

**ДИФРАКЦИЯ СДВИГОВОЙ ПОВЕРХНОСТНОЙ
ЭЛЕКТРОУПРУГОЙ ВОЛНЫ НА ПОЛУБЕСКОНЕЧНОМ
МЕТАЛЛИЧЕСКОМ СЛОЕ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ
ПРОСТРАНСТВЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ МЕТАЛЛИЧЕСКИМ СЛОЕМ**

Григорян Э. Х., Синянян С.С.

Ключевые слова: пьезоэлектрическое пространство, бесконечный металлический слой, полубесконечный слой, поверхностная волна, асимптотические формулы, дальняя зона, цилиндрическая волна.

Key words: Piezoelectric space, infinite metallic layer, semi-infinite layer, surface wave, asymptotic formulae, farther zone, cylindrical wave

Գրիգորյան Է.Խ. , Մինանյան Ս.Ս.

Սահբի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պեղծելեկտրական տարածությունում

Աշխատանքում դիտարկվում է սահբի մակերևութային էլեկտրաառաձգական ալիքի դիֆրակցիան կիսաանվերջ մետաղական շերտի վրա անվերջ մետաղական շերտով պեղծելեկտրական տարածությունում: Խնդրի լուծումը Ֆուրյեի իրական ձևափոխության օգնությամբ հանգեցվում է անալիտիկ ֆունկցիաների տեսության Ռիմանի խնդրի տիպի խնդրի լուծմանը: Գտնված են տեղափոխության ամպլիտուդի ասիմպտոտիկ բանաձևերը հեռավոր գոտում: Ցույց է տրված, որ կիսաանվերջ մետաղական շերտի առկայությունը բերում է մակերևութային և գլանային ալիքների առաջացման, ինչպես նաև այնպիսի ալիքի առաջացմանը, որը ճառագայթի ուղղությամբ տարածվում են ճառագայթի բացվածքի անկյունից կախված արագությամբ:

Grigoryan E.Kh., Sinanyan S.S.

Diffraction of surface shear electroelastic wave in semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer

Diffraction of surface shear electroelastic wave in semi-infinite metal layer in piezoelectric space with infinite metal layer is discussed. Solution of the problem can be brought to solution of Riemann problem in analytic functions theory, using real Fourier transformation. Asymptotic formulae of shift amplitude in further zone are found. It is shown that existence of semi-infinite metal layer leads to appearance of surface and cylindrical waves and a wave which propagates in the direction of the beam, with a speed depending from the angle beam spread.

В работе рассматривается дифракция сдвиговой поверхностной (локализованной) электроупругой волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. Решение задачи с помощью действительного преобразования Фурье приводится к решению задачи типа Римана в теории аналитических функций. Относительно амплитуд перемещений получены асимптотические формулы в дальней зоне. Показано, что наличие полубесконечного металлического слоя приводит к появлению поверхностных и цилиндрических волн и волны, распространяющейся по направлению луча со скоростью, зависящей от угла раствора луча.

Рассматривается пьезоэлектрическое пространство класса bmm гексагональной симметрии с главной осью параллельной координатной оси Oz . В пьезоэлектрическом пространстве имеется включение в виде двух параллельных бесконечного и полубесконечного заземленных тонких металлических слоев. Считается, что толщина металлических слоев настолько мала, что их жесткостью можно пренебречь, т.е. слои можно рассматривать как электроды, занимающие плоскость $-\infty < x < \infty$, $y = h$, $-\infty < z < \infty$ и полуплоскость $-\infty < x \leq 0$, $y = -h$, $-\infty < z < \infty$.

В пространстве распространяется поверхностная волна сдвига с перемещениями $w_0(x, y, t) = w_\infty(x, y)e^{-i\omega t}$ и с электрическим потенциалом

$$\Phi_0(x, y, t) = \Phi_\infty(x, y)e^{-i\omega t} \quad [13],$$

где

$$w_{\infty}(x, y) = e^{-\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}|y-h| - i\sigma_n x}$$

$$\Phi_{\infty}(x, y) = \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} e^{-i\sigma_n x} (e^{-\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}|y-h|} - e^{-\sigma_n|y-h|}) \quad (1)$$

тогда величины, характеризующие электроупругое поле, зависят от времени, пропорционально $e^{-i\omega t}$. В этом случае уравнения относительно амплитуд перемещения $w(x, y)$ и квазистатического электрического потенциала $\Phi(x, y)$ примут вид [1]:

$$\Delta w + k^2 w = 0$$

$$\Delta \Phi + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} k^2 w = 0 \quad (2)$$

ε_{11} – диэлектрическая проницаемость, e_{15} – пьезомодуль, ω – частота колебаний, $k = \omega/c$ – волновое число, $c = \sqrt{c_{44}(1 + \alpha)}/\rho$ – скорость распространения сдвиговой электроупругой волны, c_{44} – упругая постоянная, ρ – плотность среды,

$$\alpha = e_{15}^2 / c_{44} \varepsilon_{11}, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ – оператор Лапласа.}$$

Решение уравнения (2) должно удовлетворять контактными условиям

$$w(x, \pm h + 0) = w(x, \pm h - 0),$$

$$\sigma_{yz}(x, \pm h + 0) = \sigma_{yz}(x, \pm h - 0), \Phi(x, h) = 0$$

$$\Phi(x, -h) = \Phi^+(x), D_y(x, -h + 0) - D_y(x, -h - 0) = -\varepsilon_{11} \Psi^-(x), \quad (3)$$

где $\sigma_{yz}(x, y) = c_{44} \frac{\partial w}{\partial y} + e_{15} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ – амплитуда тангенциальных напряжений,

$D_y(x, y) = e_{15} \frac{\partial w}{\partial y} - \varepsilon_{11} \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ – амплитуда компоненты вектора электрической

индукции, и $\Phi^+(x) = 0$ при $x < 0$, $\Psi^-(x) = 0$ при $x > 0$.

