ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 65, №1, 2012 Механика

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ МИКРОПОЛЯРНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ (ОРТОТРОПНЫХ) УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК

Маргарян Л. М., Саркисян С. О.

Ключевые слова: динамика, микрополярный, ортотропный, упругий, тонкий, балка, модель.
Key words: dynamics, micropolar, orthotropic, elastic, thin, bar, model.

Մարգարյան Լ.Մ., Սարգսյան Ս.Հ.
Միկրոպոլյար անիզոտրոպ (օրթոտրոպ) առաձգական բարակ ձողերի դինամիկայի մաթեմատիկական մոդելները

Այս աշխատանքում ասիմպտոտիկ հիմնավորվածություն ունեցող վարկածների մեթոդի հիման վրա, կախված ֆիզիկական անչափ պարամետրերի ընդունած արժեքներից, կառուցված են միկրոպոլյար անիզոտրոպ (օրթոտրոպ) առաձգական բարակ ձողերի ազատ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, «փոքր սահքային կոշտության» դինամիկական մոդելները: Կառուցված մոդելներում լիովին հաշվի են առնված ընդլայնական սահքային դեֆորմացիաները: Կառուցված մոդելների հիման վրա դիտարկված է հոդակապորեն հենված միկրոպոլյար օրթոտրոպ առաձգական բարակ ձողի ազատ տատանումների խնդիրը:

Margaryan L.M., Sargsyan S.H.
Mathematical Models of Dynamics of Micropolar Anisotropic (Orthotropic) Elastic Thin Bars

In the present paper on the basis of asymptotically confirmed hypotheses method, depending on the values of dimensionless physical parameters, dynamic models of micropolar elastic anisotropic (orthotropic) thin bars with free fields of displacements and rotations, with constrained rotation and with “small shift rigidity” are constructed. Transverse shift and related deformations are completely taken into account in the constructed models of micropolar bars. On the basis of these models problem of determination of frequencies of free oscillations of hinged-supported micropolar orthotropic elastic thin bar is studied.

В работе на основе метода гипотез, имеющего асимптотическое обоснование, в зависимости от значений физических безразмерных параметров построены динамические модели микрополярных анизотропных (ортотропных) упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, со стесненным вращением и “с малой сдвиговой жесткостью”. В построенных моделях микрополярных балок полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации. На основе построенных моделей изучена задача об определении частот свободных колебаний шарнирно-опертой микрополярной ортотропной упругой тонкой балки.

1. Введение. Современные достижения в области микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек изложены в обзорных работах [1], [2]. Основная проблема общей теории микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек заключается в приближённом, но адекватном сведении начально-граничной задачи микрополярной теории упругости к прикладной одномерной или двумерной модели. В работах [3],[4] на основе метода гипотез, который имеет асимптотическое подтверждение, построены модели динамики микрополярных изотропных упругих тонких пластин и оболочек, когда полностью учтены поперечные сдвиговые и родственные им деформации. В работе [5] этим же подходом построена прикладная модель статической деформации микрополярных упругих тонких балок. В работе [6] изучено асимптотическое поведение решения плоской начально-граничной задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала в тонкой области прямоугольника, построена внутренняя задача, погранслои по координатам и по времени, рассмотрена задача о сращивании внутренней и погранслойных задач.

В данной работе, имея в виду качественные стороны асимптотического решения начально-краевой задачи плоской микрополярной теории упругости [6], развивается подход работ [3]-[5], формулируются гипотезы, при помощи которых построены прикладные одномерные динамические модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, со стеснённым вращением, “с малой сдвиговой жёсткостью”.

2. Основные уравнения, граничные и начальные условия плоской динамической задачи микрополярной теории упругости для ортотропного прямоугольника.

Рассмотрим микрополярный ортотропный упругий параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины a и постоянной толщины, равной 1. Будем считать, что в параллелепипеде по направлению оси x_2 осуществлено плоское напряжённое состояние. Основные уравнения плоской динамической задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала имеют следующий вид [7]:

уравнения движения:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2}=\rho\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2},\quad \frac{\partial\mu_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}}{\partial x_2}+\sigma_{12}-\sigma_{21}=I\frac{\partial^2\omega_3}{\partial t^2};\quad (1)$$

соотношения упругости:

$$\sigma_{11}=A_{11}\varepsilon_{11}+A_{12}\varepsilon_{22},\ \sigma_{22}=A_{12}\varepsilon_{11}+A_{22}\varepsilon_{22},\ \sigma_{12}=A_{77}\varepsilon_{12}+A_{78}\varepsilon_{21},\ ,$$

$$\sigma_{21}=A_{78}\varepsilon_{12}+A_{88}\varepsilon_{21},\ \mu_{13}=B_{66}\chi_{13},\ \mu_{23}=B_{44}\chi_{23},\quad (2)$$

