

УДК 539.3

**О ВДАВЛИВАНИИ ЖЁСТКОГО ШТАМПА С ВОГНУТЫМ ОСНОВАНИЕМ В
УПРУГУЮ ПОЛУПЛОСКОСТЬ С УЧЁТОМ ВЛИЯНИЯ НАПОЛНИТЕЛЯ В
КАВЕРНЕ**

Амирджанян А.А., Саакян А.В.

Ключевые слова: контактная задача, сингулярное интегральное уравнение, логарифмическая особенность, дискретные особенности, численный метод

Keywords: contact problem, singular integral equation, logarithmic singularity, discrete singularities, numerical method.

Ամիրջանյան Հ.Ա., Մահակյան Ա.Վ.

Գոգավոր հիմքով կոշտ դրոշմի մխրձումը առաձգական կիսահարթություն՝ խոռոչում եղած լցիչի ազդեցության հաշվառումով

Դիտարկված է առաձգականության տեսության կոնտակտային խնդիր գոգավոր հիմքով կոշտ դրոշմի և առաձգական կիսահարթության փոխազդեցության վերաբերյալ: Ենթադրվում է, որ դրոշմի և կիսահարթության եզրի միջև առաջացող խոռոչում կա լցիչ՝ կամ օդ, կամ իդեալական անսեղմելի հեղուկ: Խնդիրը լուծվել է դիսկրետ եզակիությունների եղանակով և գտնվել են կոնտակտային լարումների բաշխումը, խոռոչի ներսում առաջացող ճնշումը և կոնտակտային զոտու երկարությունը:

Amirjanyan H.A., Sahakyan A.V.

About the indentation of a rigid punch with concave base into half plane, taking into account the influence of filler in cavity

The contact problem of elasticity theory about the indentation of a rigid punch with concave base into elastic half plane is considered. It is supposed that the cavity between punch and boundary of half plane is filled with air or ideal incompressible liquid. The problem was solved by the method of a discrete singularities. The distribution of contact stresses, the pressure inside cavity and the length of contact area were obtained.

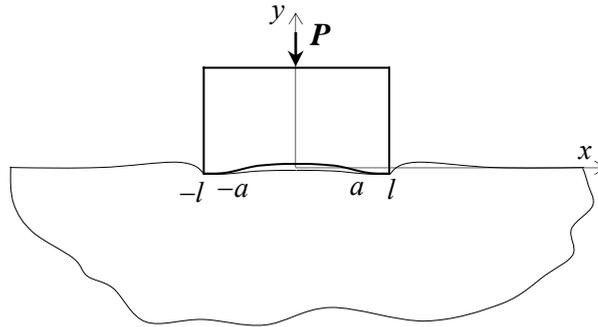
Рассмотрена контактная задача теории упругости о вдавливании жёсткого штампа с вогнутым основанием в упругую полуплоскость. Предполагается, что в образуемой, между штампом и границей полуплоскости, каверне имеется наполнитель – воздух или идеальная несжимаемая жидкость. Задача решена методом дискретных особенностей и найдены контактные напряжения, давление внутри каверны и длина зоны контакта.

Рассматривается контактная задача для упругой полуплоскости, в границу которой вдавливаются жёсткий штамп с профилем основания в виде гладкой вогнутой кривой так, что с момента соприкосновения штампа с границей полуплоскости под ним образуется замкнутая полость – каверна, в которой может быть как воздух, так и идеальная несжимаемая жидкость. Предполагается, что между штампом и полуплоскостью имеет место гладкий контакт, но, несмотря на это, каверна считается герметично закрытой. Вогнутость основания штампа принимается малой, чтобы ещё в рамках линейной теории упругости выявить влияние сжатия воздуха в каверне на распределение контактных напряжений и длину зоны контакта. Относительно наполнителей предполагается, что они подчиняются основному закону гидростатики – закону Паскаля, вследствие чего давление наполнителя в каверне принимается равномерно распределённым по всему объёму. Поскольку основной целью поставленной задачи является исследование влияния наполнителя, то, для простоты и наглядности, предположим, что проекция основания штампа имеет постоянную длину, а основание симметрично относительно центра.

Поставленная задача является органическим продолжением классических задач о вдавливании в упругую полуплоскость без трения жёсткого штампа с плоским

основанием [1] и с выпуклым основанием [2,3], которые изначально предполагают контакт по всему основанию. Рассматриваемую задачу можно отнести к последним лишь в случае отсутствия наполнителя, притом, для давящей силы, превосходящей определённое значение.