Введём функции

$$u(x, y) = w(x, y) - w_{\infty}(x, y), \varphi(x, y) = \Phi(x, y) - \Phi_{\infty}(x, y) \quad (4)$$

Функции $u(x, y)$, $\varphi(x, y)$ удовлетворяют уравнениям (2), тогда их действительные преобразования Фурье по x будут удовлетворять уравнениям

$$\frac{d^2 \bar{u}(\sigma, y)}{dy^2} - \gamma^2 \bar{u}(\sigma, y) = 0$$

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}(\sigma, y)}{dy^2} - \sigma^2 \bar{\varphi}(\sigma, y) + k^2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}(\sigma, y) = 0 \quad (5)$$

и следующим контактными условиями:

$$\begin{aligned}\bar{u}(\sigma, \pm h + 0) &= \bar{u}(\sigma, \pm h - 0), \\ \bar{\varphi}(\sigma, h) &= 0, \\ \bar{\varphi}(\sigma, -h) &= \bar{\Phi}^+(\sigma) - 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-2h\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_n}) \delta(\sigma - \sigma_n),\end{aligned}\quad (6)$$

$$c_{44} \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=\pm h+0} + e_{15} \left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=\pm h+0} = c_{44} \left. \frac{d\bar{u}}{dy} \right|_{y=\pm h-0} + e_{15} \left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=\pm h-0}$$

$$\left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=-h+0} - \left. \frac{d\bar{\varphi}}{dy} \right|_{y=-h-0} = -\bar{\Psi}^-(\sigma),$$

$$\text{где } \gamma^2 = \sigma^2 - k^2, \bar{f}(\sigma, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{i\sigma x} dx, f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(\sigma, y) e^{-i\sigma x} d\sigma,$$

$\delta(\sigma)$ – функция Дирака.

Следует отметить, что функции $\bar{u}(\sigma, y)$, $\bar{\varphi}(\sigma, y)$ ещё должны удовлетворять условию уходящей волны.

Решение системы (5), представляющее уходящую волну, имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{u}(\sigma, y) &= A_0(\sigma) e^{-\gamma y} \\ \bar{\varphi}(\sigma, y) &= B_0(\sigma) e^{-|\sigma|y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}\end{aligned}\quad \text{при } y > h \quad (7)$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\sigma, y) &= A_1(\sigma) \text{ch} \gamma y + A_2(\sigma) \text{sh} \gamma y \\ \bar{\varphi}(\sigma, y) &= B_1(\sigma) \text{ch} |\sigma| y + B_2(\sigma) \text{sh} |\sigma| y + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}\end{aligned}\quad \text{при } |y| < h \quad (8)$$

$$\begin{aligned}\bar{u}(\sigma, y) &= A_3(\sigma) e^{\gamma y} \\ \bar{\varphi}(\sigma, y) &= B_3(\sigma) e^{|\sigma|y} + \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \bar{u}\end{aligned}\quad \text{при } y < -h \quad (9)$$

Выше имелось в виду, что $\sqrt{\sigma^2 - k^2} = -i\sqrt{k^2 - \sigma^2}$,

$\gamma(\sigma) = \sqrt{\sigma^2 - k^2} > 0$ при $|\sigma| > k$, т.е действительная ось комплексной плоскости

$\alpha = \sigma + i\tau$ обходит точку $\sigma = -k$ сверху, а точку $\sigma = k$ – снизу [2].

Удовлетворив условиям (6), приходим к следующей задаче типа Римана на действительной оси [5-14] относительно функций $\bar{\Phi}^+(\sigma)$, $\bar{\Psi}^-(\sigma)$:

$$M(\sigma)(-\bar{\Phi}^+(\sigma) + 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-2h\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_n}) \delta(\sigma - \sigma_n)) = \bar{\Psi}^-(\sigma), \quad (10)$$

где

$$M(\sigma) = 2(1 + \varkappa) |\sigma| K(\sigma) \quad (11)$$

$$K(\sigma) = \frac{K_0(\sigma)}{K_1(\sigma) K_2(\sigma)}$$

$$K_0(\sigma) = (1 + \varkappa) \gamma - |\sigma| \varkappa$$

$$\begin{aligned}
K_1(\sigma) &= (1 + \varkappa)\gamma(1 + e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma|\varkappa(1 + e^{-2\gamma h}) \\
K_2(\sigma) &= (1 + \varkappa)\gamma(1 - e^{-2|\sigma|h}) - |\sigma|\varkappa(1 - e^{-2\gamma h})
\end{aligned} \tag{12}$$

