ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ДЕЙСТВУЮЩЕЙ СИЛЕ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ ПРИ *k* НУЛЕВЫХ И *q* ПАР ЧИСТО МНИМЫХ КОРНЕЙ

Амбарцумян С.Р.

Ключевые слова: устойчивость, системы нелинейных дифференциальных уравнений, критический случай, функция Ляпунова.

Keywords: stability, non-linear differential equations, critical case, Liapounoff's functions.

Համբարձումյան Ս.Ռ.
Ըստ ազդող ուժի կայունության մասին *k* զրոյական և *q* զույգ կեղծ արմատներով կրիտիկական դեպքում

Ուսումնասիրվում է ոչ գծային դիֆֆերենցիալ հավասարումների համակարգի ըստ ազդող ուժի կայունության խնդիրը կրիտիկական դեպքում, երբ համակարգի գծային մոտավորության համապատասխան բնութագրիչ հավասարումն ունի k զրոյական և q զույգ կեղծ արմատներ:

Ստացված են բավարար պայմաններ. որոնց դեպքում դիտարկվող համակարգի զրոյական լուծումը կլինի ասիմպտոտիկ կայուն ըստ ազդող ուժի:

Hambardzumyan S.R.
On the stability by acting force in the critical case at *k* zero and *q* pairs of the imagining roots

The problem of stability of system of non-linear differential equations in the critical case is investigated, when the characteristic equation, corresponding to linear approximation of system, has ***k*** zero and ***q*** pairs imagining roots.

Sufficient conditions have been obtained in case of which the trivial solution of the considered system is either asymptotic stable for acting force.

Исследуется задача устойчивости по действующей силе системы нелинейных дифференциальных уравнений в критическом случае, когда характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения системы имеет ***k*** нулевых и ***q*** пар чисто мнимых корней.

Получены достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, при которых тривиальное решение будет асимптотически устойчивым по действующей силе.

1. Рассмотрим задачу устойчивости по действующей силе [1], [2] системы нелинейных дифференциальных уравнений $\boldsymbol{n}$ -го порядка

$$\begin{cases} \dot{u}_p = U_p\left(u_1,...,u_k,x_1,...,x_q,y_1,...,y_q,z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \left(p=1,...,k\right) \\ \dot{x}_j = \alpha_j y_j + X_j\left(u_1,...,u_k,x_1,...,x_q,y_1,...,y_q,z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \left(j=1,...,q\right) \\ \dot{y}_j = -\alpha_j x_j + Y_j\left(u_1,...,u_k,x_1,...,x_q,y_1,...,y_q,z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \\ \dot{z}_s = a_{s1}z_1+...+a_{sn-k-2q}z_{n-k-2q} + Z_s\left(u_1,...,u_k,x_1,...,x_q,y_1,...,y_q,z_1,...,z_{n-k-2q}\right) & \\ \qquad \left(s=1,...,n-k-2q\right) & \end{cases} \tag{1.1}$$

характеристическое уравнение соответствующего линейного приближения которой удовлетворяет условиям

$$\lambda_p = 0,\ \lambda_j = i\alpha_j,\ \lambda_m = -i\alpha_m,\ \operatorname{Re}\lambda_S < 0$$

$\left(p = 1,\cdots,k;\ j = 1,\cdots,q;\ m = 1,\cdots,q;\ s = 1,\cdots,n-k-2q\right)$,

т.е. имеем $\boldsymbol{k}$ нулевых и $\boldsymbol{q}$ пар чисто мнимых корней $\pm i\alpha_j$ и $\left(n-k-2q\right)$ корней с отрицательными вещественными частями, где $\alpha_j \neq 0$ – действительные числа $\left(j = 1,\cdots,q\right)$, U_p, X_j, Y_j, Z_s – аналитические функции в R^n и $U_p(0,\cdots,0) = X_j(0,\cdots,0) = Y_j(0,\cdots,0) = Z_s(0,\cdots,0) = 0$ $(p = 1,\cdots,k;\ j = 1,\cdots,q;\ s = 1,\cdots,n-k-2q)$, разложения которых по степеням переменных $u_1,\ldots,u_k, x_1,\ldots,x_q, y_1,\ldots,y_q, z_1,\ldots,z_{n-k-2q}$ начинается с членов не ниже третьего порядка [3] (стр.102).

Известно [4] (стр.74), что в этом случае только линейным приближением системы (1.1) невозможно решить задачу устойчивости системы (1.1), т.е. имеет место критический случай.

В работе [1] приведены необходимые и достаточные условия, при которых устойчивые по Ляпунову системы линейных дифференциальных уравнений неустойчивы по действующей силе.

А в работах [5-10] найдены достаточные условия, при которых системы нелинейных дифференциальных уравнений второго, а также $\boldsymbol{n}$-го порядка при паре чисто мнимых корней будут устойчивыми, асимптотически устойчивыми или неустойчивыми по действующей силе.