Пусть в правосторонней декартовой системе координат, ось ординат которой совпадает с осью симметрии штампа, а ось абсцисс с границей полуплоскости, основание штампа описывается функцией $f(x)$. Зона контакта будет состоять из двух симметричных отрезков $[-l, -a]$ и $[a, l]$, длины которых подлежат определению из условия непрерывности напряжений в концах $\pm a$ (Фиг. 1).



Фиг. 1

Вертикальные перемещения граничных точек полуплоскости от контактных напряжений $\sigma(x)$ и давления внутри каверны p_0 определяются формулой, которую с учётом симметрии относительно оси Oy , можно записать в виде

$$\frac{\pi\mu}{1-\nu} v(x) = \int_a^l \sigma(s) (\ln|s-x| + \ln|s+x|) ds + p_0 [(a-x) \ln|a-x| + (a+x) \ln|a+x| - 2a] + C \quad (0 < x < l) \quad (1)$$

В зоне контакта имеем равенство

$$v(x) = f(x) - \Delta \quad (2)$$

где Δ – мера погружения штампа в полуплоскость.

Подставляя (1) в равенство (2) и дифференцируя его по x , придём к определяющему сингулярному интегральному уравнению

$$\int_a^l \left(\frac{1}{s-x} - \frac{1}{s+x} \right) \sigma(s) ds = -p_0 \ln \left| \frac{a-x}{a+x} \right| - \frac{\pi\mu}{1-\nu} f'(x) \quad (a < x < l) \quad (3)$$

Перейдём к безразмерным величинам

$$\{x, s\} = \frac{l-a}{2} \{y, \zeta\} + \frac{l+a}{2} = \frac{l}{2} [(1-\delta)\{y, \zeta\} + (1+\delta)] \quad (-1 < \{y, \zeta\} < 1)$$

$$q(y) = \frac{1}{\mu} \sigma \left(\frac{l-a}{2} y + \frac{l+a}{2} \right); \quad p^* = \frac{p_0}{\mu}; \quad \delta = \frac{a}{l} \quad (4)$$

и сведём полученное уравнение к интервалу $(-1, 1)$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\zeta - y} - \frac{1}{\zeta + y + 2\delta^*} \right) q(\zeta) d\zeta = -p^* \ln \frac{1+y}{2\delta^* - 1 + y} - \lambda g(y, \delta) \quad (-1 < y < 1) \quad (5)$$

где

$$\delta^* = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \lambda = \frac{\pi}{1-\nu}, \quad g(y, \delta) = f'(x) \Big|_{x=\frac{l}{2}[(1-\delta)y+(1+\delta)]} \quad (6)$$

Таким образом, определяющее уравнение (3) окончательно сведено к виду (5), где неизвестными являются обезразмеренное контактное давление $q(y)$, давление внутри каверны p^* и отношение абсцисс концов зоны контакта $\delta = a/l$.

Имеем также условие равновесия штампа

$$\int_{-l}^{-a} \sigma(s) ds + 2a p_0 + \int_a^l \sigma(s) ds = P, \quad (7)$$

которое в переменных (4) принимает вид

$$\int_{-1}^1 q(\zeta) d\zeta = \frac{P_* - 2\delta p^*}{1-\delta}; \quad P_* = \frac{P}{\mu l} \quad (8)$$

Разыскивая решение уравнения (5) в виде

$$q(\zeta) = p^* \varphi_p(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \quad (9)$$

где $\varphi_p(\zeta)$ и $\varphi_0(\zeta)$ являются решениями уравнения (5), но с правыми частями

$$-\ln \frac{1+y}{2\delta^* - 1 + y} \quad \text{и} \quad -\lambda g(y, \delta) \quad (10)$$

соответственно, из условия равновесия (8) выразим неизвестное давление p^* через введённые новые неизвестные функции

$$p^* = \left[\frac{P_*}{1-\delta} - \int_{-1}^1 \varphi_0(\zeta) d\zeta \right] / \left[\frac{2\delta}{1-\delta} + \int_{-1}^1 \varphi_p(\zeta) d\zeta \right] \quad (11)$$

Из физической сущности поставленной задачи непосредственно следует, что на внутреннем конце зоны контакта, т.е. в точке $y = -1$, контактное давление, в силу непрерывности, должно быть равно давлению внутри каверны, которое, при наличии наполнителя, отлично от нуля и подлежит определению. Представление (9) очевидным образом указывает на то, что только функция $\varphi_p(\zeta)$ должна обладать указанным поведением в точке $y = -1$, поскольку именно ею обусловлено влияние внутреннего давления. Функция $\varphi_0(\zeta)$ на внутреннем конце зоны контакта обращается в ноль. На внешнем конце обе функции имеют интегрируемую особенность.