В выражениях (7), (8), (9) неизвестные функции выражаются при помощи решения функционального уравнения (10)

$$\begin{aligned}
A_0(\sigma) &= \frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \bar{\Phi}^+(\sigma) \frac{(1 + \varkappa)\gamma e^{\gamma h} (e^{-2|\sigma|h} - e^{-2\gamma h})}{K_1(\sigma)K_2(\sigma)} + \\
&+ 2\pi\varkappa(1 + \varkappa)\sigma_{\Pi} \sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2} \frac{(e^{-2\sigma_{\Pi}h} - e^{-2\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}h})^2}{K_1(\sigma_{\Pi})K_2(\sigma_{\Pi})} e^{\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}h} \delta(\sigma - \sigma_{\Pi}) \\
A_1(\sigma) &= -\frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \frac{\bar{\Phi}^+(\sigma)}{K_1(\sigma)} e^{-\gamma h} + \frac{2\pi\varkappa\sigma_{\Pi} e^{-h\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}} (e^{-2h\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_{\Pi}})}{K_1(\sigma_{\Pi})} \delta(\sigma - \sigma_{\Pi}) \\
A_2(\sigma) &= \frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \frac{\bar{\Phi}^+(\sigma)}{K_2(\sigma)} e^{-\gamma h} - \frac{2\pi\varkappa\sigma_{\Pi} e^{-\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}h} (e^{-2h\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_{\Pi}})}{K_2(\sigma_{\Pi})} \delta(\sigma - \sigma_{\Pi}) \\
A_3(\sigma) &= -\frac{e_{15}}{c_{44}} |\sigma| \bar{\Phi}^+(\sigma) e^{\gamma h} \frac{(1 + \varkappa)\gamma(1 - e^{-2h(|\sigma| + \gamma)}) - |\sigma|\varkappa(1 - e^{-4\gamma h})}{K_1(\sigma)K_2(\sigma)} + A_3^* \delta(\sigma - \sigma_{\Pi}) \\
B_0(\sigma) &= -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_0 e^{(|\sigma| - \gamma)h} \\
B_3(\sigma) &= -\frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_3(\sigma) e^{(|\sigma| - \gamma)h} + \bar{\Phi}^+(\sigma) e^{|\sigma|h} - 2\pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-2h\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_{\Pi}}) e^{\sigma_{\Pi}h} \delta(\sigma - \sigma_{\Pi}) \\
B_1(\sigma) &= \frac{\bar{\Phi}^+(\sigma) - 2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_1(\sigma) \operatorname{ch} \gamma h}{2 \operatorname{ch} |\sigma|h} - \pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{(e^{-2h\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_{\Pi}}) \delta(\sigma - \sigma_{\Pi})}{\operatorname{ch} \sigma_{\Pi} h} \\
B_2(\sigma) &= \frac{-\bar{\Phi}^+(\sigma) - 2 \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} A_2(\sigma) \operatorname{sh} \gamma h}{2 \operatorname{sh} |\sigma|h} + \pi \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} \frac{(e^{-2h\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_{\Pi}}) \delta(\sigma - \sigma_{\Pi})}{2 \operatorname{sh} \sigma_{\Pi} h},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_3^* &= 2\pi\varkappa (e^{-2h\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_{\Pi}}) \sigma_{\Pi} e^{h\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}} \times \\
&\times \frac{((1 + \varkappa)\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2} (1 - e^{-2h(\sigma_{\Pi} + \sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2})}) - \sigma_{\Pi}\varkappa(1 - e^{-4\sqrt{\sigma_{\Pi}^2 - k^2}h}))}{K_1(\sigma_{\Pi})K_2(\sigma_{\Pi})}.
\end{aligned}$$

Перейдя к решению (10), заметим, что $K(\sigma)$ имеет действительные нули только в точках $\pm\sigma_{\Pi}$, где $K_0(\pm\sigma_{\Pi}) = 0$ и действительные полюсы – только в точках $\pm\sigma_{\Pi 1}, \pm\sigma_{\Pi 2}$, где $K_2(\pm\sigma_{\Pi 2}) = 0$ при $kh > h_a$, h_a – единственное решение уравнения $2h_a\varkappa = (1 + \varkappa)(1 - e^{-2h_a})$, и $K_1(\pm\sigma_{\Pi 1}) = 0$ при любых значениях

$kh(\sigma = 0)$ не является полюсом для $\bar{u}(\sigma, y)$) [8]. Поэтому, чтобы выполнялись условия уходящей волны, действительная ось должна обходить точки $-\sigma_{nj}$ сверху, а точки σ_{nj} – снизу ($j = 0, 1, 2$) [2].

Так как $K(\sigma) \rightarrow 1$ и $\ln K(\sigma) = O(\sigma^{-2})$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то, как известно, её можно представить в виде [2]

$$K(\sigma) = K^+(\sigma)K^-(\sigma) \quad (13)$$

$K^+(\alpha)$ – регулярная функция и не имеет нулей при $\text{Im } \alpha > 0$, а $K^-(\alpha)$ регулярна и не имеет нулей при $\text{Im } \alpha < 0$, ($\alpha = \sigma + i\tau$) и $K^\pm(\alpha) \rightarrow 1$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ – в своих областях регулярности,

$$K^\pm(\sigma) = \exp(\bar{R}^\pm(\sigma)),$$

где

$$\bar{R}^+(\sigma) = \int_0^\infty R(x)e^{i(\sigma+i0)x} dx, \quad \bar{R}^-(\sigma) = \int_0^\infty R(x)e^{i(\sigma-i0)x} dx,$$

$$R(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \ln[K(\sigma)]e^{-i\sigma x} d\sigma.$$

Так как $\ln[K(\sigma)]$ имеет порядок σ^{-2} при $|\sigma| \rightarrow \infty$, то функция $R(x)$ при $x \rightarrow 0$ принимает конечное значение. Тогда, в силу известных свойств интегралов Фурье имеем $\bar{R}^+(\sigma) = O((\sigma + i0)^{-1})$, $\bar{R}^-(\sigma) = O((\sigma - i0)^{-1})$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$.

