ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №4, 2011 Механика

УДК 539.3

К УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ

МОВСИСЯН Л.А., НЕРСИСЯН Г.Г.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, устойчивость, нормальное давление, окружное и продольное усилия, минимальная нагрузка.
Keywords: Cylindrical shell, stability, external pressure, circular and longitudional strains, minimal pressure.

Մովսիսյան Լ.Ա., Ներսիսյան Գ.Գ.
Նորմալ ճնշման տակ գլանային թաղանթի կայունության մասին
Արտաքին նորմալ (համասեռ և անհամասեռ) ճնշման տակ գլանային թաղանթի կայունությունը հետազոտվում է տարբեր եզրային պայմանների դեպքում: Եզրային պայմաններն այնպիսինն են, որ նախնական շրջանային ճիգից բացի առաջանում է նաև երկայնական ճիգ:

Movsisyan L.A., Nersisyan G.G.
On stability of cylindrical shell under normal external pressure
Stability of cylindrical shell under normal external (uniformly and nonuniformly) pressure for different boundary conditions is investigated. By such boundary conditions that except circular strain also longitudinal strain is appeared.

Изучается устойчивость цилиндрической оболочки для различных граничных условий при внешнем нормальном (равномерном и неравномерном) давлении. Граничные условия такие, что помимо начального окружного усилия появляется также продольное усилие.

В работах [1,2] изучались задачи устойчивости цилиндрической оболочки под равномерным нормальным давлением при различных граничных условиях, исходя из уравнений полубезмоментной теории оболочек. Такой подход приближения вполне оправдан, так как известно, что такая оболочка теряет устойчивость по форме «одной полуволны» по длине и несколько – в окружном направлении. В дальнейшем, в [3.4] рассматривались случаи, когда на концах оболочки заданы смешанные граничные условия.

При внешнем нормальном давлении только окружное усилие получается (начальное состояние), если хотя бы на одном конце задано нулевое условие относительно продольного усилия. Однако, если на концах даются нулевые условия относительно продольного перемещения, то помимо окружного появляется также продольное усилие.

В настоящей статье изучаются такие же задачи, как и в [2], в том числе и случаи неравномерного давления с учетом появившегося продольного усилия. Приводятся некоторые же соображения относительно «оптимального» распределения давления по длине – минимальное давление, приводящее к потере устойчивости.

1.Уравнение устойчивости согласно вышеприведённым предположениям есть [2]

$$D\frac{\partial^8 w}{\partial y^8}+\frac{Eh}{R^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_1^0\frac{\partial w}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_2^0\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]=0, \qquad (1.1)$$

здесь $D=\dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$ – цилиндрическая жёсткость, E – коэффициент Юнга, h – толщина оболочки, ν – коэффициент Пуассона.

Если интенсивность нормального давления q, то окружное усилие $T_2^0 = Rq$, и т.к. по условию края неподвижны (начальное состояние), то $T_2^0 = \nu T_2^0 = \nu Rq$.

Перейдя к безразмерным координатам $x = l\xi\left(0 \le \xi \le 1\right)$, $y = R\theta\left(0 \le \theta \le 2\pi\right)$, ищем решение (1.1) в виде

$$w = W\left(\xi\right)\cos n\theta . \tag{1.2}$$

Для $W\left(\xi\right)$ получим уравнение

$$W^{IV} + aW^{II} + bw = 0 , \tag{1.3}$$

где введены обозначения:

$$a = \varepsilon\lambda\gamma^2 n^4 , \quad b = \frac{\gamma^4 n^8}{12\left(1-\nu^2\right)\beta^2} - \lambda\gamma^4 n^6 ,$$
$$\gamma = \frac{l}{R} , \ \beta = \frac{R}{h} , \ \lambda = \frac{qR}{Eh} . \tag{1.4}$$

В выражении a множитель ε фактически есть коэффициент Пуассона ν и с его наличием учитывается влияние продольного усилия T_1^0. В дальнейшем, в числовых расчётах для него будут приняты значения $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 0,3$, в то время как в выражении принимается $\nu = 0,3.$

Решение уравнения (1.3) будет

$$W = c_1 \mathrm{ch} s_1\xi + c_2 \mathrm{sh} s_1\xi + c_3 \cos s_2\xi + c_4 \sin s_2\xi , \tag{1.5}$$

где

$$s_1 = \gamma n\left(s - \frac{1}{2}\varepsilon\lambda n^2 \right)^{1/2} , \ s_2 = \gamma n\left(s + \frac{1}{2}\varepsilon\lambda n^2 \right)^{1/2} ,$$
$$s = \left(\frac{\varepsilon^2\lambda^2}{4} n^4 + \lambda n^2 - 0,09157\frac{n^4}{\beta^2} \right)^{1/2} . \tag{1.6}$$

Рассмотрим несколько случаев.