Известно [4], что интеграл типа Коши от функции $\varphi_p(\zeta)$, принимающей конечное значение в точке $y = -1$, имеет в этой точке логарифмическую особенность. Такая же особенность имеется и в первой из правых частей, указанных в (10). Воспользовавшись значением интеграла

$$\int_{-1}^1 \frac{\sqrt{1-\xi}}{\xi-y} d\xi = -\sqrt{1-y} \left[\ln|1+y| - \ln\left(3-y+2\sqrt{2(1-y)}\right) \right] - 2\sqrt{2} \quad (y < 1), \quad (12)$$

функцию $\Phi_p(y)$ можно представить в виде

$$\Phi_p(y) = \sqrt{\frac{1-y}{2}} + r(y), \quad (13)$$

где $r(y)$ – непрерывная функция, имеющая традиционное поведение на концах, именно, обращающаяся в ноль на конце $y = -1$ и неограниченная на конце $y = 1$.

Подставляя (13) в уравнение (5) с соответствующей правой частью из (10) и учитывая (12), получим уравнение для определения $r(y)$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\xi-y} - \frac{1}{\xi+y+2\delta^*} \right) r(\xi) d\xi = t(y) - t(-y-2\delta^*), \quad (14)$$

где

$$t(y) = \left(\sqrt{\frac{1-y}{2}} - 1 \right) \ln|1+y| - \sqrt{\frac{1-y}{2}} \ln \left[3-y+2\sqrt{2(1-y)} \right]. \quad (15)$$

Нетрудно проверить, что правая часть уравнения (14) является непрерывной ограниченной функцией на отрезке $[-1, 1]$.

Таким образом, решение поставленной задачи сводится к решению основного сингулярного интегрального уравнения первого рода (5) с правой частью, указанной в (10) второй, и уравнения (14), которые отличаются друг от друга лишь правой частью. При этом, решения обоих уравнений должны принадлежать классу функций, обращающихся в ноль на одном конце отрезка интегрирования и в бесконечность на другом. Неизвестная постоянная δ , входящая в полученные уравнения непосредственно либо посредством δ^* , определяется из условия, обусловленного наличием наполнителя.

В случае отсутствия наполнителя будем иметь $p^* = 0$ и задача сведётся к решению одного уравнения (5), а постоянная δ определится из условия равновесия штампа.

Исходя из результатов [4] о поведении сингулярного интеграла вблизи концов линии интегрирования и учитывая принадлежность искомого решения к указанному классу функций, неизвестные функции $r(y)$ и $\Phi_0(y)$ представим в виде

$$r(y) = \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}} \Phi_p^*(y), \quad \Phi_0(y) = \frac{\sqrt{1+y}}{\sqrt{1-y}} \Phi_0^*(y), \quad (16)$$

где функции со звёздочками – новые неизвестные функции, принадлежащие классу Гельдера на отрезке $[-1, 1]$ и принимающие на концах конечные значения.

Согласно методу дискретных особенностей [5], неизвестные функции $\Phi_p^*(y)$ и $\Phi_0^*(y)$ заменяются интерполяционными многочленами

$$\Phi_{\{p,0\}}^*(y) = \sum_{i=1}^n \frac{\Phi_{\{p,0\}}^*(\xi_i) (1+\xi_i)}{(y-\xi_i)[(n+1)U_{n-1}(\xi_i) + nU_n(\xi_i)]} \sqrt{\frac{2}{1+y}} T_{2n+1} \left(\sqrt{\frac{1+y}{2}} \right), \quad (17)$$

где

$$\xi_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+1} \quad (i = \overline{1, n})$$

и решение сингулярных интегральных уравнений сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений с различными правыми частями:

$$\sum_{i=1}^n w_i \Phi_{\{p,0\}}^*(\xi_i) \left[\frac{1}{\xi_i - \zeta_k} + \frac{1}{\xi_i + \zeta_k + 2\delta^*} \left(1 - \frac{q(-\zeta_k - 2\delta^*)}{q(\xi_i)} \right) \right] = \{t(\zeta_k) - t(-\zeta_k - 2\delta^*), \lambda g(\zeta_k, \delta)\} \quad (k = \overline{1, n}) \quad (18)$$