Используя формулы

$$2\pi i \delta(\sigma - \sigma_n) = (\sigma - \sigma_n - i0)^{-1} - (\sigma - \sigma_n + i0)^{-1} \quad (14)$$

$$|\sigma| = (\sigma - i0)^{1/2} (\sigma + i0)^{1/2}, \quad (\sigma - i0)^{-1} = \sigma^{-1} + \pi i \delta(\sigma) \quad (15)$$

$$M(\sigma) \text{ представим в виде } M(\sigma) = M^+(\sigma)M^-(\sigma),$$

где

$$M^+(\sigma) = \sqrt{2(1+\varkappa)}(\sigma + i0)^{1/2} K^+(\sigma), \quad M^-(\sigma) = \sqrt{2(1+\varkappa)}(\sigma - i0)^{1/2} K^-(\sigma) \quad (16)$$

Имея в виду (13), (15), будем иметь

$$\bar{L}^+(\sigma) = \bar{L}^-(\sigma),$$

где

$$\bar{L}^+(\sigma) = -\bar{\Phi}^+ M^+(\sigma) + iM^+(\sigma_n) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-2h\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_n}) \frac{1}{\sigma - \sigma_n + i0}$$

$$\bar{L}^-(\sigma) = \frac{\bar{\Psi}^-}{M^-(\sigma)} + iM^+(\sigma_n) \frac{e_{15}}{\varepsilon_{11}} (e^{-2h\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_n}) \frac{1}{\sigma - \sigma_n - i0}$$

Применив к равенству обратное действительное интегральное преобразование Фурье, получим

$$L^+(x) = L^-(x),$$

где

$$L^+(x) = 0 \text{ при } x < 0, \quad L^-(x) = 0 \text{ при } x > 0,$$

следовательно, $L^+(x) = L^-(x) = \sum_{k=0}^n a_k \frac{d^k \delta(x)}{dx^k}$ [3,4], где n – любое конечное число.

После действительного интегрального преобразования Фурье получим $\bar{L}^+(\sigma) = \bar{L}^-(\sigma) = \sum_{k=0}^n a_k (-i)^k \sigma^k$, так как $\bar{K}^+(\sigma) \rightarrow 1$ и $\bar{\Phi}^+(\sigma)$ имеет порядок $o(\sigma + i0)^{-1}$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, $\bar{K}^-(\sigma) \rightarrow 1$ и $\bar{\Psi}^-(\sigma)$ имеет порядок $O(\sigma - i0)^{-1/2}$, то $\bar{L}^\pm(\sigma) \rightarrow 0$ при $|\sigma| \rightarrow \infty$, т.е. $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$, в силу вышесказанного будем иметь следующие выражения для неизвестных функций:

$$\bar{\Phi}^+(\sigma) = i \frac{e_{15} \sqrt{\sigma_n} (e^{-2h\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_n}) \bar{K}^+(\sigma_n)}{\varepsilon_{11} (\sigma + i0)^{1/2} (\sigma - \sigma_n + i0) \bar{K}^+(\sigma)}$$

$$\bar{\Psi}^-(\sigma) = -2i \frac{e_{15} (1 + \varkappa) \sqrt{\sigma_n} (e^{-2h\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_n}) \bar{K}^+(\sigma_n)}{\varepsilon_{11} (\sigma - i0)^{1/2} \bar{K}^-(\sigma)} \frac{(\sigma - i0)^{1/2} \bar{K}^-(\sigma)}{\sigma - \sigma_n - i0}$$

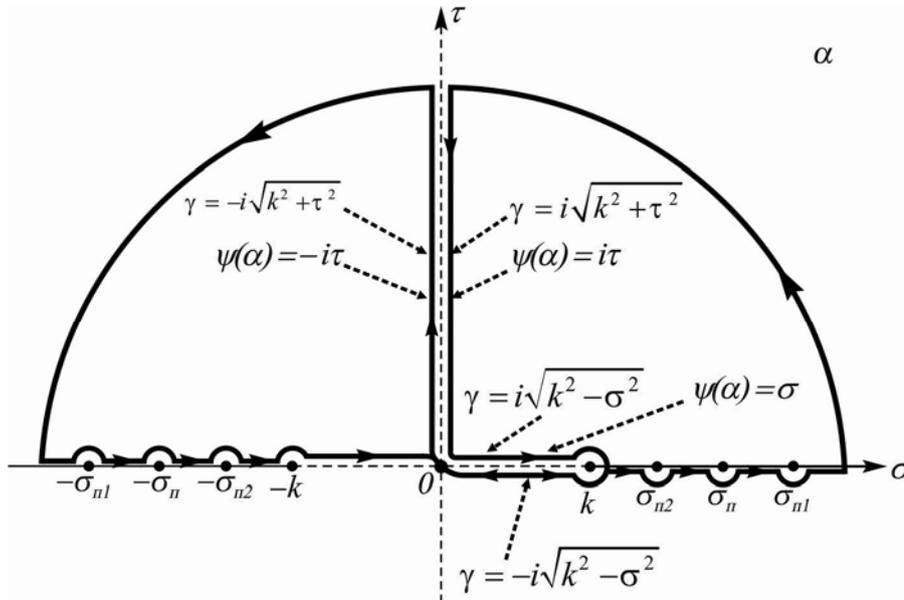
Применив обратное преобразование Фурье к (7), (8), (9), получим решение задачи.

