac{\partial \bar{W}_I^{(s)}}{\partial\zeta} - A_{23}\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial\xi} - A_{13}\frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial\eta},\\
&f_{33II}^{(s)} = \frac{A_{11}}{2H\Omega\Delta}\left(\frac{A_{11}}{\Delta}\frac{\partial^3\bar{W}_I^{(s)}}{\partial\zeta^3} + \rho_1^2\Omega^2\frac{\partial\bar{W}_I^{(s)}}{\partial\zeta} + \frac{\partial V_{I*}^{(s)}}{\partial\zeta}\right) - \frac{A_{23}}{\Delta}\frac{\partial U_I^{(s-1)}}{\partial\xi} - \frac{A_{13}}{\Delta}\frac{\partial V_I^{(s-1)}}{\partial\eta},
\end{aligned} \tag{2.24}$$

$$G_1 = A_{11}(c\psi_3 + d\psi_2),\ \ G_2 = A_{11}(c\psi_4 - d\psi_1),\ \ G_3 = A_{11}(c\psi_1 + d\psi_4),$$

$$G_4 = A_{11}(c\psi_2 - d\psi_3),\ \ G_5 = \frac{A_{11}(m_3\psi_2 + m_4\psi_3)}{2H\Omega\Delta},\ \ G_6 = \frac{A_{11}(m_4\psi_4 - m_3\psi_1)}{2H\Omega\Delta},$$

$$G_7 = \frac{A_{11}(m_4\psi_1 + m_3\psi_4)}{2H\Omega\Delta},\ \ G_8 = \frac{A_{11}(m_4\psi_2 - m_3\psi_3)}{2H\Omega\Delta},\ \ \ \psi_i = \varphi_i(\zeta = 1),$$

$$m_1 = \frac{A_{11}}{\Delta}\left(c^2 - d^2\right) + \rho_1^2\Omega^2,\ \ m_2 = \frac{2A_{11}cd}{\Delta},\ \ m_3 = m_1d + m_2c,\ \ m_4 = m_1c - m_2d,$$

Таким образом, после удовлетворения граничным условиям (1.3), (1.4) полностью определяются все величины во внутренней задаче. Это решение, как правило, не будет удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности. Возникающая неувязка устраняется при помощи решения пограничного слоя, которое можно найти описанным в [1,3] способом.

3. Частное решение. Если функции, входящие в граничные условия (1.3), (1.4), являются многочленами от тангенциальных координат ξ, η, итерационный процесс определения неизвестных обрывается, в результате получаем математически точное решение во внутренней задаче.

Пусть $\sigma_{jz}^{\pm} = \mathrm{const}$. Тогда итерационный процесс обрывается уже на исходном приближении $s = 0$. Соответствующее решение трёхмерной внутренней задачи имеет вид:

$$\overline{U}^{(0)}=0,\;\; f_{13I}^{(0)}=f_{13II}^{(0)}=0,\;\; D_1=\frac{-C_4(\sigma_{xz}^{+}+\sigma_{xz}^{-})}{2(C_1C_8-C_4C_5)},$$

$$D_2=\frac{-C_3(\sigma_{xz}^{+}-\sigma_{xz}^{-})}{2(C_2C_7-C_3C_6)},\;\; D_3=\frac{C_2(\sigma_{xz}^{+}-\sigma_{xz}^{-})}{2(C_2C_7-C_3C_6)},\;\; D_4=\frac{C_1(\sigma_{xz}^{+}+\sigma_{xz}^{-})}{2(C_1C_8-C_4C_5)},$$

$$U_I^{(0)}=D_1\varphi_1+D_2\varphi_2+D_3\varphi_3+D_4\varphi_4,\;\; U_{II}^{(0)}=-\frac{1}{2H\Omega}\left(\frac{1}{a_{66}}\frac{\partial^2 U_I^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\rho_1^2\Omega^2 U_I^{(0)}\right),$$

$$\sigma_{13I}^{(0)}=\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial U_I^{(0)}}{\partial\zeta},\;\; \sigma_{13II}^{(0)}=\frac{1}{a_{55}}\frac{\partial U_{II}^{(0)}}{\partial\zeta},\;\; \sigma_{12I}^{(0)}=\sigma_{12II}^{(0)}=0,$$

$$V_I^{(0)}=F_1\varphi_1+F_2\varphi_2+F_3\varphi_3+F_4\varphi_4,\;\; V_{II}^{(0)}=-\frac{1}{2H\Omega}\left(\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial^2 V_I^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\rho_1^2\Omega^2 V_I^{(0)}\right),$$

$$\sigma_{23I}^{(0)}=\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial V_I^{(0)}}{\partial\zeta},\;\; \sigma_{23II}^{(0)}=\frac{1}{a_{44}}\frac{\partial V_{II}^{(0)}}{\partial\zeta},$$