Здесь

$$w_i = \frac{\pi(1+\xi_i)U_{2n} \left(\sqrt{\frac{1+\xi_i}{2}} \right)}{(n+1)U_{n-1}(\xi_i) + nU_n(\xi_i)}, \quad \zeta_k = \cos \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = \overline{1, n}),$$

$$q(\zeta) = \begin{cases} \pi P_n^{(0.5, -0.5)}(\zeta) & -1 < \zeta < 1 \\ \pi \left[P_n^{(0.5, -0.5)}(\zeta) - \sqrt{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}} P_n^{(-0.5, 0.5)}(\zeta) \right] & \zeta \notin [-1, 1]. \end{cases}$$

Система (18) позволяет при заданном значении δ , а следовательно и $\delta^* = \frac{1+\delta}{1-\delta}$,

определить значения $\Phi_p^*(\xi_i)$ и $\Phi_0^*(\xi_i)$ ($i = \overline{1, n}$) и, тем самым, посредством (17), (16) и (13), найти функции $\Phi_p(\zeta)$ и $\Phi_0(\zeta)$.

На основе квадратурных формул для интегралов, входящих в (11), неизвестное давление p^* внутри каверны можно вычислить непосредственно через найденные значения $\Phi_p^*(\xi_i)$ и $\Phi_0^*(\xi_i)$ ($i = \overline{1, n}$)

$$p^* = \left[\frac{P^*}{1-\delta} - \sum_{i=1}^n w_i \Phi_0^*(\xi_i) \right] / \left[\frac{2\delta}{1-\delta} + \frac{4}{3} + \sum_{i=1}^n w_i \Phi_p^*(\xi_i) \right] \quad (19)$$

Для определения величины δ необходимо иметь условие состояния наполнителя в каверне, которое непосредственно связано с формой основания штампа. Предположим, что функция $f(x)$, описывающая основание штампа, дается формулой $f(x) = Al(1-x^2/l^2)e^{-B(x/l)^2}$, позволяющей подходящим подбором констант A и B добиться большей наглядности в представлении полученных результатов.

Выведем эти условия для каждого из обоих видов наполнителя: воздуха и идеальной несжимаемой жидкости.

Предварительно вычислим площади каверны до $(2S_b)$ и после $(2S_a)$ деформации, которые необходимы при формулировке условия состояния наполнителя под штампом. Приняв за базу отрезок, соединяющий концы основания штампа и опускающийся, вследствие деформации полуплоскости, на величину $\Delta = v(l)$, нетрудно заметить, что площадь каверны до деформации определяется формулой:

$$S_b = \int_0^l f(x) dx = \frac{Al^2 e^{-B}}{8B\sqrt{B}} \left[4\sqrt{B} + 2(2B-1)e^B \sqrt{\pi} \Phi(\sqrt{B}) \right], \quad (20)$$

а после деформации – формулой

$$\begin{aligned} S_a &= S_b - \int_0^l (v(s) - v(l)) ds = \\ &= S_b - \frac{1-v}{\pi\mu} \left[\int_a^l \sigma(s) s \ln \frac{l+s}{l-s} ds + \frac{p_0}{2} \left\{ 2al + (l^2 - a^2) \ln \frac{l-a}{l+a} \right\} - lP \right] \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ – интеграл вероятностей.

В безразмерных переменных будем иметь:

$$S_b^* = \frac{S_b}{l^2} = \frac{Ae^{-B}}{8B\sqrt{B}} \left[4\sqrt{B} + 2(2B-1)e^B \sqrt{\pi} \Phi(\sqrt{B}) \right], \quad (22)$$

$$\begin{aligned} S_a^* = \frac{S_a}{l^2} &= S_b^* - \frac{(1-\delta)^2}{4\lambda} \int_{-1}^1 q(\xi) (\xi + \delta^*) \ln \frac{\xi + 1 + 2\delta^*}{1-\xi} d\xi - \\ &- \frac{p^*}{2\lambda} \left\{ 2\delta - (1-\delta^2) \ln \delta^* \right\} + \frac{P^*}{\lambda}. \end{aligned} \quad (23)$$

Вертикальное смещение точек границы полуплоскости относительно базового отрезка в тех же переменных имеет вид

$$\begin{aligned} v^*(y) &= \frac{1-\delta}{2\lambda} \left\{ \int_{-1}^1 q(\xi) \left(\ln \left| \frac{\xi-y}{\xi-1} \right| + \ln \left| \frac{\xi+y+2\delta^*}{\xi+1+2\delta^*} \right| \right) d\xi - \right. \\ &\left. - p^* \left[(1+y) \ln(1+y) - (y-1+2\delta^*) \ln(y-1+2\delta^*) - 2 \ln 2 + 2\delta^* \ln 2\delta^* \right] \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

Перейдём к условиям состояния наполнителя.