Попытаемся определить достаточные условия, накладываемые на нелинейные члены, при которых тривиальное решение системы (1.1) будет устойчивым, неустойчивым или асимптотически устойчивым по действующей силе [1], [2].

2. Рассмотрим систему (1.1) в общем случае.

Обозначим через $r = \left(u_1,\ldots,u_k, x_1,\ldots,x_q, y_1,\ldots,y_q, z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right)^T$ $\boldsymbol{n}$-мерный вектор-столбец.

Пусть для системы (1.1) существует определенно-положительная функция V(·) следующего вида:

$$V = V_1\left(u_1,\ldots,u_k\right) + V_2\left(x_1,\ldots,x_q, y_1,\ldots,y_q\right) + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj}\, z_s z_j\,, \quad (2.1)$$

которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\lim\limits_{\|r\|\to\infty} V = \infty$, (2.2)

2) $\sum\limits_{j=1}^{q}\left[\alpha_j y_j \dfrac{\partial V_2}{\partial x_j} - \alpha_j x_j \dfrac{\partial V_2}{\partial y_j}\right] = 0$, (2.3)

3) $H = \sum\limits_{p=1}^{k}\dfrac{\partial V_1}{\partial u_p}U_p + \sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{\partial V_2}{\partial x_j}X_j + \sum\limits_{j=1}^{q}\dfrac{\partial V_2}{\partial y_j}Y_j + \sum\limits_{s=1}^{n-k-2q}\sum\limits_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj}\, z_j Z_s$ (2.4)

является знакопостоянной отрицательной функцией, причем многообразие точек $\dot V\big|_{(1.1)} = 0$ не содержит целых полутраекторий системы (1.1) при $0 \le t < \infty$, где $\|r\|$ – евклидова норма вектора r.

Так как система

$$\dot z_s = a_{s1} z_1 + \ldots + a_{sn-k-2q} z_{n-k-2q} \qquad \left(s = 1,\ldots,n-k-2q\right) \quad (2.5)$$

асимптотически устойчива, то при любой определённо-отрицательной квадратичной форме $W\left(z_1,\ldots,z_{n-k-2q}\right)$ коэффициенты b_{sj} можно определить из условия

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_s z_j\right)\Bigg|_{(2.5)} = W\left(z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right) \tag{2.6}$$

единственным образом [11] (стр. 107).

Тогда полная производная по времени функции V в силу системы (1.1) будет

$$\dot{V}\Big|_{(1.1)} = \sum_{p=1}^{k}\frac{\partial V_1}{\partial u_p}U_p + \sum_{j=1}^{q}\alpha_j y_j\frac{\partial V_2}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{q}\alpha_j x_j\frac{\partial V_2}{\partial y_j} + \sum_{j=1}^{q}\frac{\partial V_2}{\partial x_j}X_j +$$

$$+\sum_{j=1}^{q}\frac{\partial V_2}{\partial y_j}Y_j + W\left(z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right) + \sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s = H + W\left(z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right)$$

При условиях (2.2), (2.3), (2.4) производная $\dot{V}\Big|_{(1.1)}$ является знакопостоянной отрицательной функцией. Следовательно, для системы (1.1) выполняются все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [4] (стр. 463). Тогда тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво и по действующей силе [2].

Таким образом, верна следующая теорема:

Теорема 1. Если для системы (1.1) существует определенно-положительная функция V в виде (2.1) такая, что имеют место условия (2.2), (2.3) и (2.4), то тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Отметим, что полученный результат совпадает с результатом теоремы 1, доказанной в [6] при $k = 0$ и $q = 1$.

3. Теперь снова рассмотрим систему (1.1). Пусть функции U_p, X_j, Y_j $\left(p = 1,\cdots,k;\ j = 1,\cdots,q\right)$ имеют следующий вид:

$$U_p = u_p F,\ X_j = x_j F,\ Y_j = y_j F,$$

где $F\left(u_1,\dots,u_k,x_1,\dots,x_q,y_1,\dots,y_q,z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right)$ – определенно-отрицательная, аналитическая функция в R^n и $F(0,\cdots,0) = 0$, разложения которой по степеням переменных $u_1,\dots,u_k,x_1,\dots,x_q,y_1,\dots,y_q,z_1,\dots,z_{n-k-2q}$ начинаются с членов не ниже второго порядка.

