

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ТОЛЩИНЫ, ИЗГОТОВЛЕННОЙ ИЗ КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ИЗГИБЕ**

**Белубекян Э.В., Погосян А.Г., Аветисян Г.Р.**

**Ключевые слова:** оптимизация, композиционный материал, нагрузка, изгиб, пластинка.  
**Keywords:** optimization, composite material, load, bending, plate.

**Բելուբեկյան Է.Վ., Պոգոսյան Ա.Գ., Ավետիսյան Հ.Ռ.**

**Կտոր առ կտոր հաստատուն հաստության ուղղանկյուն սալի լավարկումը ծռման դեպքում**

Դիտարկվում են կոմպոզիցիոն նյութից պատրաստված կտոր առ կտոր հաստատուն հաստության ուղղանկյուն սալի ծռումը, որն ազատ հենված է երկու հանդիպակաց կողմերով, իսկ ճակատային կողմերը ազատ են, հողակապորեն կամ կոշտ ամրացված: Որոշվում են սալի երկրաչափական և ֆիզիկական պարամետրերի լավարկային արժեքները, որոնք նրա հաստատուն կշռի և ընդհանուր չափերի դեպքում ապահովում են ձկվածքի փոքրագույն արժեքը:

**Belubekyan E.V., Poghosyan A.G., Avetisyan H.R.**

**Optimization of a rectangular plate piecewise constant thickness when bending, prepared from the composite material**

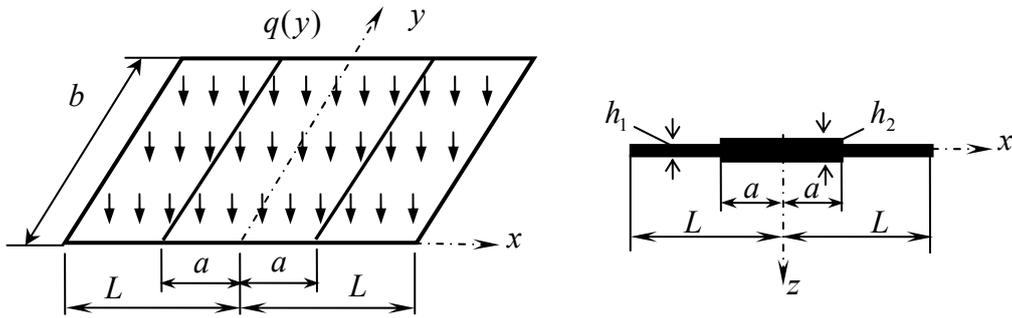
The bending of the rectangular plate of the piecewise constant thickness, prepared from the composite material, rectangular plate, hinge supported on two opposite longitudinal sides and free, hinge or clamped supported on the end edges are examined.

The optimum values of the geometric and physical parameters of the plates ensuring the minimum value of the maximum deflection with the fixed weight, equal to the weight of the plate of constant thickness, and given the overall dimensions are determined.

Рассматривается изгиб прямоугольной пластинки кусочно-постоянной толщины, изготовленной из композиционного материала, шарнирно опертой по двум противоположным продольным сторонам и свободной, свободно опертой или заделанной по торцевым краям, под действием поперечной нагрузки.

Определяются оптимальные значения геометрических и физических параметров пластинки, обеспечивающие минимальное значение прогиба при постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины, и её заданных габаритных размерах.

Рассматривается изгиб прямоугольной пластинки размерами  $2L \times b$ , шарнирно опертой по сторонам  $y = 0$  и  $y = b$  и свободной, свободно опертой или заделанной по краям  $x = \pm L$ , под действием поперечной нагрузки  $q(y)$ . Предполагается, что пластинка изготовлена из композиционного материала (КМ) путём поочерёдной укладки его монослоев под углом  $\pm\varphi$  к оси  $x$  пластинки, причём на участке  $-a \leq x \leq a$  пластинка имеет толщину  $h_2$ , а на участках  $-L \leq x \leq -a$  и  $a \leq x \leq L$  – толщину  $h_1$  (фиг.1).



