ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК.539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ ДВИЖУЩИХСЯ НАГРУЗКАХ

Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г.

Ключевые слова: стержень, цилиндрическая оболочка, подвижная нагрузка, потеря устойчивости, критическое время.
Key words: bar, cylindrical shell, moving load, bucling, critical moment.

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Առաձգական համակարգերի կայունությունը շարժական բեռերի դեպքում
Ձողի և գլանային թաղանթի կայունությունն ուսումնասիրվում է շարժական բեռերի դեպքում: Դիտարկված են կենտրոնացված և հաստատուն ինտեսիվության բեռերի դեպքերը, երբ շարժումն իրականացվում է հաստատուն արագությամբ: Նախնական վիճակների հավասարումները լուծվում են ճշգրիտ: Կրիտիկական ժամանակը որոշվում է է այն պայմանից, որ համակարգի շարժումը դադարում է տատանողական լինելուց:

L.A.Movsisyan, G.G.Nersisyan
About stability of elastic systems in moving loads
The stability of roads and cylindrical shells under moving load is investiqated. We consider the cases of concentrated forces and uniformly distributed ones when the motion carrying out constant velocity. Equations of the initial state can be solved exactly. The critical time of bucling is found by condition that motion of systems stops being vibration.

В качестве таковых рассматриваются стержень и цилиндрическая оболочка. Изучается их устойчивость при движущихся нагрузках. Уравнения начальных состояний (динамика) решаются точно. Критическое время потери устойчивости определяется из условия, что движение возмущенного состояния перестает быть колебательным.

Поведению упругих тел под воздействием движущихся нагрузок (неустойчивости) посвящено большое число работ [1,2]. Подобные задачи в линейной и нелинейной постановках для цилиндрических оболочек можно найти в [3].

Устойчивость стержней и цилиндрических оболочек при движущихся нагрузках рассматривалась в кзазистатической постановке без учёта начальных инерционных членов [4, 5].

1. Здесь рассматриваются задачи устойчивости для стержня. Уравнение движения начального состояния при произвольной нагрузке

$$EF\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\rho F\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+f\left(x,t\right). \tag{1.1}$$

Предполагается, что концы стержня неподвижны

$$u=0 \text{ при } x=0 \text{ и } x=l \tag{1.2}$$

и начальные условия нулевые

$$u=\frac{\partial u}{\partial t}=0 \text{ при } t=0 . \tag{1.3}$$

Если искать решение (1.1) при условиях (1.2) и (1.3) в виде

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\left(t\right)\sin\mu_n x , \quad \mu_n=\frac{n\pi}{l}, \tag{1.4}$$

то будем иметь

$$u_n = -\frac{a}{EF\mu_n}\int_0^l a_n(\tau)\sin\omega_n(t-\tau)d\tau\,, \tag{1.5}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\mu_n x dx\,,\ a^2 = \frac{F}{\rho},\ \omega_n = a\mu_n\,.$$

При этом, продольная сила определится как

$$P = EF\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n}u_n(t)\cos\mu_n x\,. \tag{1.6}$$

Будем изучать два случая для внешней нагрузки.

а) Сосредоточенная сила P_0 с постоянной скоростью c движется с конца $x=0$ к $x=l$ и направлена она к начальной точке:

$$f(x,t) = P_0\delta(x-ct).$$

Тогда

$$P = 2P_0\cdot N_1\,,\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$N_1 = \frac{1}{\pi(1-\alpha^2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\alpha\sin\omega_n t - \sin\alpha\omega_n t)\cos\mu_n x \tag{1.7}$$

В случае, когда неподвижная сила приложена в срединной точке стержня, её критическое значение равно восьми Эйлеровой силе [6]

$$P_{0\text{кр}} = 8\frac{EJ\pi^2}{l^2}$$

Подобная задача для вязкоупругого разномодульного стержня рассматривалась в [4] в квазистатической постановке: определяется критическое время потери устойчивости без учёта инерционных членов.