Здесь будем изучать случаи, когда один конец оболочки $\left(\xi = 0\right)$ защемлен –

$$u = v = 0 , \text{ т.е. } W = W' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 0 \tag{1.7}$$

1. Край свободен:

$$T_1 = S = 0 , \text{ т.е. } W^{II} = W^{III} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1 \tag{1.8}$$

2. Край оболочки свободно оперт:

$$T_1 = v = 0 , \text{ т.е. } W = W^{II} = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1 \tag{1.9}$$

3. Второй край оболочки также защемлён:

$$u = v = 0 , \text{ т.е. } W = W' = 0 \quad \text{при} \quad \xi = 1 \tag{1.10}$$

Трансцендентные уравнения, откуда определяются критические давления $\left(\lambda_{\text{кр}} = \dfrac{q_{\text{кр}}R}{Eh}\right)$ соответственно вышеприведенным случаям, следующие:

$$s_1^4 + s_2^4 + 2s_1^2 s_2^2 \mathrm{ch} s_1 \cos s_2 = s_1 s_2\left(s_1^2 - s_2^2\right)\mathrm{sh} s_1 \sin s_2 \tag{1.11}$$

$$s_1 \mathrm{tg} s_2 = s_2 \mathrm{th} s_1 \tag{1.12}$$

$$1 + \frac{s_1^2 - s_2^2}{2 s_1 s_2} \mathrm{sh} s_1 \sin s_2 = \mathrm{ch} s_2 \cos s_2 \tag{1.13}$$

Заметим, что при $T_1^0 = 0$ (1.11)–(1.15) получаются уравнения, откуда определяются частоты свободных колебаний балки, в том числе, уравнения, приведённые в [2].

Для различных геометрических данных (β, γ) производились численные расчёты. В табл. 1 приведены значения критического давления $10^4 \lambda_{\text{кр}}$. В каждой клетке помещены эти значения в соответствии с (1.11)–(1.13). В каждой строке первые числа получены без учета T_1^0, а вторые – наоборот. В скобках указано число окружных волн, при которых достигается минимум λ.

Таблица 1

γ \ β	100	250	500
0,5	11,13 ; 11,25 ; (10)	2,772 ; 2,793 ; (12)	0,9805 ; 0,9858; (14)
	22,17 ; 21,48 ; (14)	5,810 ; 5,544 ; (17)	2,058 ; 1,991 ; (21)
	26,60 ; 25,92 ; (15)	6,992 ; 6,716 ; (10)	2,479 ; 2,406 ; (23)
1	5,538 ; 5,568 ; (7)	1,409 ; 1,415 ; (10)	0,4899; 0,4911 ; (10)
	11,53 ; 11,15 ; (10)	2,906 ; 2,838 ; (12)	1,033 ; 1, 016 ; (15)
	13,91 ; 13,49 ; (11)	3,513 ; 3,438 ; (13)	1,236 ; 1,218 ; (16)
2	2,783 ; 2,791 ; (5)	0,6931; 0,6943; (7)	0,2451; 0,2455 ; (9)
	5,750 ; 5,650 ; (7)	1,467 ; 1,451 ; (9)	0,5148; 0,5104 ; (10)
	7,054 ; 6,953 ; (8)	1,775 ; 1,753 ; (10)	0,6151; 0,6151 ; (11)
3	1,838 ; 1,841 ; (4)	0,4639; 0,4644; (5)	0,1644; 0,1646 ; (6)
	3,926 ; 3,884 ; (6)	0,9673; 0,9598; (7)	0,3462; 0,3443 ; (8)
	4,621 ; 4,569 ; (6)	1,738 ; 1,166 ; (8)	0,4129; 0,4108 ; (9)

Кроме ожидаемых выводов, связанных с геометрическими, физическими параметрами и граничными условиями, есть факт, который нужно подчеркнуть. Как известно, наличие сжимающего усилия уменьшает значение критического давления (случай свободно опертой оболочки [7.стр.530-531]). Оно имеет место как для задач 2 и 3, так и для нижеприводимых. Однако, для первой задачи учет T_1^0 приводит к обратному эффекту. По-видимому, здесь имеет место аналог устойчивости балки, когда сжимающая сила – следящая. Как известно, в этом случае статический подход не дает никакого ответа, а при динамическом рассмотрении: с увеличением сжимающей силы основная частота увеличивается.