Фиг. 1. Расчётная схема пластинки

Ставится задача определения оптимальных значений параметров  $a$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $\varphi$ , обеспечивающих минимальное значение наибольшего прогиба при её постоянном весе, равном весу пластинки постоянной толщины  $h_0$ , и заданных габаритных размерах  $\xi = 2L/b$ .

Постоянству веса конструкции соответствует условие

$$L(h_0 - h_1) = a(h_2 - h_1) \quad (1)$$

Задача изгиба решается для каждой из областей пластинки ( $p=1, 2$ ), соответствующих толщинам  $h_1$  и  $h_2$ , с удовлетворением условий сопряжения на линии их раздела. При этом, ввиду симметрии, рассматривается половина пластинки ( $x \geq 0$ ).

Принятая структура пакета пластинки позволяет считать её ортотропной, для которой уравнения изгиба записываются в виде:

$$D_{11}^{(p)} \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^4} + 2(D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}) \frac{\partial^4 w_p}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22}^{(p)} \frac{\partial^4 w_p}{\partial y^4} = q(y) \quad (p=1, 2), \quad (2)$$

где  $w_p$  – прогибы,  $D_{ik}^{(p)}$  – жёсткости составляющих участков пластинки ( $p=1, 2$ ).

$$D_{ik}^{(p)} = \frac{B_{ik} h_p^3}{12}, \quad (i, k = 1, 2, 6), \quad p = 1, 2,$$

$B_{ik}$  – упругие характеристики КМ в главных геометрических направлениях пластинки, определяемые через его характеристики в главных физических направлениях  $B_{ik}^0$  по известным формулам поворота [1].

Граничные условия запишутся в виде:

– шарнирного опирания

$$w_p = 0, \quad \frac{\partial^2 w_p}{\partial y^2} = 0 \quad (p=1, 2) \quad \text{при} \quad y=0, \quad y=b, \quad (3)$$

– симметрии

$$\frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} = 0 \quad \text{при} \quad x=0, \quad (4)$$

– свободного края (в случае, когда край  $x=L$  свободен)

$$D_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + D_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = 0,$$

$$D_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (D_{12}^{(1)} + 4D_{66}^{(1)}) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = L, \quad (5)$$

– свободного опирания (в случае когда край  $x = L$  свободно оперт)

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = L, \quad (6)$$

– жёсткой заделки (в случае жёсткой заделки края  $x = L$ )

$$w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0 \quad \text{при } x = L, \quad (7)$$

– сопряжения

$$w_1 = w_2, \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial w_2}{\partial x},$$

$$D_{11}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + D_{12}^{(1)} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} = D_{11}^{(2)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + D_{12}^{(2)} \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}, \quad (8)$$

$$D_{11}^{(1)} \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} + (D_{12}^{(1)} + 4D_{66}^{(1)}) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial y^2} = D_{11}^{(2)} \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^3} + (D_{12}^{(2)} + 4D_{66}^{(2)}) \frac{\partial^3 w_2}{\partial x \partial y^2} \quad \text{при } x = a.$$

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), представляется в виде:

$$w_p(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^{(p)}(x) \sin \lambda_k y, \quad \lambda_k = \frac{\pi k}{b}. \quad (9)$$

Разлагая функцию нагрузки в ряд:

$$q(y) = \sum_1^{\infty} q_k \sin \lambda_k y, \quad q_k = \frac{2}{b} \int_0^b q(y) \sin \lambda_k y dy, \quad (10)$$

для функции  $w_k^{(p)}$ , в зависимости от значения  $D^{(p)} = (D_3^{(p)})^2 - D_{11}^{(p)} D_{22}^{(p)}$ , где  $D_3^{(p)} = D_{12}^{(p)} + 2D_{66}^{(p)}$ , получаются следующие выражения:

– при  $D^{(p)} < 0$

$$w_k^{(p)}(x) = \frac{q_k}{D_k^{(p)} \lambda_k^4} + C_{1k}^{(p)} \operatorname{ch} \alpha_{1k}^{(p)} \lambda_k x \cos \alpha_{2k}^{(p)} \lambda_k x + C_{2k}^{(p)} \operatorname{ch} \alpha_{1k}^{(p)} \lambda_k x \sin \alpha_{2k}^{(p)} \lambda_k x +$$

$$+ C_{3k}^{(p)} \operatorname{sh} \alpha_{1k}^{(p)} \lambda_k x \cos \alpha_{2k}^{(p)} \lambda_k x + C_{4k}^{(p)} \operatorname{sh} \alpha_{1k}^{(p)} \lambda_k x \sin \alpha_{2k}^{(p)} \lambda_k x, \quad (11)$$