либо в обратной форме

$$\varepsilon_{11}=\frac{A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{11}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{22},\ \varepsilon_{22}=\frac{A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{22}-\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}\sigma_{11},$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{A_{88}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{12}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{21},\ \varepsilon_{21}=\frac{A_{77}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{21}-\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}{}^2}\sigma_{12},\quad (3)$$

$$\chi_{13}=\frac{1}{B_{66}}\mu_{13},\ \chi_{23}=\frac{1}{B_{44}}\mu_{23};$$

геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad \varepsilon_{12}=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3,\ \varepsilon_{21}=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3,\ \chi_{13}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1},\ \chi_{23}=\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}.\quad (4)$$

Здесь $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ – силовые напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения; u_1, u_2 – перемещения, а ω_3 – независимый поворот точек прямоугольника; $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{77}, A_{78}, A_{88}, B_{66}, B_{44}$ – упругие коэффициенты микрополярного ортотропного материала; ρ – плотность этого материала; I – мера инерции при вращении; $0\le x_1\le a,\ -h\le x_2\le h$.

К определяющим уравнениям (1)-(4) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости присоединим соответствующие граничные и начальные условия. На лицевых сторонах прямоугольника $x_2=\pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия (будем изучать задачу изгиба):

$$\sigma_{21}\Big|_{x_2=\pm h}=\frac{1}{2}\left(X^+-X^-\right),\ \sigma_{22}\Big|_{x_2=\pm h}=\pm\frac{1}{2}\left(Y^++Y^-\right),\ \mu_{23}\Big|_{x_2=\pm h}=\pm\frac{1}{2}\left(M^++M^-\right)\quad (5)$$

На боковой кромке прямоугольника $x_1=0$ (аналогично на $x_1=a$) примем следующие варианты граничных условий несимметричной теории упругости:

1-ая граничная задача: $\sigma_{11}\Big|_{x_1=0}=\varphi_1(x_2),\ \sigma_{12}\Big|_{x_1=0}=\varphi_2(x_2),\ \mu_{13}\Big|_{x_1=0}=\varphi_3(x_2)$ (6)

2-ая граничная задача: $u_1\Big|_{x_1=0}=0,\quad u_2\Big|_{x_1=0}=0,\quad \omega_3\Big|_{x_1=0}=0$ (7)

3-я граничная задача: $\sigma_{11}\Big|_{x_1=0}=\varphi_1(x_2),\quad u_2\Big|_{x_1=0}=0,\quad \mu_{13}\Big|_{x_1=0}=\varphi_3(x_2)$ (8)

Начальные условия при $t=0$:

$$u_1\big|_{t=0}=f_1(x_1,x_2)\ ,\quad u_2\big|_{t=0}=f_2(x_1,x_2)\ ,\quad \omega_3\big|_{t=0}=\varphi_3(x_1,x_2)\ ,$$
$$\frac{\partial u_1}{\partial t}\bigg|_{t=0}=F_1(x_1,x_2),\quad \frac{\partial u_2}{\partial t}\bigg|_{t=0}=F_2(x_1,x_2),\quad \frac{\partial \omega_3}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\Phi_3(x_1,x_2). \tag{9}$$

Вводим также следующие безразмерные физические параметры:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\ \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2},\ \frac{A_{11}(A_{88}-A_{78})}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\ \frac{A_{11}(A_{77}-A_{78})}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},$$
$$\frac{A_{11}(A_{88}+A_{78})}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\ \frac{A_{11}(A_{77}+A_{78})}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2},\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}},\ \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}. \tag{10}$$

В дальнейшем вышеуказанные уравнения (1)-(4), граничные условия (5)-(8) и начальные условия (9) плоской динамической задачи микрополярной теории упругости будем рассматривать в тонкой прямоугольной области: $2h<<a,\ h/a=\delta<<1$.

3. Математическая модель динамики микрополярной ортотропной упругой тонкой балки с независимыми полями перемещений и вращений.

Рассмотрим случай, когда безразмерные физические параметры (10) имеют следующие значения:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}(A_{88}-A_{78})}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,$$
$$\frac{A_{11}(A_{77}-A_{78})}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}(A_{88}+A_{78})}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}(A_{77}+A_{78})}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim 1,\ \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim 1. \tag{11}$$

На основе асимптотического анализа [6] начально-граничной задачи (1)-(9) в тонкой прямоугольной области, в основу предлагаемой ниже теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений ставим следующие предположения (гипотезы) [3]-[5]:

а) в процессе деформации первоначально прямолинейный и нормальный к оси симметрии прямоугольника x_2 элемент свободно поворачивается как жёсткое целое на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины и не оставаясь перпендикулярным к деформированной оси.