В этом случае система (1.1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{u}_p = u_p F\left(u_1,\dots,u_k,x_1,\dots,x_q,y_1,\dots,y_q,z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right) & \left(p = 1,\dots,k\right) \\ \dot{x}_j = \alpha_j y_j + x_j F\left(u_1,\dots,u_k,x_1,\dots,x_q,y_1,\dots,y_q,z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right) & \left(j = 1,\dots,q\right) \\ \dot{y}_j = -\alpha_j x_j + y_j F\left(u_1,\dots,u_k,x_1,\dots,x_q,y_1,\dots,y_q,z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right) & \\ \dot{z}_s = a_{s1}z_1 + \dots + a_{sn-k-2q}z_{n-k-2q} + Z_s\left(u_1,\dots,u_k,x_1,\dots,x_q,y_1,\dots,y_q,z_1,\dots,z_{n-k-2q}\right) & \\ & \left(s = 1,\dots,n-k-2q\right) \end{cases} \tag{3.1}$$

Пусть для системы (3.1) существует определенно-положительная функция

$$V = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{k}u_p^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}x_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{q}y_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_s z_j\,, \tag{3.2}$$

(предполагается, что коэффициенты b_{sj} определяются из условия (2.6)).

Предположим также, что

$$\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s \tag{3.3}$$

является знакопостоянной отрицательной функцией, причем многообразие точек $\dot{V}\big|_{(3.1)}=0$ не содержит целых полутраекторий системы (1.1) при $0 \le t < \infty$.

В этом случае полная производная функции V в силу системы (3.1) будет

$$\dot{V}\Big|_{(3.1)} = \sum_{p=1}^{k} u_p^2 F + \sum_{j=1}^{q} x_j^2 F + \sum_{j=1}^{q} y_j^2 F + W\left(z_1,...,z_{n-k-2q}\right) + \sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j y_j -$$

$$-\sum_{j=1}^{q} \alpha_j x_j y_j + \sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s = \left[\sum_{p=1}^{k} u_p^2 + \sum_{j=1}^{q}\left(x_j^2 + y_j^2\right)\right] F + \tag{3.4}$$

$$+W\left(z_1,...,z_{n-k-2q}\right) + \sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s$$

Первое и третье слагаемые правой части выражения (3.4) являются знакопостоянными функциями отрицательного знака, а второе слагаемое– определенно-отрицательной функцией. Следовательно, производная $\dot{V}\Big|_{(3.1)}$ будет знакопостоянной отрицательной функцией, откуда следует, что для системы (3.1) выполняются все условия теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости в целом [4] (стр. 463). Тогда тривиальное решение системы (3.1) асимптотически устойчиво в целом. Следовательно, тривиальное решение системы (3.1), а значит и тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво и по действующей силе [2].

Итак, доказана следующая теорема:

Теорема 2. Если система (1.1) имеет вид (3.1), и для нее существует определенно-положительная квадратичная форма V (·) вида (3.2) такая, что $\sum_{s=1}^{n-k-2q}\sum_{j=1}^{n-k-2q} b_{sj} z_j Z_s$ – знакопостоянная отрицательная функция, причем многообразие точек $\dot{V}\big|_{(3.1)}=0$ не содержит целых полутраекторий системы (1.1) при $0 \le t < \infty$, то тривиальное решение системы (1.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

4. Пример 1.

В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений следующего вида:

$$\dot{x}_1 = -x_1\left(x_1^2 + x_2^2\right) - bx_1x_2^2x_3x_4x_5x_6x_7x_8;$$

$$\dot{x}_2 = -x_2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + bx_1^2x_2x_3x_4x_5x_6x_7x_8;$$

$$\dot{x}_3 = \alpha_1 x_4 - ax_3^3 - dx_1x_2x_3x_4^2x_5x_6x_7x_8;$$

$$\dot{x}_4 = -\alpha_1 x_3 + dx_1x_2x_3^2x_4x_5x_6x_7x_8;$$

$$\dot{x}_5 = \alpha_2 x_6 - x_5\left(x_5^2 + x_6^2\right) - gx_1x_2x_3x_4x_5x_6^2x_7x_8;$$

$$\dot{x}_6 = -\alpha_2 x_5 - x_6\left(x_5^2 + x_6^2\right) + gx_1x_2x_3x_4x_5^2x_6x_7x_8; \tag{4.1}$$

$$\dot{x}_7 = -2x_7 + x_8 - \left(x_7 + \frac{1}{3}x_8 \right)^3 - \left(\frac{4}{3}x_7 + \frac{5}{3}x_8 \right)^3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right) x_4^2;$$

$$\dot{x}_8 = -x_8 - \left(\frac{1}{3}x_7 + \frac{4}{3}x_8 \right)^3 - \left(\frac{4}{3}x_7 + \frac{5}{3}x_8 \right)^3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right) x_4^2;$$

где $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ – действительные числа, ***a, b, d, g*** – неотрицательные постоянные.