где

$$\alpha_{1k}^{(p)} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}^{(p)} D_{22}^{(p)} + D_3^{(p)}}}{2D_{11}^{(p)}}}, \quad \alpha_{2k}^{(p)} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_{11}^{(p)} D_{22}^{(p)} - D_3^{(p)}}}{2D_{11}^{(p)}}}.$$

– при  $D^{(p)} = 0$

$$w_k^{(p)}(x) = \frac{q_k}{D_k^{(p)} \lambda_k^4} + C_{1k}^{(p)} \operatorname{ch} \alpha_0^{(p)} \lambda_k x + C_{2k}^{(p)} x \operatorname{ch} \alpha_0^{(p)} \lambda_k x +$$

$$+ C_{3k}^{(p)} \operatorname{sh} \alpha_0^{(p)} \lambda_k x + C_{4k}^{(p)} x \operatorname{sh} \alpha_0^{(p)} \lambda_k x, \quad (12)$$

где

$$\alpha_0^{(p)} = \sqrt{\frac{D_3^{(p)}}{D_{11}^{(p)}}},$$

– при  $D^{(p)} > 0$

$$w_k^{(p)}(x) = \frac{q_k}{D_k^{(p)}\lambda_k^4} + C_{1k}^{(p)} \operatorname{ch}\mu_{1k}^{(p)}\lambda_k x + C_{2k}^{(p)} \operatorname{ch}\mu_{2k}^{(p)}\lambda_k x + C_{3k}^{(p)} \operatorname{sh}\mu_{1k}^{(p)}\lambda_k x + C_{4k}^{(p)} \operatorname{sh}\mu_{2k}^{(p)}\lambda_k x, \quad (13)$$

где

$$\mu_{1k}^{(p)} = \sqrt{\frac{D_3^{(p)} + \sqrt{(D_3^{(p)})^2 - D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}}}{D_{11}^{(p)}}}, \quad \mu_{2k}^{(p)} = \sqrt{\frac{D_3^{(p)} - \sqrt{(D_3^{(p)})^2 - D_{11}^{(p)}D_{22}^{(p)}}}{D_{11}^{(p)}}}.$$

Постоянные коэффициенты  $C_{im}^{(p)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) определяются из удовлетворения соответствующим граничным условиям: (4), (5) и (8) – для свободного края пластинки, (4), (6) и (8) – для свободно опертого края и (4), (7) и (8) – для заделанного края.

После определения коэффициентов  $C_{im}^{(p)}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $p = 1, 2$ ) значения прогибов определяются по формуле (9).

Поставленная задача оптимизации приводится к определению параметров  $a$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $\varphi$ , при которых наибольшие прогибы, определяемое формулой (9), при неизменном весе конструкции достигают наименьшего значения.

Определение оптимальных параметров конструкции сводится к следующей задаче нелинейного программирования:

Найти

$$\min_x \max_p w_p, \quad \bar{x} = \{a, h_1, h_2, \varphi\}, \quad (p = 1, 2), \quad (14)$$

при ограничениях:

$$h_2 = \frac{L}{a}(h_0 - h_1) + h_1, \quad (15)$$

$$0.01\delta_1 \leq h_1 \leq 0.2\delta_1, \quad 0.01\delta_2 \leq h_2 \leq 0.2\delta_2. \quad (16)$$

Ограничение (15) следует из условия постоянства веса пластинки (1), а ограничения в виде неравенств (16) обусловлены пределами применимости классической теории пластин. Здесь принимается:  $\delta_1 = L - a$  при  $L - a \leq b$ ,  $\delta_1 = b$  при  $L - a \geq b$ ,  $\delta_2 = 2a$  при  $2a \leq b$ ,  $\delta_2 = b$  при  $2a \geq b$ .