Принятую гипотезу математически запишем так:

$$u_1=x_2\Psi_1(x_1,t),\quad u_2=w(x_1,t),\quad \omega_3=\Omega_3(x_1,t). \tag{12}$$

Отметим, что с точки зрения перемещений, гипотеза (12), по сути дела, представляет собой кинематическую гипотезу Тимошенко в классической теории упругих балок [8]. Гипотезу (12), в целом, как в работах [3]-[5], назовём обобщённой кинематической гипотезой Тимошенко в микрополярной теории балок;

б) при определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для силового напряжения σ_{21} примем:

$$\sigma_{21}=\overset{0}{\sigma}_{21}(x_1,t). \tag{13}$$

После вычисления указанных величин, значение σ_{21} окончательно определим как сумму значения (13) и результата интегрирования первого уравнения движения из

(1), для которого потребуем условие, чтобы усреднённое по высоте прямоугольника величина была равна нулю;

в) в соотношениях упругости (3) можно пренебрегать силовым напряжением σ_{22} относительно силового напряжения σ_{11}.

С целью приведения двумерной динамической задачи (1)-(9) к прикладной одномерной, в теории микрополярных балок вместо компонент тензоров силовых и моментных напряжений вводим эквивалентные им интегральные по высоте прямоугольника характеристики- усилия и моменты:

$$N_{12}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dx_2, \quad N_{21}=\int_{-h}^{h}\sigma_{21}dx_2, \quad L_{13}=\int_{-h}^{h}\mu_{13}dx_2, \quad M_{11}=\int_{-h}^{h}\sigma_{11}x_2dx_2. \tag{14}$$

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных упругих ортотропных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

уравнения движения:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-N_{21}=-h\left(X^+-X^-\right)+\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}=-(Y^++Y^-)+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$
$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^++M^-)+2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}. \tag{15}$$

соотношения упругости:

$$M_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}{}^2}{A_{22}}K_{11}, \quad N_{12}=2h\left(A_{77}\Gamma_{12}+A_{78}\Gamma_{21}\right),$$
$$N_{21}=2h\left(A_{78}\Gamma_{12}+A_{88}\Gamma_{21}\right), \quad L_{13}=2hB_{66}k_{13}. \tag{16}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}, \quad \Gamma_{12}=\frac{\partial w}{\partial x_1}-\Omega_3, \quad \Gamma_{21}=\Psi_1+\Omega_3, \quad k_{13}=\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1}. \tag{17}$$

Граничные условия на торце балки $x_1=0\left(x_1=a\right)$ имеют вид:

$$M_{11}=M_{11}{}^* \text{ или } \Psi_1=\Psi^*{}_1, \quad N_{12}=N_{12}{}^* \text{ или } w=w^*, \quad L_{13}=L_{13}{}^* \text{ или } \Omega_3=\Omega_3{}^*. \tag{18}$$

Начальные условия при $t=0$ необходимо ставить для $w, \frac{\partial w}{\partial t}, \Omega_3, \frac{\partial\Omega_3}{\partial t}, \Psi_1, \frac{\partial\Psi_1}{\partial t}$.

В модели (15)-(18) микрополярных балок с независимыми полями перемещений и вращений полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Как показывает асимптотический метод [6] интегрирования начально-краевой задачи (1)-(9), в модели одномерных уравнений (15)-(18) микрополярной балки возможно некоторое упрощение, согласно этому в первом уравнении движения из (15) можем пренебрегать членом, связанным с изгибающим моментом M_{11}, и соответствующим инерционным моментом $\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2}$ (отметим, что в поперечных сечениях балки кроме изгибающего момента M_{11} действует также и изгибающий момент L_{13}). Назовём эту модель упрощённой моделью микрополярных балок.

Для получения одномерных уравнений классической теории Тимошенко для ортотропной балки (с незначительным отличием, связанным с нашей гипотезой б)), в уравнениях (15)-(17) следует подставить $B_{66}=0, \ I=0$ (вследствие этого получаются также следующие условия, наложенные для физических параметров: $A_{77} = A_{88} = A_{78} = A$).

Если в модели (15)-(18) микрополярной балки будем пренебрегать поперечными сдвигами, т.е. если будем считать

$$\Psi_1 = -\frac{\partial w}{\partial x_1}, \tag{19}$$

то приходим к модели микрополярных балок, когда нормальный элемент поворачивается, оставаясь перпендикулярным к деформированной оси балки. Формула (19) означает, что будем руководствоваться вместо обобщённой кинематической гипотезы а) Тимошенко, обобщённой гипотезой Бернулли для микрополярных балок (т.е. наряду с (19) будем считать справедливым формулы (12)).