Пусть в каверне, образуемой под штампом, находится воздух. Положим, что процесс сжатия воздуха под штампом является изотермическим и описывается законом Бойля-Марриота

$$V_b p_b = V_a p_0, \quad (25)$$

где $p_b = 101325 \text{ н/м}^2$ – нормальное атмосферное давление, p_0 – давление сжатого воздуха внутри каверны, V_b и V_a – объемы каверны до и после деформации соответственно. Ввиду рассмотрения задачи в условиях плоской деформации, условие (25) уже в безразмерных величинах можно записать в виде

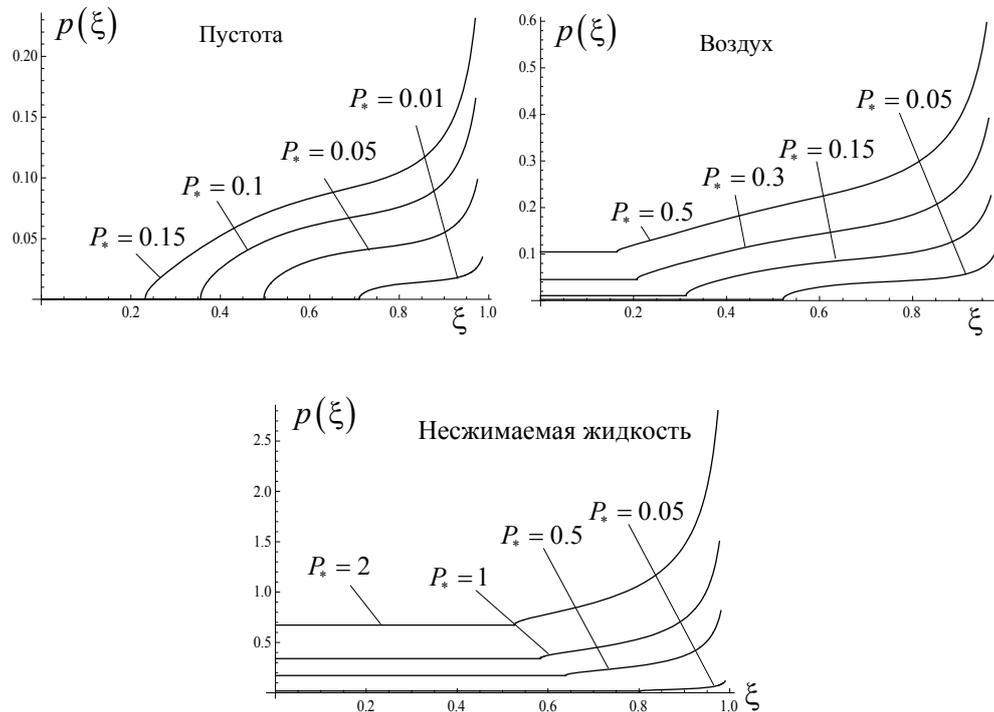
$$S_b^* \frac{p_b}{\mu} = S_a^* p^* . \quad (26)$$

В случае, когда в каверне находится идеальная несжимаемая жидкость, условием состояния наполнителя будет неизменность площади каверны

$$S_b^* = S_a^* . \quad (27)$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений (18) при условии (19) и одного из условий (26)-(27).