Нетрудно проверить, что если для линейного приближения уравнений системы (4.1) возьмем функцию Ляпунова в виде $V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right) + \frac{1}{2}x_7^2 + \frac{1}{3}x_7 x_8 + \frac{2}{3}x_8^2$, то условие (2.4), приведенное в теореме 1, примет вид:

$$H = -\left(x_1^2 + x_2^2\right)^2 - ax_3^4 - \left(x_5^2 + x_6^2\right)^2 - \left(x_7 + \frac{1}{3}x_8 \right)^4 - \left(\frac{1}{3}x_7 + \frac{4}{3}x_8 \right)^4 -$$
$$- \left(\frac{4}{3}x_7 + \frac{5}{3}x_8 \right)^4 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2\right) x_4^2,$$

что представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию. Очевидно, что для функции V удовлетворяются также условия (2.2), (2.3). Следовательно, в данном примере для системы (4.1) удовлетворяются все условия теоремы 1 об асимптотической устойчивости по действующей силе. Тогда тривиальное решение системы (4.1) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Пример 2.

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);\\
\dot{x}_2 &= -x_2 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);\\
\dot{x}_3 &= \alpha_1 x_4 - x_3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);\\
\dot{x}_4 &= -\alpha_1 x_3 - x_4 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);\\
\dot{x}_5 &= \alpha_2 x_6 - x_5 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);\\
\dot{x}_6 &= -\alpha_2 x_5 - x_6 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 \right);\\
\dot{x}_7 &= -2x_7 + x_8 - \left(x_7 + \frac{1}{3}x_8 \right)^3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right);\\
\dot{x}_8 &= -x_8 - \left(\frac{1}{3}x_7 + \frac{4}{3}x_8 \right)^3 \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 \right):
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

где $\alpha_1 \neq 0$, $\alpha_2 \neq 0$ – действительные числа.

Очевидно, что система (4.2) имеет вид (3.1).

Если для линейного приближения уравнений системы (4.2) в качестве функции Ляпунова возьмем

$$V = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right) + \frac{1}{2}x_7^2 + \frac{1}{3}x_7 x_8 + \frac{2}{3}x_8^2,$$

то функция (3.3) (в теореме 2) примет вид:

$$-\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2\right)\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2+x_7^2+x_8^2\right)-$$
$$-\left(\frac{4}{3}x_7+\frac{5}{3}x_8\right)^4\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2+x_6^2\right);$$

что представляет собой знакопостоянную отрицательную функцию, т.е. в данном примере для системы (4.2) удовлетворяются все условия теоремы 2 об асимптотической устойчивости по действующей силе. Следовательно, тривиальное решение системы (4.2) асимптотически устойчиво по действующей силе.

Работа выполнена в рамках научной темы под грифом 0114, осуществляемым на кафедре теоретической механики ЕГУ, которая финансируется из государственных централизованных источников РА.

Автор статьи выражает благодарность доктору физ.-мат. наук В.В. Аветисяну за полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габриелян М.С., Шагинян С.Г. О неустойчивости систем дифференциальных уравнений при интегрально-малых возмущениях. // Уч. записки ЕГУ. 1989. №1. С.27-32.
2. Шагинян С.Г. Об одной задаче теории устойчивости. // Уч. записки ЕГУ. 1986. №2. С.39-45.
3. Каменков Г.В. Избранные труды. Т.1. М.: Наука, 1971. 272с.
4. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530с.
5. Амбарцумян С.Р. Об одной задаче устойчивости по действующей силе в критическом случае при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка. Ереван: Депон. в Арм. НИИНТИ, 2002. №1. С.6.
6. Амбарцумян С.Р. Об одной задаче устойчивости в критическом случае при паре чисто мнимых корней. // Механика твердого тела. Донецк: 2002. Вып. 32. С.117-120.
7. Амбарцумян С.Р. О задаче устойчивости по действующей силе при паре чисто мнимых корней. // В сб. научных трудов конференции: “Оптимальное управление, устойчивость и прочность механических систем”. Ереван: 2002. С.15-18.
8. Амбарцумян С.Р. Об одном способе решения задачи устойчивости по действующей силе при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка. // Естественные и технические науки. М.: 2002. №3. С.8-10.
9. Амбарцумян С.Р. Об устойчивости по действующей силе в критическом случае при паре чисто мнимых корней для системы второго порядка. // Уч. записки ЕГУ. 2003. №3. С.50-56.
10. Амбарцумян С.Р. К задаче устойчивости по действующей силе в критическом случае при k нулевых и q пар чисто мнимых корней. // Актуальные проблемы современной науки. М.: 2003. №4. С.115-118.
11. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 471с.

Сведения об авторе:

Амбарцумян Самвел Размикович – канд. физ-мат.наук, доцент каф. высш.матем. и теорет.механики Армянского Государственного Аграрного Университета
Адрес: 0009, Ереван, ул. Теряна, 74; Тел.: (091) 31.40.01
E-mail: samvelham@yahoo.com

Поступила в редакцию 22.09.2005