б) Сдвигающее постоянное усилие с конца $x=0$ распространяется с постоянной скоростью к другому концу –

$$f(x,t) = p_0\left[H(x) - H(x-ct)\right] \tag{1.8}$$

Тогда продольная сила будет

$$P = 2p_0\cdot N_2.$$

$$N_2 = \frac{1}{\pi^2(1-\alpha^2)}\sum_{n=1}\frac{1}{n^2}\left[\alpha^2 + \cos\alpha\omega_n t - 1 - \alpha^2\cos\omega_n t\right]\cos\mu_n x \tag{1.9}$$

В случае, когда сдвигающие напряжения противоположно направлены по всей длине стержня (случай статики), критическое напряжение определяется формулой [7]

$$S_{\text{кр}} = \frac{E\pi}{l}\sqrt{\frac{J}{F}}$$

Уравнение устойчивости, согласно принятому предположению относительно определения критического момента времени, будет

$$EJ\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 0 \tag{1.10}$$

При условиях шарнирного опирания на концах балки решение (1.10) с такими P, как (1.7) и (1.9), будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_m(t) \sin \mu_m x . \tag{1.11}$$

Тогда критическое время потери устойчивости для данной нагрузки (или наоборот) будет определяться из условия разрешимости системы

$$\left(m^2 + b_{2m}\right) m w_m + \sum_{n=1, m \neq n}^{\infty} \left(b_{m+n} + b_{m-n}\right) n w_n = 0 , \tag{1.12}$$

где для первой задачи

$$b_n = \lambda \cdot N_1 \ , \ \lambda = \frac{P_0 l^2}{EJ\pi^2} \ , \tag{1.13}$$

а для второй –

$$b_n = \lambda N_2 \ , \ \lambda = \frac{p_0 l^3}{EJ\pi^2} . \tag{1.14}$$

В табл. 1 и 2 для различных α приведены значения критической нагрузки λ для заданных моментов времени $\xi = \dfrac{ct}{l}$, соответственно для задач а) и б).

Таблица 1

ξ \ α	0	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
0.1	5.113	5.112	5.112	5.061
0.2	3.759	3.759	3.758	3.721
0.3	4.070	4.070	4.069	4.029
0.4	5.666	5.666	5.665	5.605
0.5	8.000	8.000	7.999	7.920
0.6	8.938	8.938	8.937	8.849
0.7	9.893	9.893	9.892	9.794
0.8	12.39	12.39	12.38	12.27
0.9	21.16	21.16	21.15	20.96

По этим таблицам можно определить для данного момента времени при какой скорости (или наоборот) достигается критическая нагрузка.

Для второй задачи в каждой клетке помещены два значения λ. Первые соответствуют случаю, когда сдвигающее усилие противоположно направлено к направлению распространения нагрузки, а вторые – наоборот.

Что интересно (и удивительно), даже для больших скоростей движения нагрузки (например, для металлов больше, чем 720 км/час) значения критических нагрузок незначительны, порядка 1%, отличаются от случая $\alpha = 0$, т.е. статический подход дает вполне приемлемый результат для определения критических нагрузок.

Следует отметить также, что поведение критических нагрузок несимметрично относительно сжатой и растянутой частей стержня.

Таблица 2

α / ξ	0	10^{-3}	10^{-2}	$2\cdot10^{-1}$
0.1	92.42	92.19	92.13	91.94
	406.7	406.7	406.7	405.6
0.2	29.16	29.16	29.16	29.09
	113.6	113.6	113.5	113.3
0.3	16.77	16.77	10.77	16.73
	57.17	57.17	57.16	57.02
0.4	12.45	12.45	12.45	12.42
	36.71	36.71	36.70	36.61
0.5	10.62	10.62	10.62	10.59
	26.64	26.64	26.63	26.57
0.6	9.743	9.243	9.74	9.719
	20.19	20.19	20.18	20.14
0.7	9.209	9.209	9.209	9.186
	15.07	15.06	15.06	15.03
0.8	8.805	8.805	8.804	8.783
	11.28	11.28	11.27	11.25
0.9	8.527	8.527	8.526	8.505
	9.119	9.119	9.118	9.096
1.0	8.425	8.425	8.422	8.404

2. Движение цилиндрической оболочки под нормальным давлением интенсивности $Z(x,t)$ описывается системой

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \nu r\frac{\partial w_0}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2}$$
$$\nu r\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + r^2 w_0 = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} + Q\,,\quad Q = \frac{\left(1-\nu^2\right)l^2}{Eh}Z(\xi,t) \tag{2.1}$$