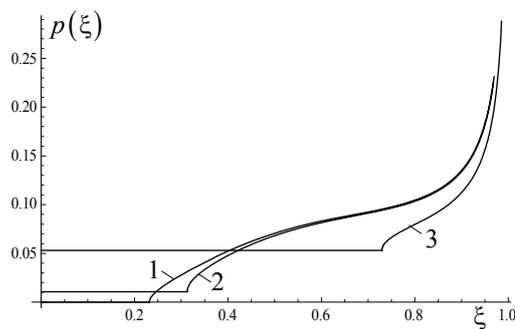
Численный анализ. Для параметров функции, описывающей основание штампа, приняты значения $A = 0.02$, $B = 4$, а для коэффициента Пуассона материала полуплоскости – значение $\nu = 0.25$. Расчёты проводились для трёх видов наполнителя в каверне: а) пустота; б) воздух; в) несжимаемая жидкость. Определены: распределение давления в зоне контакта штампа с полуплоскостью, давление внутри каверны, длина зоны контакта и форма границы полуплоскости под штампом. Зависимость найденных величин от величины вдавливающей силы P представлена в виде графиков.



Фиг.2. Распределение контактного давления под штампом

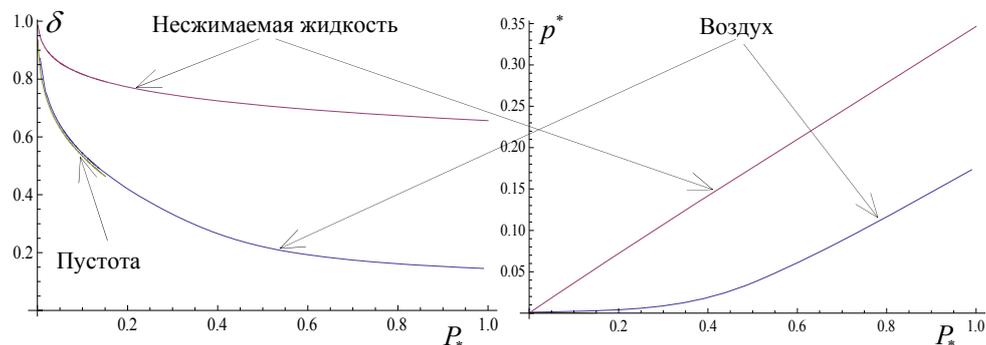
На фиг.2 представлены графики распределения давления под штампом. При этом, для неконтактирующей части, т.е. на интервале $0 < \xi < \delta$ имеем $p(\xi) = p^*$, а в зоне контакта $\delta < \xi < 1$ – $p(\xi) = \sigma(\xi l)/\mu$. Представленные графики показывают зависимость давления под штампом от величины вдавливающей силы для каждого наполнителя отдельно и, поскольку уровни давления существенно отличаются друг от друга, трудно сделать какое-либо заключение о зависимости от рода наполнителя.

Для получения количественного представления о последней зависимости на фиг. 3 собраны графики давления под штампом при разных наполнителях для одного и того же значения силы $P_* = 0.15$.



Фиг.3. Давление под штампом при разных наполнителях в каверне: 1– пустота, 2 – воздух, 3 – несжимаемая жидкость

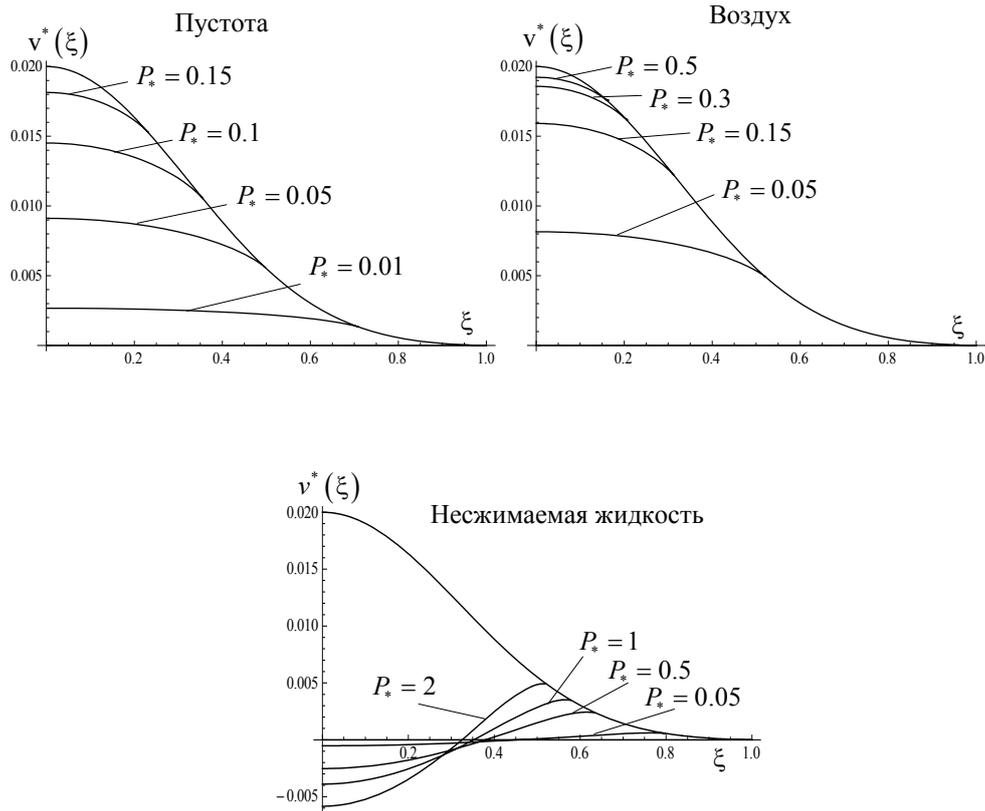
На фиг.4 представлены графики зависимости параметра $\delta = a/l$, посредством которого определяется длина зоны контакта, и давления внутри каверны p^* от величины вдавливающей силы P_* . Естественно, что при малых значениях вдавливающей силы P_* ситуации в случаях пустой каверны и наличия в ней воздуха должны мало отличаться друг от друга и это чётко прослеживается из графиков фиг.4. Судя по