Задача решается методом Недлера-Мида [2] в сочетании с методом прямого поиска.

Числовые расчёты произведены для случаев свободного, шарнирно опертого и заделанного края  $x = L$  пластинки, толщиной  $\bar{h}_0 = h_0 / b = 0.02$ , под действием нагрузки  $q(y) = q_0 = \text{const}$  при различных значениях  $\xi$ .

В качестве материала принят КМ со следующими характеристиками:

$$\bar{B}_{11}^0 = 1; \quad \bar{B}_{22}^0 = B_{22}^0 / B_{11}^0 = 0.6164; \quad \bar{B}_{12}^0 = B_{12}^0 / B_{11}^0 = 0.12;$$

$$\bar{B}_{66}^0 = B_{66}^0 / B_{11}^0 = 0.1572; \quad G_{23} / G_{13} = 1; \quad E_1 / B_{11}^0 = 0.9875; \quad G_{23} / B_{11}^0 = 0.1572.$$

Для случая свободного края  $x = L$  ( $\bar{x} = x/2L = 1/2$ ) пластинки вычислены оптимальные значения параметров  $\bar{a} = a/2L$ ,  $\bar{h}_1 = h_1/b$ ,  $\bar{h}_2 = h_2/b$ ,  $\varphi$ , обеспечивающие наименьшее значение наибольшего прогиба  $\max_p \bar{w}_p = w_p \frac{D_0}{q_k b^4}$ ,

( $p = 1, 2$ ) пластинки, где  $D_0 = \frac{B_{11}^0 h_0^3}{12}$ , и соответствующие наибольшие прогибы на

каждом из ее участков  $\bar{w}_1, \bar{w}_2$ , которые получаются в середине ( $x = 0$ ) и на краю пластинки ( $x = L$ ). Полученные результаты приведены в табл.1. Там же, для сравнения, приведены значения приведённых прогибов  $\bar{w}_0$ , которые получаются при  $\varphi = 90^\circ$  в середине и на краях для равной по весу пластинки постоянной толщины  $h_0$ .

В табл. 2 приведены оптимальные значения параметров пластинки для случая свободно опертого края  $x = L$  пластинки, а также наибольшие значения прогибов  $\bar{w}_1, \bar{w}_2$  на каждом из участков и соответствующие им координаты  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ . Для сравнения приведены значения прогибов  $\bar{w}_0$  и углов укладки  $\Phi_0$  монослоев для сплошной пластинки, которые получаются в середине пластинки.

Аналогичные расчёты произведены для случая заделанного края. Полученные результаты приведены в табл. 3.

Таблица 1

Оптимальные параметры пластинки для случая свободного края

$\xi$	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\varphi$	$\bar{w}_2 \cdot 10^2$	$\bar{w}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w}_{z=0}^0 \cdot 10^2$	$\bar{w}_{z=1/2}^0 \cdot 10^2$
0.5	0.2145	0.0275	0.01002	$90^\circ$	0.9205	0.8898	1.3078	1.3692
0.75	0.278	0.0325	0.01002	$90^\circ$	0.9088	0.7302	1.2903	1.3953
1.0	0.328	0.035	0.01236	$90^\circ$	1.1862	0.7493	1.2794	1.4138
1.5	0.416	0.022	0.01959	$90^\circ$	1.3177	1.3173	1.2770	1.4289
2.0	0.445	0.022	0.01975	$90^\circ$	1.3257	1.3175	1.2853	1.4313
2.5	0.448	0.022	0.0198	$90^\circ$	1.3273	1.3269	1.2933	1.4313
3.0	0.458	0.0215	0.01986	$90^\circ$	1.3264	1.3266	1.2982	1.4312
5.0	0.457	0.021	0.01991	$90^\circ$	1.3209	1.3206	1.3022	1.4312