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных упругих ортотропных тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, когда в основу принимается обобщённая кинематическая гипотеза Бернулли, будет иметь вид:

уравнения движения:

$$\begin{gathered} \frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h\left(X^+ - X^-\right) - \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + N_{12} - N_{21} = -(M^+ + M^-) + 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}. \end{gathered} \tag{20}$$

соотношения упругости:

$$\begin{gathered} M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}{A_{22}}K_{11}, \qquad N_{12} = 2h\left(A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}\right), \\ N_{21} = 2h\left(A_{78}\Gamma_{12} + A_{88}\Gamma_{21}\right), \qquad L_{13} = 2hB_{66}k_{13}. \end{gathered} \tag{21}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \quad \Gamma_{21} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_3, \quad k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}. \tag{22}$$

К этой системе уравнений микрополярных балок с независимыми полями перемещений и вращений следует присоединить граничные условия (18) с учетом (19) и соответствующие начальные условия.

Для получения одномерных уравнений классической теории ортотропной балки Бернулли в уравнениях (20)-(22) следует подставить $B_{66} = 0,\ I = 0$ (одновременно, вследствие этого опять получаются следующие условия для физических параметров: $A_{77} = A_{88} = A_{78} = A$).

4. Математическая модель микрополярной ортотропной упругой тонкой балки со стесненным вращением.

Рассмотрим случай, когда физические безразмерные параметры (10) имеют следующие значения:

$$\begin{gathered} \frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}{}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2} \sim 1, \quad \frac{A_{11}\left(A_{88} - A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}{}^2} \sim 1, \\ \frac{A_{11}\left(A_{77} - A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}{}^2} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} \sim 1, \quad \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} \sim 1. \end{gathered} \tag{23}$$

Кроме (23), предположим ещё, что следующие выражения от физических констант материала балки

$$\frac{A_{77}A_{88}-A_{78}^{2}}{A_{11}\left(A_{88}+A_{78}\right)},\quad \frac{A_{77}A_{88}-A_{78}^{2}}{A_{11}\left(A_{77}+A_{78}\right)} \tag{24}$$

имеют весьма большие значения (в изотропном случае это условие эквивалентно требованию: $\alpha >> \mu$ либо $\alpha \to \infty$ [5]).

С учётом качественных результатов асимптотического решения начально-граничной задачи (1)-(9) при наличии условий (23), (24) (отметим, что в этом случае [6] вращения точек прямоугольника связаны с перемещениями как в классической теории упругости), в основу предлагаемой модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стеснённым вращением принимаем следующие гипотезы:

1) это гипотезы а), б), в) раздела 3;

2) Поворот ω_3 выражается через компоненты вектора перемещений u_1, u_2 по известной формуле классической теории упругости:

$$\omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right). \tag{25}$$

Здесь следует обратить внимание на следующее: из третьего и четвёртого равенств из (3) можем получить следующие эквивалентные равенства:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}-2\omega_3=\frac{A_{11}\left(A_{88}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}^{2}}\frac{\sigma_{12}}{A_{11}}-\frac{A_{11}\left(A_{77}+A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}^{2}}\frac{\sigma_{21}}{A_{11}},\\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{A_{11}\left(A_{88}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}^{2}}\frac{\sigma_{12}}{A_{11}}+\frac{A_{11}\left(A_{77}-A_{78}\right)}{A_{77}A_{88}-A_{78}^{2}}\frac{\sigma_{21}}{A_{11}}\end{gathered} \tag{26}$$

(отметим, что $\sigma_{21}/A_{11}-$ безразмерная величина). Для выполнения условия стесненного вращения (25) необходимо, чтобы правая часть в первом равенстве из (26) стремилась к нулю. Условие, которое мы налагали на выражения (24), строго обеспечивает указанное требование.

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стеснённым вращением будет выражаться так:

уравнения движения:

$$\begin{gathered}\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1}-N_{21}=-h\left(X^{+}-X^{-}\right)+\frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial t^2},\quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}=-(Y^{+}+Y^{-})+2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\\ \frac{\partial L_{13}}{\partial x_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^{+}+M^{-})+2Ih\frac{\partial^2\Omega_3}{\partial t^2}.\end{gathered} \tag{27}$$

Соотношения упругости:

$$\begin{gathered}M_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^{2}}{A_{22}}K_{11},\\ N_{12}+N_{21}=h\left(A_{77}+A_{88}+2A_{78}\right)\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right),\ L_{13}=2hB_{66}k_{13}.\end{gathered} \tag{28}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11}=\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1},\ \Gamma_{12}+\Gamma_{21}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\Psi_1,\ k_{13}=\frac{\partial\Omega_3}{\partial x_1},\ \Omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x_1}-\Psi_1\right). \tag{29}$$

Граничные условия на торце балки $x_1=0\left(x_1=a\right)$ имеют вид:

$$M_{11}=M_{11}^{*}\ \text{или}\ \Psi_1=\Psi^{*}{}_1,\quad N_{12}=N_{12}^{*}\ \text{или}\ w=w^{*},\quad L_{13}=L_{13}^{*}\ \text{или}\ \Omega_3=\Omega_3^{*} \tag{30}$$

Для величин $w, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \Omega_3, \dfrac{\partial \Omega_3}{\partial t}, \Psi_1, \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial t}$ необходимы начальные условия при $t = 0$.