Подробно остановимся на исследовании $w(x, y)$ в случае $x < 0, y > h$. Имеем:

$$w(x, y) = A_1^* \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma |\sigma| (e^{-2|\sigma|h} - e^{-2\gamma h})}{K_1(\sigma) K_2(\sigma) (\sigma - \sigma_n + i0) (\sigma + i0)^{1/2} \bar{K}^+(\sigma)} e^{-\gamma(y-h)} e^{-i\sigma x} d\sigma, \quad (17)$$

где

$$A_1^* = i\varkappa(1 + \varkappa) \frac{\sqrt{\sigma_n} (e^{-2h\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_n}) \bar{K}^+(\sigma_n)}{2\pi}.$$



Фиг. 1.

Вычисляя интеграл (17) при $x < 0$ с помощью метода контурного интеграла в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ с разрезами, указанными на фиг.1, получим

$$w(x, y) = w_{11}(x, y) + w_{\text{пез}}(x, y) + w_{\text{пов}}(x, y)$$

$$w_{11}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M_{111}(\sigma)}{\bar{K}^+(\sigma)(\sigma + i0)^{1/2}(\sigma - \sigma_{\text{п}} + i0)} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}(y-h)} e^{i\sigma|x|} d\sigma$$

$$w_{\text{пез}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N_{111}(\sigma) - M_{111}(\sigma)}{\bar{K}^+(\sigma)(\sigma + i0)^{1/2}(\sigma - \sigma_{\text{п}} + i0)} e^{-\sqrt{\sigma^2 - k^2}(y-h)} e^{i\sigma|x|} d\sigma$$

$$w_{\text{пов}}(x, y) = w_{\text{пов}}^{(1)} e^{i\sigma_{\text{п}}|x|} e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2 - k^2}(y-h)} + w_{\text{пов}}^{(2)} e^{i\sigma_{\text{п}}|x|} e^{-\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2 - k^2}(y-h)}$$

$$w_{\text{пов}}^{(1)} = 2\pi i \frac{\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2 - k^2} \sqrt{\sigma_{\text{п}}}(e^{-2\sigma_{\text{п}}h} - e^{-2i\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2 - k^2}h})}{\bar{K}^+(\sigma_{\text{п}})(\sigma_{\text{п}} - \sigma_{\text{п}})K_1'(\sigma_{\text{п}})K_2(\sigma_{\text{п}})}$$

$$w_{\text{пов}}^{(2)} = \begin{cases} \frac{2\pi i \sqrt{\sigma_{\text{п}}^2 - k^2} \sqrt{\sigma_{\text{п}}}(e^{-2\sigma_{\text{п}}h} - e^{-2i\sqrt{\sigma_{\text{п}}^2 - k^2}h})}{\bar{K}^+(\sigma_{\text{п}})(\sigma_{\text{п}} - \sigma_{\text{п}})K_1(\sigma_{\text{п}})K_2'(\sigma_{\text{п}})}, & kh > h_a \\ 0, & kh \leq h_a \end{cases}$$

$$w_{\text{пез}}(x, y) = -\int_0^{\infty} \frac{N_{15}(\tau) + M_{15}(\tau)}{\bar{K}^+(i\tau)(i\tau)^{1/2}(i\tau - \sigma_{\text{п}})} e^{-\tau|x|} e^{i\sqrt{\tau^2 + k^2}(y-h)} d\tau$$

$$w_{11}(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{M_{12}(\tau) e^{-i\sqrt{\tau^2 + k^2}(y-h)} + M_{15}(\tau) e^{i\sqrt{\tau^2 + k^2}(y-h)}}{\bar{K}^+(i\tau)(i\tau)^{1/2}(i\tau - \sigma_{\text{п}})} e^{-\tau|x|} d\tau -$$

$$-\int_0^k \frac{M_{13}(\sigma) e^{-i\sqrt{k^2 - \sigma^2}(y-h)} + M_{14}(\sigma) e^{i\sqrt{k^2 - \sigma^2}(y-h)}}{\bar{K}^+(\sigma)(\sigma + i0)^{1/2}(\sigma - \sigma_{\text{п}} + i0)} e^{i\sigma|x|} d\sigma$$

Итак, получили представления $w_{11}(x, y)$, $w_{\text{пез}}(x, y)$ в виде регулярных интегралов, которые удобны для вычисления при малых значениях x , y .