2. Здесь рассмотрим случаи, когда давление меняется по длине $q = q_0(\xi)$. Тогда окружное и продольное усилия будут определяться соответственно:

$$T_2^0 = R q_0(\xi), \; T_1^0 = C = vR \int_0^1 q_0(\xi) d\xi . \tag{2.1}$$

В случае, когда на концах оболочки заданы условия свободного опирания – $W = W^{II} = 0$ при $\xi = 0$ и $\xi = 1$, решение (1.1) будем искать как (1.2), а W – в виде ряда

$$W(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin m\pi\xi . \tag{2.2}$$

Тогда T_2^0 также представляется в виде ряда

$$T_2^0 = Eh\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cos m\pi\xi , \quad T_1^0 = Ehc , \tag{2.3}$$

для коэффициентов w_m получим однородную систему

$$\left[(m\pi)^4 + An^8\right]w_m + \gamma^2 n^4 \left\{ c(m\pi)^2 w_m + \frac{1}{2}\gamma^2 n^2 (2a_0 - a_{2m}) w_m + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=1}^{m-1}(a_{m-q} - a_{m+q}) w_q + \sum_{q=m+1}^{\infty} (a_{q-m} - a_{m+q}) w_q \right\} = 0, \tag{2.4}$$

$$A = \frac{\gamma^4}{2(1-v^2)\beta^2}.$$

Критическое λ определится из условия разрешимости системы (2.4).

Изучим два случая.

а) $q = q_0 \sin \pi\xi$, тогда

$$c = va_0, \; a_0 = \frac{2\lambda}{\pi} \; , \; a_m = \frac{2\lambda}{m^2-1}\left[(-1)^{m+1} - 1\right], \; \lambda = \frac{q_0 R}{Eh}; \tag{2.5}$$

в) $q = q_0 (1 + a\xi)$, тогда

$$c = va_0 \; , \; a_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\alpha\right)\lambda, \; a_m = \frac{2\alpha\lambda}{m^2\pi^2}\left[(-1)^m - 1\right], \; \lambda = \frac{q_0 R}{Eh}. \tag{2.6}$$

Для обоих случаев проведены численные расчёты и результаты приведены в табл. 2 (для случая а)) и в табл. 3 – (для случая в)):

Критическое значение давления определяется из условия разрешимости системы (2.4) – равенства нулю определителя. Практически, оно реализуется обычным образом: берётся конечное число уравнений и в дальнейшем, увеличивая их, останавливаются, убедившись, что процесс сходится. В обсуждаемых примерах вначале брался детерминант десятого порядка и через два-три хода уже достигался сходимости.

В таблицах приведены значения $\delta = 10^3\lambda$.

В скобках приводится количество волн в окружном направлении. В каждой клетке первая строка соответствует значению $v = 0,3$, а вторые – $v = 0,5$. При этом, первые значения соответствуют случаю $T_1^0 = 0$, а вторые – с его учётом.

Как видно из приведённых результатов, учет T_1^0 приводит к уменьшению критического значения $\lambda_{кр}$ и для второй задачи увеличение α приводит к уменьшению $\lambda_{кр}$. Можно отметить ещё, что в обоих случаях суммарная нагрузка, приводящая к потере устойчивости, меньше, чем при равномерном нагружении (первые числа табл.3 при $\alpha = 0$).

Таблица 2

γ \ β	100	250	500
0	0,703 ; 0,691 ; (9) 0,826 ; 0,797 ; (8)	0,177 ; 0,175 0,206 ; 0,202 ; (11)	0,063 ; 0,062 0,073 ; 0,072 ; (13)
2	0,351 ; 0,348 0,404 ; 0,396 ; (6)	0,089 ; 0,088 0,104 ; 0,103 ; (8)	0,032 ; 0,032 0,037 ; 0,036 ; (9)
3	0,233 ; 0,232 0,271 ; 0267 ; (5)	0,06 ; 0,06 0,069 ; 0,068 ; (6)	0,022 ; 0,022 0,025; 0,025 ; (8)

3. Как видно из предыдущего пункта, величины критической нагрузки (суммарная) различны при различных видах распределения. Факт, вообще-то очевидный. В связи в этим, может возникнуть вопрос: при каком распределении суммарная нагрузка будет минимальной. Здесь можно провести аналог с задачами оптимального управления движением упругих систем (напр., [5]). Рассмотрим случай, когда начальное состояние такое, что $T_1^0 = 0$ и граничные условия возмущённого состояния такие, как в предыдущем пункте. Тогда, довольствуясь одночленным приближением и учитывая, что главная форма является $m = 1$, (2.4) можно представить в виде

$$\int_0^1 q(\xi)(1-\cos 2\pi\xi)\,d\xi = M = \min\left(\frac{\pi^4 + An^8}{\gamma^4 n^6}\right)\frac{Eh}{R}. \tag{3.1}$$