В модели (27)-(30) микрополярных балок со стеснённым вращением полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Для получения одномерных уравнений классической теории ортотропных балок Тимошенко в уравнениях (27)-(29) следует подставить $B_{66} = 0, I = 0$ (необходимо в данном случае ввести также следующее обозначение: $(A_{77} + A_{88} + 2A_{78})/4 = A$).

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стеснённым вращением, когда в основу принимается обобщённая кинематическая гипотеза Бернулли (19), будет иметь вид:

уравнения движения:

$$\frac{\partial\left(M_{11} - L_{13}\right)}{\partial x_1} - N_{12} = -h\left(X^+ - X^-\right) + (M^+ + M^-) - \left(\frac{2h^3}{3}\rho + 2Ih\right)\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2},$$
$$\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \tag{31}$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}K_{11}, \; L_{13} = 2hB_{66}k_{13}. \tag{32}$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \;\; k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}, \; \Omega_3 = \frac{\partial w}{\partial x_1}. \tag{33}$$

К этой системе уравнений микрополярных балок со стеснённым вращением следует присоединить граничные условия (30) с учётом (19) и соответствующие начальные условия.

Для получения одномерных уравнений классической теории Бернулли ортотропных балок в уравнениях (31)-(33) следует подставить $B_{66} = 0, I = 0$ (с учётом следующего вышеупомянутого обозначения $(A_{77} + A_{88} + 2A_{78})/4 = A$).

5. Математическая модель микрополярной ортотропной упругой тонкой балки “с малой сдвиговой жесткостью”.

Рассмотрим случай, когда физические параметры (10) имеют следующие значения:

$$\frac{A_{11}A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \;\; \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \;\; \frac{A_{11}A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \sim 1, \;\; \frac{A_{11}\left(A_{88} - A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1,$$
$$\frac{A_{11}\left(A_{77} - A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \;\; \frac{A_{11}\left(A_{88} + A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \;\; \frac{A_{11}\left(A_{77} + A_{78}\right)}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2} \sim 1, \frac{a^2 A_{11}}{B_{66}} << 1, \;\; \frac{a^2 A_{11}}{B_{44}} << 1. \tag{34}$$

С учётом качественных результатов асимптотического решения [6] системы уравнений (1)-(4) с вышеуказанными граничными и начальными условиями, в основу предлагаемой ниже теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жёсткостью ” ставим следующие гипотезы:

1) это гипотезы а), б), в) раздела 3;

2) в третьем уравнении движения (1) можем пренебрегать разностью $(\sigma_{12} - \sigma_{21})$.

Главная особенность рассматриваемого случая состоит в том, что “моментная часть” задачи отделяется как самостоятельная начально-граничная задача.

Для “моментной части” задачи имеем:

уравнение движения:

$$\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} = -(M^+ + M^-) + 2Ih\frac{\partial^2 \Omega_3}{\partial t^2}; \qquad (35)$$

соотношение упругости:

$$L_{13} = 2hB_{66}k_{13}; \qquad (36)$$

геометрическое соотношение**:**

$$k_{13} = \frac{\partial \Omega_3}{\partial x_1}. \qquad (37)$$

Граничное условие на торце балки $x_1 = 0\left(x_1 = a\right)$ имеет вид:

$$L_{13} = L_{13}{}^* \quad \text{или} \quad \Omega_3 = \Omega_3{}^*. \qquad (38)$$

Для величин $\Omega_3, \dfrac{\partial \Omega_3}{\partial t}$ необходимы начальные условия при $t = 0$.

Для “силовой части” задачи имеем:

уравнения движения:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h\left(X^+ - X^-\right) + \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \qquad (39)$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}{A_{22}}K_{11}, \quad N_{12} = 2h\left(A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}\right), \quad N_{21} = 2h\left(A_{78}\Gamma_{12} + A_{88}\Gamma_{21}\right). \qquad (40)$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}, \qquad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3, \qquad \Gamma_{21} = \Psi_1 + \Omega_3. \qquad (41)$$

Граничные условия на торце балки $x_1 = 0 \ \left(x_1 = a\right)$ имеют вид:

$$M_{11} = M_{11}{}^* \ \text{или} \ \Psi_1 = \Psi_1{}^*, \quad N_{12} = N_{12}{}^* \ \text{или} \ w = w^*. \qquad (42)$$

Для величин $w, \dfrac{\partial w}{\partial t}, \Psi_1, \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial t}$ необходимы начальные условия при $t = 0$.