$$W_I^{(0)}=B_1\varphi_1+B_2\varphi_2+B_3\varphi_3+B_4\varphi_4,\;\; W_{II}^{(0)}=-\frac{1}{2H\Omega}\left(\frac{A_{11}}{\Delta}\frac{\partial^2 W_I^{(0)}}{\partial\zeta^2}+\rho_1^2\Omega^2 W_I^{(0)}\right),$$

$$\sigma_{11m}^{(0)}=-\frac{A_{23}}{\Delta}\frac{\partial W_m^{(0)}}{\partial\zeta},\;\; \sigma_{22m}^{(0)}=-\frac{A_{13}}{\Delta}\frac{\partial W_{\mathrm{m}}^{(0)}}{\partial\zeta},\;\; \sigma_{33m}^{(0)}=\frac{A_{11}}{\Delta}\frac{\partial W_{\mathrm{m}}^{(0)}}{\partial\zeta},\quad m=I,II \tag{3.1}$$

Окончательное решение определится по формулам:

$$\sigma_{\alpha\beta}=\varepsilon^{-1}\sigma_{jkI}^{(0)}\sin\Omega t+\varepsilon^{-1}\sigma_{jkII}^{(0)}\cos\Omega t,\quad \alpha,\beta=x,y,z,\qquad j,k=1,2,3$$

$$u=lU_I^{(0)}\sin\Omega t+lU_{II}^{(0)}\cos\Omega t,\quad v=lV_I^{(0)}\sin\Omega t+lV_{II}^{(0)}\cos\Omega t, \tag{3.2}$$

$$w=lW_I^{(0)}\sin\Omega t+lW_{II}^{(0)}\cos\Omega t.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, Физматлит. 1997. 414с.
2. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Неклассические краевые задачи анизотропных слоистых балок, пластин и оболочек. Ереван: Изд-во “Гитутюн” НАН РА, 2005. 468 с.
3. Агаловян Л.А. К асимптотическому методу решения динамических смешанных задач анизотропных полос и пластин. // Изв. ВУЗов РФ. Северо-Кавказский регион. Естеств. науки. 2000. №3. С. 8–11.
4. Агаловян Л.А., Агаловян М.Л. Неклассические краевые задачи о собственных и вынужденных колебаниях анизотропных пластин.// В сб.: “Механика оболочек и пластин” (Тр. XIX Международной конф. по теории оболочек и пластин). Изд-во Нижегородского университета. Нижний Новгород. 1999. С.16-20.
5. Агаловян Л.А., Оганесян Р.Ж. О характере вынужденных колебаний трёхслойной ортотропной пластинки при смешанной краевой задаче. //Докл. НАН Армении. 2006. Т.106. №4. С.186-192.

6. Агаловян Л.А., Погосян А.М. Вынужденные колебания двухслойной ортотропной пластинки при кулоновом трении между слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т.58. №3. С.36-47.
7. Агаловян Л.А., Закарян Т.В. О решении первой динамической пространственной краевой задачи для ортотропной прямоугольной пластинки.// Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. №4. С.304-309.
8. Aghalovyan L.A., Aghalovyan M.L. On forced vibrations of beams under seismic and force actions when there is a viscous resistance. Proceedings of the Third European Conferece on Structural Control.Vienna, Austria, July 2004,Vol. I, p. M6-25-M6-28.
9. Саргсян М.З. О вынужденных колебаниях ортотропных пластин, свободно лежащих на жёсткой подстилке, с учётом вязкого трения. // В сб. Механика 2009: Труды межд. школы–конференции молодых ученых. Ереван: Изд-во ЕГУАС, 2009. С.297-303.
10. Геворкян Р.С. Асимптотические решения установившихся динамических (связанных) задач термоупругости для изотропных пластин. // ПММ. 2008. Т.72. Вып. 1. С.148-156.
11. Саркисян С.О. Динамические теории микрополярных упругих тонких оболочек. // Докл. НАН Армении. 2009. Т.109. Вып. 2. С.154-166.
12. Атоян А.А., Саркисян С.О. Задача динамики тонкой пластинки на основе несимметричной теории упругости. // Изв. НАН Армении. Механика. 2004. Т.57. №2. С.18–33.
13. Агаловян Л.А., Азатян Г.Л., Геворкян Р.С., Погосян А.М. Об асимптотическом решении пространственной динамической задачи для прямоугольной пьезокерамической пластины.// Докл. НАН Армении. 2011. Т. 111. №2. С.129-137.

Сведения об авторе:

Закарян Татевик Владиковна – научн.сотр. Института механики НАН Армении
Адрес: 0019 Ереван, пр. Маршала Баграмяна 24^{б}
Тел: (+37410) 63-88-82, E-mail: zaqaryantatevik83@rambler.ru

Поступила в редакцию 20.04.2012