$$M_{12}(\tau) = \frac{i\tau\sqrt{\tau^2 + k^2}(e^{-2i\tau h} - e^{-2i\sqrt{\tau^2 + k^2}h})}{M_{12}^{(1)}(\tau)}, M_{15}(\tau) = \frac{i\tau\sqrt{\tau^2 + k^2}(e^{-2i\tau h} - e^{2i\sqrt{\tau^2 + k^2}h})}{M_{15}^{(1)}(\tau)}$$

$$M_{13}(\sigma) = \frac{i\sigma\sqrt{k^2 - \sigma^2}(e^{-2\sigma h} - e^{-2i\sqrt{k^2 - \sigma^2}h})}{M_{13}^{(1)}(\sigma)}, M_{14}(\sigma) = \frac{i\sigma\sqrt{k^2 - \sigma^2}(e^{-2\sigma h} - e^{2i\sqrt{k^2 - \sigma^2}h})}{M_{14}^{(1)}(\sigma)},$$

$$N_{15}(\tau) = \frac{i\tau\sqrt{\tau^2 + k^2}(e^{2i\tau h} - e^{2i\sqrt{\tau^2 + k^2}h})}{N_{15}^{(1)}(\tau)},$$

где

$$M_{12}^{(1)}(\tau) = ((1 + \mathfrak{a})\sqrt{\tau^2 + k^2}(1 + e^{-2i\tau h}) - \mathfrak{a}\tau(1 + e^{-2i\sqrt{\tau^2 + k^2}h})) \times$$

$$\times ((1 + \mathfrak{a})\sqrt{\tau^2 + k^2}(1 - e^{-2i\tau h}) - \mathfrak{a}\tau(1 - e^{-2i\sqrt{\tau^2 + k^2}h}))$$

$$M_{15}^{(1)}(\tau) = ((1 + \mathfrak{a})\sqrt{\tau^2 + k^2}(1 + e^{-2i\tau h}) + \mathfrak{a}\tau(1 + e^{2i\sqrt{\tau^2 + k^2}h})) \times$$

$$\times ((1 + \mathfrak{a})\sqrt{\tau^2 + k^2}(1 - e^{-2i\tau h}) + \mathfrak{a}\tau(1 - e^{2i\sqrt{\tau^2 + k^2}h}))$$

$$\begin{aligned}
M_{13}^{(1)}(\sigma) &= ((1+\varkappa)i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+e^{-2\sigma h})-\varkappa\sigma(1+e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))\times \\
&\times((1+\varkappa)i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1-e^{-2\sigma h})-\varkappa\sigma(1-e^{-2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h})) \\
M_{14}^{(1)}(\sigma) &= ((1+\varkappa)i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1+e^{-2\sigma h})+\varkappa\sigma(1+e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h}))\times \\
&\times((1+\varkappa)i\sqrt{k^2-\sigma^2}(1-e^{-2\sigma h})+\varkappa\sigma(1-e^{2i\sqrt{k^2-\sigma^2}h})) \\
N_{15}^{(1)}(\tau) &= ((1+\varkappa)\sqrt{\tau^2+k^2}(1+e^{2i\tau h})-\varkappa\tau(1+e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h}))\times \\
&\times((1+\varkappa)\sqrt{\tau^2+k^2}(1-e^{2i\tau h})-\varkappa\tau(1-e^{2i\sqrt{\tau^2+k^2}h})) \\
(\sigma_{n_1}^2-k^2)K_1'(\sigma_{n_1}) &= (\sigma_{n_1}^2-k^2)\frac{dK_1(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_{n_1}} = (1+e^{-2h\sqrt{\sigma_{n_1}^2-k^2}})k^2\varkappa+ \\
&+2e^{-2h\sqrt{\sigma_{n_1}^2-k^2}}h\varkappa\sigma_{n_1}^2\sqrt{\sigma_{n_1}^2-k^2}-2h(1+\varkappa)e^{-2h\sigma_{n_1}}(\sigma_{n_1}^2-k^2)^{\frac{3}{2}} \\
(\sigma_{n_2}^2-k^2)K_2'(\sigma_{n_2}) &= (\sigma_{n_2}^2-k^2)\frac{dK_2(\sigma)}{d\sigma}\Big|_{\sigma=\sigma_{n_2}} = (1-e^{-2h\sqrt{\sigma_{n_2}^2-k^2}})k^2\varkappa- \\
&-2e^{-2h\sqrt{\sigma_{n_2}^2-k^2}}h\varkappa\sigma_{n_2}^2\sqrt{\sigma_{n_2}^2-k^2}+2h(1+\varkappa)e^{-2h\sigma_{n_2}}(\sigma_{n_2}^2-k^2)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

При получении представления $w(x, y)$ имелось в виду, что аналитическое продолжение функции $\psi(\sigma) = |\sigma|$ в комплексной плоскости α это $\psi(\alpha) = \alpha$ при $\text{Re}(\alpha) > 0$, и $\psi(\alpha) = -\alpha$ при $\text{Re}(\alpha) < 0$. С такими разрезами в комплексной плоскости $\alpha = \sigma + i\tau$ функции $K_j(\alpha)$ ($j = 1, 2$) не могут иметь чисто комплексных нулей. Поскольку, если $\alpha = \alpha_j$ ($j = 1, 2$) будут чисто комплексными нулями $K_j(\alpha)$ ($j = 1, 2$), находящимися в первой четверти, то, следовательно, $\alpha = \bar{\alpha}_j$ ($j = 1, 2$) также будут нулями $K_j(\alpha)$ ($j = 1, 2$) ($\sqrt{\alpha_j^2 - k^2} = \sqrt{\bar{\alpha}_j^2 - k^2}$), а это означает, что $u(x, y)$ будет иметь составляющие в виде приходящей волны из $x \rightarrow +\infty$, что противоречит поставленной задаче. Нетрудно увидеть, что $\bar{u}(\alpha, y)$ на мнимой оси не имеет полюсов.