В модели (39)-(42) микрополярных балок “с малой сдвиговой жёсткостью” полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации.

Основная система уравнений динамического изгиба микрополярных ортотропных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жёсткостью ” для “силовой части”, когда принимается обобщённая кинематическая гипотеза Бернулли (19), будет иметь вид:

уравнения движения:

$$\frac{\partial M_{11}}{\partial x_1} - N_{21} = -h\left(X^+ - X^-\right) - \frac{2h^3}{3}\rho\frac{\partial^3 w}{\partial x_1 \partial t^2}, \quad \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} = -(Y^+ + Y^-) + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (43)$$

соотношения упругости:

$$M_{11} = \frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}{}^2}{A_{22}}K_{11}, \ N_{12} = 2h\left(A_{77}\Gamma_{12} + A_{78}\Gamma_{21}\right), \ N_{21} = 2h\left(A_{78}\Gamma_{12} + A_{88}\Gamma_{21}\right) \qquad (44)$$

геометрические соотношения:

$$K_{11} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1{}^2}, \quad \Gamma_{12} = \frac{\partial w}{\partial x_1} - \Omega_3(x_1, t), \quad \Gamma_{21} = -\frac{\partial w}{\partial x_1} + \Omega_3(x_1, t). \qquad (45)$$

К этой системе уравнений микрополярных балок “с малой сдвиговой жёсткостью” следует присоединить граничные условия (42) с учётом (19) и соответствующие начальные условия.

6. Свободные колебания шарнирно опёртой микрополярной ортотропной упругой тонкой балки.

Основная система уравнений динамической изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений, когда полностью учитываются поперечные сдвиговые деформации, представляют собой уравнения (15)-(17). Граничные условия шарнирного опирания на торцах балки $x_1 = 0$, $x_1 = a$ выражаются так:

$$w\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0, \quad L_{13}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0, \quad M_{11}\Big|_{\substack{x_1=0\\x_1=a}} = 0, \tag{46}$$

Решение поставленной граничной задачи представим в следующем виде (здесь по индексу $m = 1,2,...$ происходит суммирование), при котором полностью удовлетворяются граничные условия (46):

$$\Psi_1 = \left(A_m'' \cos(p_m t) + B_m'' \sin(p_m t) \right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} x_1 \right) + \left(A_0'' \cos(p_0 t) + B_0'' \sin(p_0 t) \right),$$

$$\Omega_3 = \left(A_m' \cos(p_m t) + B_m' \sin(p_m t) \right) \cos\left(\frac{m\pi}{a} x_1 \right) + \left(A_0' \cos(p_0 t) + B_0' \sin(p_0 t) \right), \tag{47}$$

$$w = \left(A_m \cos(p_m t) + B_m \sin(p_m t) \right) \sin\left(\frac{m\pi}{a} x_1 \right),$$

где $A_m'', B_m'', A_0'', B_0'', A_m', B_m', A_0', B_0', A_m, B_m$ – постоянные, p_m, p_0 – собственные частоты свободных колебаний балки. Подставив (47) в систему уравнений (15)-(17), в результате, для свободных колебаний микрополярной балки получим однородные алгебраические уравнения относительно $A_m'', B_m'', A_0'', B_0'', A_m', B_m', A_0', B_0', A_m, B_m$. Поскольку нас интересует ненулевое решение, то потребуем, чтобы определители матриц, соответствующих алгебраическим системам уравнений, были равны нулю. Тогда для определения собственных частот p_m, p_0 колебаний микрополярной балки получим определенные алгебраические уравнения. Аналогичным образом поставленная задача о свободных колебаниях шарнирно-опертой микрополярной балки рассмотрим на основе модели без учёта поперечных сдвигов (20)-(22) и на основе упрощённой модели. Результаты численных вычислений для балки, имеющей следующие физические параметры, приведены в табл. 1, 2:

$$A_{77} = 4.6 \cdot 10^6\,Па;\ A_{88} = 4.8 \cdot 10^6\,Па; A_{78} = 0.4 \cdot 10^6\,Па;\ \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2 \cdot 10^6\,Па;\ B_{66} = 300H;$$

$$\rho = 1114\,кг/м^3;\ \ I = 5.31 \cdot 10^{-6}\,кг\ /\ м\,.$$

Таблица 1

Размеры балки ($м$)		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$							
$\frac{h}{a} = \frac{1}{40}$		Упрощенная модель микрополярной балки			Модель микрополярной балки с учетом поперечных сдвигов ((15)-(18))				
		$m = 1$		$m = 0$	$m = 1$			$m = 0$	
a	h	p_1^1	p_1^2	p_0	p_1^1	p_1^2	p_1^3	p_0^1	p_0^2
0.002	0.00005	15957.4	1884903	147595	15957.4	361294	1890194	136381	391659
0.01	0.00025	2979.74	403768	147595	2979.78	68435.1	427593	51133.4	208923
0.07	0.00175	156.329	157058	147595	157.446	7767.69	209652	7530.18	202669
0.5	0.0125	3.55881	147787	147595	4.48061	1058.78	202687	1054.86	202548