где безразмерные координаты

$$x = l\xi,\quad \tau = \frac{at}{l}\,,\quad a^2 = \frac{E}{\rho\left(1-\nu^2\right)}\,,\quad r = \frac{l}{R}\,.$$

В предположении, что концы оболочки неподвижны, ищем решение (2.1) в виде

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \sin n\pi\xi\,,\quad w_0 = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cos n\pi\xi\,,\quad Q = \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cos n\pi\xi\,. \tag{2.2}$$

Тогда для начальных усилий получим

$$\overline{T}_1^0 = \frac{T_1^0}{Eh} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\pi\xi\,,\quad \overline{T}_2^0 = \frac{T_2^0}{Eh} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\pi\xi$$
$$a_0 = \frac{r}{l\left(1-\nu^2\right)}f_0\,,\quad a_n = \frac{1}{l\left(1-\nu^2\right)}\left(f_n + \nu n\pi\varphi_n\right) \tag{2.3}$$

$$b_0 = \nu a_0 \ , \ b_n = \frac{1}{l\left(1-\nu^2\right)}\left(\nu_n r f_n + n\pi\varphi_n\right)$$

$$f_0 = \frac{1}{r}\int_0^\tau q_0\left(\theta\right)\sin r\left(\tau-\theta\right)d\theta$$

$$f_n = \frac{1}{p_2^2 - p_1^2}\int_0^\tau a_n\left(\theta\right)\left[\frac{\left(n\pi\right)^2 - p_1^2}{p_1}\sin p_1\left(\tau-\theta\right) - \frac{\left(\pi n\right)^2 - p_2^2}{p_2}\sin p_2\left(\tau-\theta\right)\right]d\theta$$

$$\varphi_n = \frac{\nu r n\pi}{p_2^2 - p_1^2}\int_0^\tau a_n\left(\theta\right)\left[\frac{\sin p_2\left(\tau-\theta\right)}{p_2} - \frac{\sin p_1\left(\tau-\theta\right)}{p_1}\right]d\theta$$

$$p_{1,2} = \left\{\frac{1}{2}\left[\left(n\pi\right)^2 + r^2\right] \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left[\left(n\pi\right)^2 - r^2\right] + \nu^2 r^2 \left(n\pi\right)^2}\right\}^{1/2}$$

Уравнением устойчивости с учетом предположений относительно критического времени будет

$$D\Delta^4 w + \frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \Delta^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^0\frac{\partial w}{\partial x}\right) + T_2^0\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right] = 0 \tag{2.4}$$

Принимая, что края оболочки свободно оперты, w будем искать в виде

$$w = \cos\frac{ny}{R}\sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin\frac{m\pi x}{l} \tag{2.5}$$

Учитывая (2.3) и (2.5) для определения критических параметров из (2.4), получим

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{h^2}{12r^2R^2}\left[\left(m\pi\right)^2 + r^2n^2\right]^4 + \left(1-\nu^2\right)r^2\left(m\pi\right)^4\right\}w_m + \\ &+\frac{1}{2}\left[\left(m\pi\right)^2 + r^2n^2\right]^2\left\{n^2r^2\left[\sum_{s=1}^{m} a_{m-s}w_s + \sum_{s=m}^{\infty} a_{s-m}w_s - \right.\right. \\ &\left.\left.-\sum_{s=1}^{\infty} a_{m+s}w_s\right] + \nu m\pi^2\left[\sum_{s=1}^{m-1} b_{m-s}sw_s + \sum_{s=m+1}^{\infty} b_{s-m}sw_s + \sum_{s=1}^{\infty} b_{m+s}sw_s\right]\right\} = 0\end{aligned} \tag{2.6}$$

Для произвольной нагрузки коэффициенты a_n и b_n определяются согласно (2.3), а критические параметры – из (2.6).