Таблица 2

Оптимальные параметры пластинки для случая свободно опертого края

$\xi$	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\Phi$	$\bar{x}_2$	$\bar{w}_2 \cdot 10^2$	$\bar{x}_1$	$\bar{w}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w}^0 \cdot 10^2$	$\Phi_0$
0.5	0.363	0.013	0.0229	0°	0	0.0632	0.364	0.03190	0.07738	0°
0.75	0.428	0.011	0.0216	45°	0	0.2444	0.339	0.07174	0.26338	45°
1.0	0.123	0.011	0.0491	90°	0.123	0.2478	0.274	0.29940	0.50050	45°
1.5	0.079	0.015	0.0469	90°	0.079	0.3759	0.267	0.53129	0.97337	55°
2.0	0.056	0.017	0.0440	90°	0.056	0.5059	0.265	0.82319	1.23813	90°
2.5	0.039	0.019	0.0379	90°	0.039	0.7321	0.246	1.06270	1.29815	90°
3.0	0.030	0.019	0.0357	90°	0.030	0.8226	0.245	1.20790	1.31217	90°
5.0	0	0.020	0.0200	90°	0	1.30737	0	1.30737	1.30737	90°

Таблица 3

Оптимальные параметры пластинки для случая заделанного края

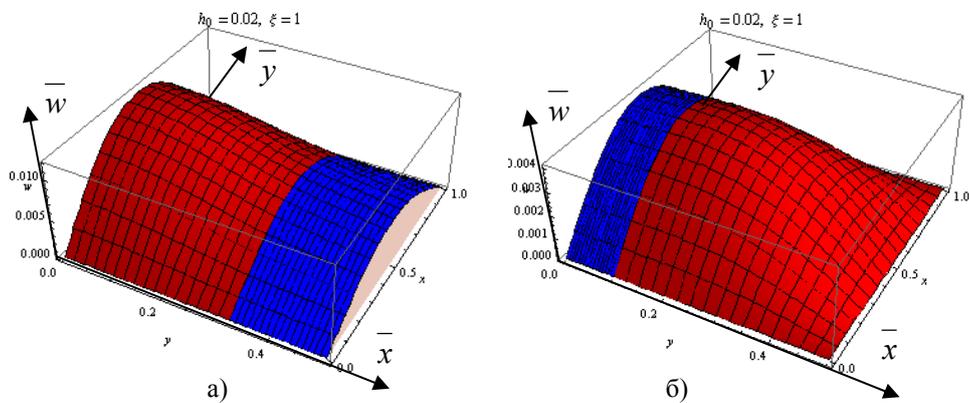
$\xi$	$\bar{a}$	$\bar{h}_1$	$\bar{h}_2$	$\Phi$	$\bar{x}_2$	$\bar{w}_2 \cdot 10^2$	$\bar{x}_1$	$\bar{w}_1 \cdot 10^2$	$\bar{w}^0 \cdot 10^2$	$\Phi_0$
0.5	0.245	0.0255	0.0143	0°	0	0.01433	0.25	0.0068	0.01671	0°
0.75	0.317	0.0275	0.0157	0°	0	0.06702	0.32	0.0157	0.08452	0°
1.0	0.125	0.0100	0.0500	90°	0.13	0.19210	0.220	0.2028	0.24063	0°
1.5	0.084	0.0140	0.0499	90°	0.08	0.26556	0.250	0.3502	0.70729	45°
2.0	0.059	0.0165	0.0464	90°	0.06	0.39689	0.230	0.5964	1.10027	90°
2.5	0.046	0.0175	0.0449	90°	0.05	0.47466	0.230	0.8608	1.24331	90°
3.0	0.034	0.0185	0.0406	90°	0.03	0.63010	0.230	1.0703	1.29517	90°
5.0	0	0.0200	0.0200	90°	0	1.3059	0	1.3059	1.30590	90°

Как следует из табл.1, для случая свободного края оптимальным является проект, где в средней части толщина пластинки меньше, чем по краям ( $\bar{h}_2 < \bar{h}_1$ ). При этом, по сравнению с пластинкой постоянной толщины при  $\xi = 0.5$  прогиб уменьшается почти на 34% , а при  $\xi = 5$  – на 8%.