Таблица 2

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$						
$\frac{h}{a}=\frac{1}{40}$		Модель микрополярной балки без учета поперечных сдвигов ((20)-(22))			Классическая теория балки типа Тимошенко			Классическая теория балки Бернулли
		$m=1$		$m=0$	$m=1$		$m=0$	$m=1$
a	h	$p_1^{\ 1}$	$p_1^{\ 2}$	p_0	$p_1^{\ 1}$	$p_1^{\ 2}$	p_0	p_1
0.002	0.00005	21830.6	1890001	202545	772.075	262004	261179	773.717
0.01	0.00025	3866.36	426933	202545	154.415	52400.7	52235.8	154.743
0.07	0.00175	162.152	209541	202545	22.0593	7485.82	7462.26	22.1062
0.5	0.0125	4.49147	202685	202545	3.08829	1048.01	1044.72	3.09487

На основе проделанных численных экспериментов можем сделать следующие выводы:

1. По микрополярной теории упругих балок с независимыми полями перемещений и вращений получается дополнительный спектр свободных колебаний (это связано с тем, что в микрополярной теории имеется дополнительная степень свободы– свободное вращение).

2. У микрополярной балки имеется частота колебаний, которая не зависит от размеров балки (это свойство хорошо видно в упрощённой модели и в модели без учёта поперечных сдвигов, а в модели с учетом поперечных сдвигов это свойство имеет место, начиная с определенных размеров балки).

3.При данных значениях материальных констант (которые здесь выбраны гипотетически) для довольно малых размеров микрополярной балки низкие частоты довольно высокие по сравнению с соответствующей классической теорией.

4. В модели микрополярной балки без учёта поперечных сдвигов для малых размеров балки низкие частоты колебания резко отличаются от частот, полученных в модели микрополярной балки с учётом поперечных сдвигов и в упрощённой модели (в двух последних моделях эти частоты достаточно близки друг к другу). А для более массивных размеров балки низкие частоты колебания совпадают в моделях микрополярной балки без учёта поперечных сдвигов и с учётом поперечных сдвигов.

Рассмотренная задача о свободных колебаниях шарнирно-опертых микрополярных балок решена и на основе моделей (с учётом и без учёта поперечных сдвигов) стеснённого вращения. Результаты численных вычислений для балки, имеющей следующие физические параметры, приведены в табл. 3, 4:

$$A_{77}=302\cdot10^6\,Па;\;\; A_{88}=305\cdot10^6\,Па;\, A_{78}=-98\cdot10^6\,Па;\;\; \frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^{\ 2}}{A_{22}}=5.2\cdot10^6\,Па;$$

$$B_{66}=6000H\,;\;\; \rho=1114\,кг/м^3;\;\; I=0.01кг/м\,.$$

Таблица 3

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$			
$\delta=\frac{h}{a}=\frac{1}{40}$		Упрощ. модель микроп. балки	Модель микрополярной балки с учетом поперечных сдвигов ((27)-(30))		
		$m=1$	$m=1$		$m=0$
a	h	p_1	$p_1^{\ 1}$	$p_1^{\ 2}$	p_0
0.2	0.005	91.3640	91.1050	14917.7	14861.9
0.3	0.0075	40.8129	40.7372	10572.9	10549.2
0.4	0.01	23.1045	23.0696	8117.73	8103.65
0.5	0.0125	14.9047	14.8846	6567.64	6557.81

Таблица 4

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$				
$\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}$		Модель микроп. балки без учета поперечных сдвигов ((31)-(33))	Классическая теория балки типа Тимошенко			Классическая теория балки Бернулли
		$m=1$	$m=1$	$m=1$	$m=0$	$m=1$
a	h	p_1	$p_1^{\ 1}$	$p_1^{\ 2}$	p_0	p_1
0.2	0.005	91.2704	7.73677	16762.1	16743.9	7.73717
0.3	0.0075	40.7710	5.15785	11174.7	11162.7	5.15812
0.4	0.01	23.0808	3.86839	8381.03	8371.99	3.86859
0.5	0.0125	14.8894	3.09471	6704.83	6697.59	3.09487