Таблица 3

γ \ β	α	100	250	500
1	0	0,925 ; 0,892 ; (9) 1,083 ; 1,005 ; (8)	0,232 ; 0,227 0,270 ; 0,260 ; (11)	0,087 ; 0,081 0,095 ; 0,093 ; (13)
	1	0,614 ; 0,592 ; (9) 0,720 ; 0,668 ; (8)	0,154 ; 0,151 0,179 ; 0,172 ; (11)	0,058 ; 0,054 0,063 ; 0,061 ; (13)
	10	0,150 ; 0,145 ; (9) 0,178 ; 0,165 ; (9)	0,038 ; 0,037 0,044 ; 0,042 ; (11)	0,013 ; 0,013 0,013 ; 0,013 ; (13)
2	0	0,460 ; 0,451 0,530 ; 0,513 ; (6)	0,117 ; 0,115 0,137 ; 0,135 ; (6)	0,042 ; 0,041 0,047 ; 0,046 ; (9)
	1	0,306 ; 0,299 0,352 ; 0,341 ; (6)	0,079 ; 0,078 0,091 ; 0,089 ; (8)	0,027 ; 0,027 0,032 ; 0,031 ; (9)
	10	0,075 ; 0,074 0,086 ; 0,084 ; (6)	0,019 ; 0,019 0,022 ; 0,022 ; (8)	0,007 ; 0,007 0,008 ; 0,008 ; (9)
3	0	0,306 ; 0,302 0,355 ; 0,347 ; (5)	0,079 ; 0,078 0,090 ; 0,088 ; (6)	0,029 ; 0,028 0,032 ; 0,032 ; (8)
	1	0,203 ; 0,201 0,235 ; 0,230 ; (5)	0,052 ; 0,052 0,060 ; 0,059 ; (6)	0,019 ; 0,019 0,021 ; 0,021 ; (8)
	10	0,050 ; 0,045 0,058 ; 0,056 ; (5)	0,013 ; 0,013 0,015 ; 0,015 ; (6)	0,005 ; 0,005 0,005 ; 0,005 ; (8)

Если в виде критерия качества брать минимум функционала [5]

$$I = \int_0^1 q^2(\xi)\, d\xi , \tag{3.2}$$

то задача становится изопериметрической, а $q(\xi)$ сообщает минимум (3.2) и удовлетворяет условию (3.1).

Тогда, составляя

$$Q = q^2 + \mu q\left(1 - \cos 2\pi\xi\right), \tag{3.3}$$

для множителя Лагранжа μ получаем $\mu = -\frac{4}{3}M$, т.е.

$$q = \frac{2}{3}M\left(1 - \cos 2\pi\xi\right) = \frac{4}{3}M \sin^2 \pi\xi . \tag{3.4}$$

Легко проверить, что приведённые в п.2 примеры дают интегралу большее значение, чем (3.4) и сверх того, и суммарная нагрузка больше, чем (3.4).

ЛИТЕРАТУРА

1. Саченков А.В. Об устойчивости цилиндрической оболочки при произвольных краевых условиях под действием равномерного поперечного давления //Изв.Казан.филиала АН СССР. Сер. физ.-мат.наук. 1958. №12. С.127-132.
2. Алфутов Н.А. О зависимости верхнего критического давления цилиндрической оболочки от граничных условий для касательных составляющих перемещений. Теория оболочек и пластин. Ереван: Изд.АН Арм.ССР, 1964. С.193-198.
3. Мовсисян Л.А. Об устойчивости цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями //ПМ. 1978. Т.14. №10. С.52-57.
4. Мовсисян Л.А. Две задачи по устойчивости для цилиндрической оболочки со смешанными граничными условиями при внешнем давлении //Изв.НАН Армении. Механика. 2003. Т.56. №1. С.31-37.
5. Вольмир А.С. Устойчивость упругих систем. М.: ЖГИФ. МЛ.1963. 879с.
6. Габриелян М.С., Мовсисян Л.А. К оптимальному управлению движением упругих систем //Изв.РАН. Механика твердого тела. 1999. №6. С.146-153.

Сведения об авторе:

Мовсисян Лаврентий Александрович,

Доктор тех.наук, профессор, главный научн.сотрудник Института механики НАН Армении.

Адрес: 0019, Ереван, пр.Маршала Баграмяна 24$^{\underline{б}}$. Тел.: 588201

E-mail: mechins@sci.am.

Нерсисян Г.Г. – кандидат физ-мат наук, доцент, старший научн.сотр. Института механики НАН Армении

Тел.: 20-68-79

Поступила в редакцию 05.11.2011