Чтобы выявить влияние полубесконечного электрода на характер волнового поля в пьезоэлектрике с бесконечным электродом, следует определить асимптотические формулы $w(x, y)$ в далёких точках. Для получения асимптотической формулы, когда $y > h$ при $kr \rightarrow \infty$, перейдя к полярным координатам $y - h = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$ и сделав замену переменных $\lambda_1(\sigma) = \sigma |\cos \theta| - \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta$, $\lambda_2(\sigma) = \sigma |\cos \theta| + \sqrt{k^2 - \sigma^2} \sin \theta$ [5], [11], [13], получим:

$$w(r, \theta) = A^* w_{\text{пов}}(r \cos \theta, r \sin \theta) + A^* D_1^* \frac{e^{i(kr - \frac{\pi}{4})}}{(kr)^{1/2}} + A^* D_1^* \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{(kr)^{3/2}} +$$

$$+A^*D_1^*D_2^*\frac{e^{ikr\sin\theta}}{(kr)^2\cos^2\theta}+O((kr)^{-5/2}) \text{ при } kr \rightarrow \infty \quad (18)$$

$$D_1^* = (4h(1+\mathfrak{a})(1+\frac{(1-e^{-2ikh})}{2ikh}\frac{\mathfrak{a}}{1+\mathfrak{a}}))^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\pi i}{4}}$$

$$D_2^* = \frac{k(i(1-e^{2ikh})(-2ikh(1+\mathfrak{a})+(1+e^{2ikh})\mathfrak{a})-4kh(1+\mathfrak{a}))}{4(1+\mathfrak{a})^2((1-e^{2ikh})\mathfrak{a}+2ikh(1+\mathfrak{a}))^2} \times$$

$$\times((1-e^{2ikh})\mathfrak{a}+2ikh(1+\mathfrak{a}))-4ih^2k^2(1-e^{2ikh})(1+\mathfrak{a})^2$$

А при $|y| < h$, $|kx| \rightarrow \infty$, в случае $kh \neq h_a$ получим

$$w(x, y) = A^*D_1^*w^{(1)}e^{i\sigma_{n1}|x|} + A^*D_1^*w^{(1)}e^{i\sigma_{n2}|x|} + A^*D_1^*A_4^*\frac{e^{ikx}}{(k|x|)^{3/2}} \text{ при } |kx| \rightarrow \infty \quad (19)$$

$$+A^*D_1^*A_5^*\frac{1}{(kx)^2}+O(|kx|^{-5/2})$$

$$A_4^* = \frac{-8k^2h(y-h)\mathfrak{a}+4i(1+\mathfrak{a})e^{-ikh}k\sqrt{k}(y\operatorname{ch}kh+h\operatorname{sh}kh)}{\bar{K}^+(k)\sqrt{2\mathfrak{a}}(2kh\mathfrak{a}-(1+\mathfrak{a})(1-e^{-2kh}))(k-\sigma_n)}$$

$$A_5^* = \frac{ie^{ikh}\sin ky}{(-1+e^{2ikh})\mathfrak{a}-2ikh(1+\mathfrak{a})} \left(\frac{2kh^2(1+\mathfrak{a})}{(-1+e^{2ikh})\mathfrak{a}-2ikh(1+\mathfrak{a})} \right.$$

$$\left. - \frac{(1+e^{2ikh})\mathfrak{a}-2ikh(1+\mathfrak{a})}{2k(1+\mathfrak{a})} - \frac{(1+\mathfrak{a})khe^{iky}+e^{ikh}\mathfrak{a}\sin k(-h+y)}{k(1+\mathfrak{a})\sin ky} \right)$$

А в случае $kh = h_a$,

$$w(x, y) = A^*D_1^*w^{(1)}e^{i\sigma_{n1}|x|} + A^*D_1^*w^{(1)}e^{i\sigma_{n2}|x|} + A^*D_1^*A_3^*\frac{e^{i(k|x|-\frac{\pi}{4})}}{\sqrt{|kx|}} \text{ при } |kx| \rightarrow \infty \quad (20)$$

$$+A^*D_1^*A_4^*\frac{e^{i(k|x|-\frac{\pi}{4})}}{(k|x|)^{3/2}} + A^*D_1^*A_5^*\frac{1}{(kx)^2} + O(|kx|^{-5/2})$$

$$A_3^* = \frac{-\sqrt{2k}k(y-h)\mathfrak{a}+i\sqrt{2k}e^{-kh}(1+\mathfrak{a})\operatorname{sh}kh}{\bar{K}^+(k)4h^2k^2\mathfrak{a}^2(k-\sigma_n)}$$