Эта же задача решена также на основе моделей “с малой сдвиговой жёсткостью”. Результаты численных вычислений для балки, имеющей следующие физические параметры, приведены в табл. 5, 6:

$$A_{77} = 5.6 \cdot 10^6\, Па;\ A_{88} = 5.8 \cdot 10^6\, Па; A_{78} = 0.4 \cdot 10^6\, Па;\ \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^{\ 2}}{A_{22}} = 5.2 \cdot 10^6\, Па;\ B_{66} = 6000 H$$

$$\rho = 590\, кг / м^3;\ I = 5.31 \cdot 10^{-6}\, кг / м\ .$$

Таблица 5

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$					
$\frac{h}{a} = \frac{1}{40}$		Упрощенная модель микрополярной балки		Модель микрополярной балки с учетом поперечных сдвигов ((35)-(42))			
		$m=1$		$m=1$			$m=0$
a	h	$p_1^{\ c}$	$p_1^{\ м}$	$p_1^{\ 1c}$	$p_1^{\ 2c}$	$p_1^{\ м}$	$p_0^{\ c}$
0.002	0.00005	33249.4	8403658	24296.0	547143	8403658	546637
0.003	0.000075	22166.3	5602439	16197.4	364762	5602439	364424
0.004	0.0001	16624.7	4201829	12148.0	273571	4201829	273318
0.006	0.00015	11083.1	2801219	8098.68	182381	2801219	182212

Таблица 6

Размеры балки $(м)$		Собственные частоты свободных колебаний $(Гц)$					
$\frac{h}{a} = \frac{1}{40}$		Модель микроплярной балки без учета поперечных сдвигов ((43)-(45))		Классическая теория балки типа Тимошенко			Классическая теория балки Бернулли
		$m=1$		$m=1$		$m=0$	$m=1$
a	h	$p_1^{\ c}$	$p_1^{\ м}$	$p_1^{\ 1}$	$p_1^{\ 2}$	p_0	p_1
0.002	0.00005	33491.9	8403658	1061.28	394240	393138	1063.16
0.003	0.000075	22327.9	5602439	707.519	262827	262092	708.774
0.004	0.0001	16745.9	4201829	530.639	197120	196569	531.580
0.006	0.00015	11163.9	2801219	353.759	131413	131046	354.367

По приведённым данным табл. 3,4,5,6 можем, во-первых, судить, что при равных внешних условиях и геометрии микрополярный материал с точки зрения динамических характеристик (имеем в виду частоты собственных колебаний) резко отличается от классического упругого материала. Во-вторых, в этих таблицах сравниваются построенные модели (с учётом и без учёта поперечных сдвигов, а также упрощённая) в случае стеснённого вращения и “малой сдвиговой жесткости”.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках **Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-**

технической деятельности, проведённого Государственным комитетом по науке МОН Республики Армении в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Саркисян С.О. Микрополярная теория тонких стержней, пластин и оболочек//Изв. НАН Армении. Механика. 2005. Т. 58. N2. С.84-95.
2. Altenbach H., Altenbach J., Eremeyev V. On generalized Cosserat-type theories of plates and shells: a short review and bibliography// Arch. Appl. Mech. Special Issue. 2009. Doi 10. 1007/s 00419-009-0365-3. Springer-Verlag.
3. Саркисян С.О. Общая динамическая теория микрополярных упругих тонких оболочек // Доклады РАН . 2011. Т.436. N2. С.195-198.
4. Саркисян С.О., Саркисян А.А. Общая динамическая теория микрополярных тонких пластин со свободным вращением и свойства их свободных колебаний //Акустический журнал. 2011. Т. 57. N4.
5. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок//Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. N2. С.121-128.
6. Маргарян Л.М. Динамическая задача изгиба микрополярных упругих ортотропных тонких балок //В сб.: “Актуальные проблемы механики сплошной среды”. Ереван: Изд.-во НАН Армении, 2010. Т.2. С.13-17.
7. Iesen D. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids//Archives of Mechanics. 1973. Vol. 5. N3. pp. 547-561.
8. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967. 444 с.

Сведения об авторах:

Маргарян Лилит Мкртычевна - аспирант Гюмрийского государственного педагогического института имени М. Налбандяна.
Адрес: Армения, г. Гюмри, ул. Мясникяна, дом 190.
E-mail: m.liloo@mail.ru. Тел: (094)054498.

Саркисян Самвел Оганесович - чл.-корр. НАН Армении, доктор физ-мат. наук, профессор, зав. каф. мат. анализа и дифференц. уравнений Гюмрийского государственного педагогического института имени М. Налбандяна.
Адрес: Армения, г. Гюмри, ул. Саят-Новы, дом 2/11.
E-mail: slusin@yahoo.com. Тел: (091)605715.

Поступила в редакцию 02.09.2011