В качестве примера рассмотрим случай, когда постоянное нормальное давление, начиная с момента времени $t = 0$, с постоянной скоростью c движется в сторону другого конца. Так как нас интересует влияние скорости движения нагрузки на критические параметры, для простоты примем, что коэффициент Пуассона материала - $\nu = 0$. Это почти равносильно пренебрежением продольным инерционным членом по сравнению с поперечным. Вследствие чего, T_1^0. Наличие T_1^0 незначительно уменьшает величину искомых параметров. Коэффициентами a_n в данном случае будут

$$a_0 = Q_0\alpha\left(\frac{1}{r}\sin r\tau - \tau\right),\ Q = \frac{q}{E}\frac{R}{h}$$
$$a_n = \frac{2Q_0}{n\pi}\left(\frac{n\pi}{r}\sin r\tau - \sin n\pi\alpha\tau\right)\frac{r^2}{r^2 - (n\pi\alpha)^2} \tag{2.7}$$

В табл. 3 приведены критические $\lambda = \frac{q}{E}\beta^3$ для различных геометрических $\left(\beta = \frac{R}{h},\ \eta = \frac{r}{\pi}\right)$ и физического $\left(\alpha = \frac{c}{a}\right)$ параметров.

Основной вывод относительно влияния скорости движения нагрузки такой же, как и в предыдущем пункте.

Из таблицы видно, что с увеличением β (т.е., как будто с уменьшением толщины оболочки) критическая λ увеличивается. Дело в том, что обычно в качестве искомого параметра (напр.,[5]) принимают $\frac{q}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2$, в то время, как здесь $\frac{R}{h}$ фигурирует в третьей степени. Так что нет противоречия.

3. В [8] приводится решение задачи устойчивости бесконечно длинной цилиндрической оболочки под кольцевым нормальным давлением. Было интересно рассмотреть такую задачу, когда кольцевое усилие движется с постоянной скоростью, как и в предыдущих пунктах. При предположении, что движение осуществляется в положительном направлении координатной оси, уравнение движения запишется

$$D\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + \frac{Eh}{R^2}w_0 + \rho h\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = -P\delta(x - ct) \tag{3.1}$$

Начальное условие нулевое.

Таблица 3

β	α	0		10^{-2}		10^{-1}	
	ξ \ η	4	5	4	5	4	5
200	0.25	2.574	2.051	2.574	2.051	2.566	2.047
	0.5	1.362	1.088	1.362	1.088	1.361	1.087
	0.75	1.036	0.8274	1.036	0.8274	1.305	0.8272
	1	0.9728	0.7772	0.9728	0.7772	0.9728	0.7772
400	0.25	3.620	2.889	3.620	2.889	3.601	2.882
	0.5	1.921	1.535	1.921	1.535	1.920	1.534
	0.75	1.462	1.168	1.462	1.168	1.461	1.68
	1	1.373	1.097	1.373	1.097	1.373	1.097
500	0.25	4.043	3.227	4.043	3.227	4.029	3.219
	0.5	2.147	1.715	2.147	1.715	2.144	1.714
	0.75	1.633	1.306	1.633	1.306	1.632	1.305
	1	1.534	1.227	1.534	1.227	1.534	1.227

Таблица 3 (продолжение)

β	α	0		10^{-2}		10^{-1}	
	η / ξ	2	3	2	3	2	3
200	0.25	5.243	3.453	5.242	3.453	5.171	3.436
	0.5	2.750	1.822	2.749	1.822	2.738	1.819
	0.75	2.086	1.384	2.085	1.1.384	2.082	1.382
	1	1.957	1.299	1.958	1.299	1.958	1.299
400	0.25	7.335	4.849	7.334	4.848	7.296	4.825
	0.5	3.868	2.567	3.868	2.567	3.862	2.562
	0.75	2.938	1.952	2.938	1.952	2.936	1.950
	1	2.759	1.834	2.759	1.834	2.759	1.833
500	0.25	8.179	5.411	8.178	5.411	8.065	5.385
	0.5	4.318	2.868	4.318	2.868	4.300	2.862
	0.75	3.281	2.181	3.281	2.181	3.275	2.179
	1	3.082	2.049	3.082	2.049	3.082	2.049

Переходя к безразмерным координатам,

$$\xi = \frac{x}{R}\ ,\ \ \tau = \frac{at}{R}\ ,\ \ a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}\ . \tag{3.2}$$

Вместо (3.1) будем иметь

$$\begin{gathered} A^2 \frac{\partial^4 w_0}{\partial \xi^4} + w_0 + \frac{\partial^2 w_0}{\partial \tau^2} = -P\frac{R}{Eh}\delta\left(\xi - \alpha\tau\right) \\ A^2 = \frac{h^2}{12\left(1 - \nu^2\right)R^2}\ ,\ \ \alpha = \frac{c}{a} \end{gathered} \tag{3.3}$$