$$w^{(1)} = -\frac{f(\sigma_{n1})}{\bar{K}^+(\sigma_{n1})(\sigma_{n1}-\sigma_n)K_1'(\sigma_{n1})K_2(\sigma_{n1})}$$

$$w^{(2)} = \begin{cases} -\frac{f(\sigma_{n2})}{\bar{K}^+(\sigma_{n2})(\sigma_{n2}-\sigma_n)K_1'(\sigma_{n2})K_2'(\sigma_{n2})}, & kh > h_a \\ 0, & kh \leq h_a \end{cases}$$

$$f(\sigma) = 2(1 + \alpha)\sqrt{\sigma^2 - k^2} e^{-(\sigma + \sqrt{\sigma^2 - k^2})h} \text{sh}(\sigma h - \sqrt{\sigma^2 - k^2} y) - \\ - 2\alpha\sigma e^{-2\sqrt{\sigma^2 - k^2}h} \text{sh}(\sqrt{\sigma^2 - k^2}(y - h))$$

Из формул (19),(20) следует, что наличие полубесконечного электрода приводит к появлению двух волн с волновыми числами σ_{n1}, σ_{n2} при $kh > h_a$, а при $kh \leq h_a$ распространяется волна с волновым числом σ_{n1} , а также к появлению цилиндрической волны и слагаемого (последний в асимптотиках (19, 20)), имеющего неволновой характер по x при $|kx| \rightarrow \infty$,

Из формулы (18) следует, что наличие полубесконечного электрода при $kh > h_a$ приводит к появлению двух поверхностных волн с волновыми числами σ_{n1}, σ_{n2} , а при $kh \leq h_a$ появляется только поверхностная волна с волновым числом σ_{n1} , а также приводит к появлению цилиндрической волны, у которой четвёртый член в формуле (18) распространяется по направлению луча с углом раствора θ со скоростью $c/\sin \theta$ (или распространяется по направлению y со скоростью c).

В заключении приведём асимптотическую формулу электрической индукции около конца полубесконечного электрода при $-\pi \leq \theta \leq -\pi/2$ и $r = \sqrt{x^2 + (y+h)^2} \rightarrow 0$ $D_0(r, \theta) = D_0 \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1)$, а при $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ и $r \rightarrow 0$

$$D_0(r, \theta) = -iD_0 \frac{\sin(\theta/2)}{r^{1/2}} + O(1),$$

$$\text{где } D_0 = -e_{15}(1 + \alpha)\sqrt{\sigma_n} (e^{-2h\sqrt{\sigma_n^2 - k^2}} - e^{-2h\sigma_n}) \bar{K}^+(\sigma_n) e^{-\frac{i\pi}{4}} / \sqrt{\pi}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Балакирев М.К., Гишинский И.А. Волны в пьезокристаллах. Новосибирск: Наука, 1982. 240с.
2. Б.Нобл. Метод Виннера-Хопфа. М.: ИИЛ, 1962. 279с.
3. Шилов Г.Е. Математический анализ, второй специальный курс. М.: Наука, 1965. 328 с.
4. Функциональный анализ. М.: Наука, 1972. 544с.
5. Григорян Э.Х. Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.//Уч. записки ЕГУ. 1979. №3. С.29-34
6. Агаян К.Л., Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция сдвиговой плоской волны в упругом пространстве с полубесконечным упругим включением. // Изв. НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №4. С.3-17.
7. Григорян Э.Х., Джилаван С.А. Дифракция плоской сдвиговой волны на полубесконечной трещине в пьезоэлектрическом пространстве. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005.Т.58. №1.С.38-50.
8. Григорян Э.Х., Мелкумян А.С. Дифракция сдвиговой плоской волны в пьезоэлектрическом пространстве на краях параллельных полубесконечных металлических слоев. // Изв. НАН Армении. Механика. 2005.Т.58. №3. С.16-28.
9. Григорян Э.Х., Агаян К.Л. Излучение плоской сдвиговой волны из упругого

- волновода в составное упругое пространство.// Изв.НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №3. С.23 – 37.
10. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2009. Т.62. №1. С.40–51.
 11. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. Дифракция сдвиговой плоской электроупругой волны на полубесконечном электроде в пьезоэлектрическом пространстве с щелью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.50–69.
 12. Синанян С.С. Задача линейного источника сдвиговых колебаний в пьезоэлектрическом пространстве с двумя параллельными бесконечными металлическими слоями. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №1. С.70-79.
 13. Григорян Э.Х., Синанян С.С. Дифракция сдвиговой плоской волны на полубесконечном металлическом слое в пьезоэлектрическом пространстве с бесконечным металлическим слоем. // Изв. НАН Армении. Механика. 2010. Т.63. №2. С.56-66.
 14. Агаян К.Л., Григорян Э.Х. О новом методе определения асимптотических формул в задачах дифракции волн.// Доклады НАН РА. 2010. Т. 110. №3. С.261-271.

Сведения об авторах:

Григорян Эдуард Хосровович,

Доктор физ.-мат. наук, профессор ЕГУ

Адрес: Ереван, ул. Алека Манукяна 1, ЕГУ, факультет математики и механики

Тел: (+37410)23-03-89

Синанян Самвел Суренович,

Кандидат физ.-мат. наук, ЕГУ

Тел: (+37410)65-21-06

E-mail: ssinanyan@mail.ru

Поступила в редакцию 23.12.2011