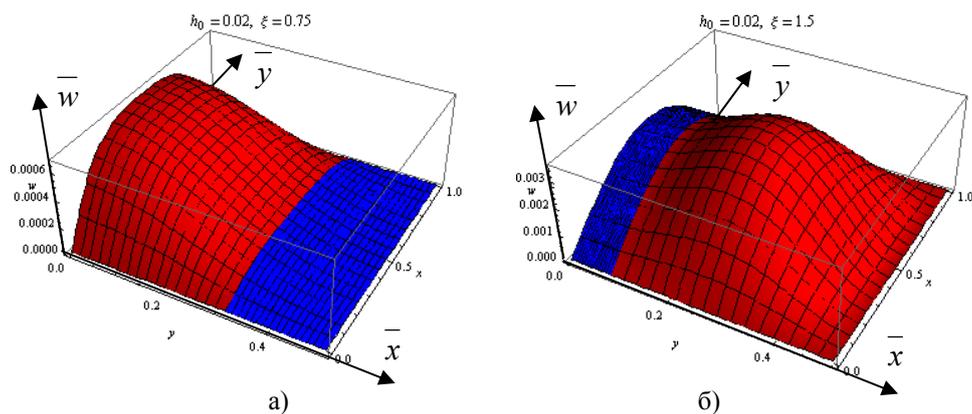
В случае свободно опертого края  $x = L$  пластинки (табл. 2), в средней части пластинка имеет большую толщину, чем по краям ( $\bar{h}_2 > \bar{h}_1$ ), а наибольшее уменьшение прогибов по сравнению с пластинкой постоянной толщины ( $\xi = 1$ ) составляет 40%, при увеличении длины пластинки значения прогибов приближаются к значениям, полученным для пластинки постоянной толщины, а при  $\xi = 5$  они совпадают.

В случае заделанного края  $x = L$  пластинки (табл. 3) получается, что при  $\xi \geq 1$  в средней части пластинка имеет большую толщину, чем по краям ( $\bar{h}_2 > \bar{h}_1$ ), а при  $\xi < 1$ ,  $\bar{h}_2 < \bar{h}_1$ . Наибольшее уменьшение прогибов по сравнению с пластинкой постоянной толщины получается при  $\xi = 1.5$  и составляет 50%, а при увеличении длины пластинки значения прогибов приближаются к значениям, полученным для пластинки постоянной толщины.

На фиг.1, 2 для некоторых значений параметров  $\bar{h}_0$  и  $\xi$  пластинки приведены эпюры прогибов для различных случаев закрепления её краев.



Фиг.1. Эпюры прогибов пластинки: а – в случае свободного края  $x = L$ , б – в случае свободно опёртого края  $x = L$



Фиг. 2. Эпюры прогибов пластинки в случае заделанного края  $x = L$ , а – при  $\xi = 0,75$ , б – при  $\xi = 1,5$

Из приведённых эпюр также видно, что в случае свободного края  $x = L$  пластинки, толщина пластинки в средней её части получается меньше, чем по краям (фиг.1,а), а в случае свободно опёртого края (фиг.1,б) толщина пластинки больше в её средней части.

В случае заделанного края  $x = L$  пластинки (фиг.2) в зависимости от значения параметра  $\xi$ , пластинка может иметь большую толщину как в средней части ( $\xi \leq 1$ ), так и по краям ( $\xi > 1$ ).

Следует отметить, что, как видно из приведённых таблиц, при увеличении длины пластинки (параметра  $\xi$ ) оптимальный проект приближается к случаю пластинки постоянной толщины, а условия закрепления её торцевых краев практически не влияют на жёсткость пластинки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1987. 360с.
2. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 532с.

#### **Сведения об авторах:**

**Белубекян Эрнест Вагаршакович** – доктор технических наук, зав.кафедрой сопротивления материалов ЕГУАС, тел.: (091) 43 11 94,  
e-mail: [ebelubekyan@yahoo.com](mailto:ebelubekyan@yahoo.com)

**Погосян Аревшат Гургенович** – кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры АЯП ЕГИУА, тел.: (099) 66 23 35,  
e-mail: [roba@seua.am](mailto:roba@seua.am)

**Аветисян Грайр Робертович** – зав. лабораторией каф. АЯП ЕГИУА, тел.: 34 87 12,  
e-mail: [roba@seua.am](mailto:roba@seua.am)

Поступила в редакцию 18.11.2011