Подвергая (3.3) преобразованию Фурье относительно ξ, получим

$$\frac{d^2 \overline{w}_0}{d\tau^2} + \omega^2 \overline{w}_0 = Qe^{i\alpha æ\tau}\ , \tag{3.4}$$

где

$$Q = -\frac{PR}{Eh}\ ,\ \ \omega^2 = A^2 æ^4 + 1$$

Прогиб оболочки определится формулой

$$w_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{w}_0 e^{-iæ\xi} dæ \tag{3.5}$$

Для трансформанты $\overline{w}_0$ имеем

$$\overline{w}_0 = Q\left[\frac{e^{i\alpha æ\tau}}{\omega^2 - \alpha^2 æ^2} - \frac{e^{i\alpha\omega\tau}}{\omega\left(\omega - æ\alpha\right)} - \frac{e^{-i\alpha\omega\tau}}{\omega\left(\omega + æ\alpha\right)}\right]\ . \tag{3.6}$$

Первый член в (3.6) – частное решение (3.4), соответствующее правой части. Сначала получим выражение w_0 для этого члена. Особые точки, соответствующие этому члену, суть

$$æ_1 = -a_1 + ia_2, \quad æ_2 = a_1 + ia_2$$
$$æ_3 = -a_1 - ia_2, \quad æ_4 = a_1 - ia_2 \tag{3.7}$$
где
$$a_1 = \frac{1}{2A}\left(\alpha^2 + 2A\right)^{1/2}, \quad a_2 = \frac{1}{2A}\left(2A - \alpha^2\right)^{1/2}$$

При вычислении корней уравнения $\omega^2 = \alpha^2 æ^2$ принималось $2A > \alpha^2$. Так как нас интересует порядок скорости движения, при котором инерционным членом в (3.1) можно пренебречь, то получаемая при таком ограничении скорость довольно большая – $\frac{c}{a} \le 0.78\sqrt{\frac{h}{R}}$. В противном случае можно аналогичным образом вычислить интегралы, как и здесь. Но только особые точки тогда будут находиться на действительной оси.

Сумма вычетов, соответствующая первым двум корням (1.7), дает выражение w_0^0 для $\alpha\tau > \xi$ –
$$w_0^0 = Q\sqrt{\frac{A}{4A^2 - \alpha^4}} e^{-a_2(\alpha\tau - \xi)} \sin\left[a_1(\alpha\tau - \xi) + \varepsilon\right]$$
$$\varepsilon = \operatorname{arctg}\frac{a_1}{a_2} \tag{3.8}$$

Два следующих корня (3.7) дают выражения w_0^0 для $\alpha\tau < \xi$
$$w_0^0 = Q\sqrt{\frac{A}{4A^2 - \alpha^4}} e^{a_2(\alpha\tau - \xi)} \sin\left[\varepsilon - a_1(\alpha\tau - \xi)\right] \tag{3.9}$$

В случае квазистатики (пренебрежение инерционным членом) вместо (3.8), (3.9) будем иметь
$$w_0^0 = \frac{Q}{2\sqrt{A}} e^{-\gamma(\alpha\tau - \xi)} \sin\left[\gamma(\alpha\tau - \xi) + \frac{\pi}{4}\right], \ \gamma = \sqrt{\frac{1}{2A}}, \ \alpha\tau > \xi$$
$$w_0^0 = \frac{Q}{2\sqrt{A}} e^{\gamma(\alpha\tau - \xi)} \sin\left[\frac{\pi}{4} - \gamma(\alpha\tau - \xi)\right], \quad \alpha\tau < \xi \tag{3.10}$$

При $\alpha = 0$ из (3.10) получим выражение для w в [5].

Максимальный прогиб
$$w_д \simeq w_{ст.}\left(1 + \frac{\alpha^4}{8A^2}\right), \ w_{ст} = \frac{Q}{2\sqrt{2A}} \tag{3.11}$$

Интервалы, вне которого можно считать, что оболочка не деформируется $\left(e^{-3} \approx 0\right)$ соответственно для статики и динамики, будут
$$\mp 3\sqrt{2A} \qquad \mu \qquad \mp 3\sqrt{2A}\left(1 + \frac{\alpha^2}{4A}\right) \tag{3.12}$$

Как видно из приведённых формул, и максимальный прогиб, и интервал, деформированный для динамики больше, чем для статики и с увеличением скорости подвижной нагрузки разница между ними увеличивается, однако следует подчеркнуть, что разница эта уж не очень большая.