Фиг.4. Зависимость длины зоны контакта (слева) и давления внутри каверны (справа) от величины, приложенной к штампу силы.

этим графикам, действительно, до определённого значения $P_* \approx 0.15$ давление внутри каверны практически равно нулю, а длины зоны контакта очень близки друг к другу.

При этом замечаем, что для пустой каверны кривая δ при определённом значении силы P_* обрывается. Это означает, что каверна скачкообразно захлопывается и при больших значениях силы P_* между штампом и полуплоскостью имеет место полный контакт.



Фиг.5. Форма границы полуплоскости под штампом.

На фиг.5 показаны формы границы полуплоскости после деформирования под действием различных сил P_* . Огибающая рассчитанных кривых представляет собой форму основания штампа, а область между ними является образом каверны.

Для иллюстрации сходимости решения системы (18) при увеличении порядка аппроксимации n введём в рассмотрение среднеквадратичное отклонение друг от друга решений, полученных при разных значениях порядка аппроксимации

$$\Delta(n_i) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^m (q_{n_i}(x_k) - q_{n_{i+1}}(x_k))^2}{(m-1)m}}, \quad (28)$$

где x_i – корни многочлена Чебышева $T_m(x)$, n_i – порядок аппроксимации.

Значения $\Delta(n_i)$ при $m=20$ и $\{n_i\}=\{4, 6, 8, 10, 12, 20\}$ приведены в табл.1.

Таблица 1

Наполнитель	$\Delta(n_1)$	$\Delta(n_2)$	$\Delta(n_3)$	$\Delta(n_4)$	$\Delta(n_5)$
Пустота	7.6×10^{-4}	2.6×10^{-5}	1.3×10^{-7}	1.4×10^{-8}	4.0×10^{-10}
Воздух	3.9×10^{-3}	3.8×10^{-4}	1.4×10^{-5}	3.1×10^{-7}	2.2×10^{-9}
Несжимаемая жидкость	5.5×10^{-5}	8.7×10^{-8}	3.8×10^{-8}	4.9×10^{-9}	1.7×10^{-9}

Данные табл.1 очевидно указывают на достаточно быструю сходимость процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sadowski M.L. (Садовский М.Л.). Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie.— ZAMM, 1928, 8, Bd 2.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. М.–Л.: Гостехтеориздат, 1997. 270с.
3. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980. 302с.
4. Мухелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968, 510 с.
5. Саакян А.В. Метод дискретных особенностей в применении к решению сингулярных интегральных уравнений с неподвижной особенностью. //Изв. НАН Армении. Механика. 2000. Т.53. №3.С.12-19.

Сведения об авторах:

Саакян Аветик Вараздатович,

Доктор физ.-мат. наук, зам.директора Института механики НАН РА,

Тел.: (37410) 568188, (37494)579348

Е-mail: avsah@mechins.sci.am, avsahakyan@gmail.com

Амирджанян Арутюн Арменович –

Кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник Института механики НАН Армении

Тел.: (37410) 27-62-23

Е-mail: amirjanyan@gmail.com

Поступила в редакцию 30.11.2011