Пожалуй, можно довольствоваться только этим решением (без решения однородной части), как часто это и делается по известным соображениям. В части задачи устойчивости мы так и поступаем.

Решение однородной части можно находить вышеприведённым методом. Однако, для краткости и разнообразия приведём его методом стационарной фазы.

Единственная действительная стационарная точка функций

$$K'(æ)=0\ ,\ K(æ)=\omega\pm æ\frac{\xi}{\tau} \tag{3.13}$$

есть

$$æ_1=\pm\sqrt{u+v+\frac{1}{3}\alpha A^2}$$

$$u=\left(-q+\sqrt{p^3+q^2}\right)^{1/3}\ ,v=\left(-q-\sqrt{p^3+q^2}\right)^{1/3}$$

$$p=-\frac{1}{9}\left(\alpha^3A^2\right)^3\ ,\quad q=-\frac{1}{27}\left(\alpha^3A^2\right)^3-\frac{\alpha^2}{4}$$

Тогда решение однородной части запишется

$$w_1=-\frac{Q}{\left(2\pi\tau K''\right)^{1/2}}\frac{\cos\left[\omega(æ_1)-æ_1\dfrac{\xi}{\tau}+\dfrac{\pi}{4}\right]}{\omega(æ_1)\left[\omega(æ_1)-æ_1\alpha\right]}$$

$$K''(æ_1)=\frac{2A^2æ_1^2\left(A^2æ_1^3+3\right)}{\left(A^2æ_1^4+1\right)^{3/2}}>0 \tag{3.14}$$

В (3.14) имеется в виду положительное значение $æ_1$.

В [8] для статики получено приближенное значение критического усилия (формула (11.203))

$$P_{\text{кр}}=\frac{\sqrt{12}}{9}\frac{Eh}{\left(1-v^2\right)^{0.75}}\left(\frac{h}{R}\right)^{3/2} \tag{3.15}$$

Судя по результатам предыдущих задач, а также приближенным оценкам сравнительного максимального прогиба (начальное усилие пропорционально прогибу) и интервалом воздействия движущей нагрузки, с достаточной уверенностью можно утверждать, что здесь также влиянием инерционного члена можно пренебречь, иначе говоря, при получении формулы, аналогичной (3.15), для настоящего случая вместо (3.10) должны брать (3.9), то есть выражение $\dfrac{Q}{2\sqrt{A}}$ должно быть заменено на $Q\sqrt{\dfrac{A}{4A^2-\alpha^4}}$. В конечном счете, изменение критического усилия будет незначительно, как и в предыдущих примерах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Физматлит., 1959. 439 с.
2. Филиппов А.С. Колебания деформируемых систем. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
4. Мовсисян Л.А. Об устойчивости вязкоупругого разномодульного стержня при движущейся нагрузке. //Изв.РАН. МТТ. 1994. №4. С.171-175.
5. Мовсисян Л.А., Нерсисян Г.Г. Об устойчивости вязкоупругой цилиндрической оболочки при движущейся нагрузке. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №2. С.28–32.
6. Алфутов Н.А. Основы расчёта на устойчивость упругих систем. М.: Машиностроение, 1978. 312 с.
7. Флеминг, Герман, Муни. Потеря устойчивости конструкций под действием поверхностных усилий сдвига. // Прикладная механика. Тр. амер. общ. инж. механиков. 1965. №1. С.225-227.
8. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: Физматлит, 1963. 879 с.

Сведения об авторах:

Мовсисян Лаврентий Александрович,
Д.т.н., профессор, главный научный сотрудник Института механики НАН РА
Адрес: 0019, Ереван-19, пр. Маршала Баграмяна $24^{\text{б}}$
Тел.: (+37410). 56821
E-mail: mechins@sci.am

Нерсисян Гриша Геворкович,
К.ф-м.н., доцент, Ар.Г.А.У.
Адрес: г.Ереван, пр.Азатутян $7^{\text{б}}$, кв.37.
Тел.: 20-68-79.

Поступила в редакцию 19.09.2011