

УДК 539.3

**ТЕРМОУПРУГАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ УДЛИНЁННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ  
ПЛАСТИНКИ В СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА  
БАГДАСАРЯН Г.Е., МИКИЛЯН М.А., САГОЯН Р.О.**

**Ключевые слова:** Флаттер, критическая скорость, тепловое поле, устойчивость  
**Keywords:** Flutter, Critical Speed, Thermal Field, Stability

**Բաղդասարյան Գ.Ե., Միկիլյան Մ.Ա., Սաղոյան Ռ.Օ.**

**Գազի գերձայնային հոսանքով շրջնավոր երկար ուղղանկյուն սալի ջերմաառաձգական  
կայունությունը**

Բազմաթիվ աշխատանքներ կան նվիրված գազի գերձայնային հոսանքով շրջնավոր սալերի ու թաղանթների կայունության ուսումնասիրմանը: Այդ աշխատանքների մասին տեղեկություններ կարելի է ստանալ [1,2] մենագրություններում և [3] ակնարկային հոդվածում: Հետազոտված են նաև գազի գերձայնային հոսանքով շրջնավոր և ջերմային դաշտում գտնվող դեֆորմացվող բարակ մարմինների կայունության հարցերը [4-7]:

Ներկայացվող աշխատանքում գծային դրվածքով դիտարկված է երկար, ուղղանկյուն սալի կայունության խնդիրը ըստ հաստության փոփոխական ջերմային դաշտի և գերձայնային արագությամբ շրջնավոր գազի (սալի կարճ եզրերի ուղղությամբ ազդող չգրգռված արագությամբ) ազդեցության տակ: Ըստ հաստության ջերմային դաշտի անհամասառության պատճառով տեղի է ունենում սալի ծռում և այդ վիճակը ընդունվում է որպես չգրգռված: Ստացված են դիտարկվող ջերմաառաձգական համակարգի չգրգռված վիճակի կայունության պայմանները և դրանց հիման վրա կառուցված է կայունության տիրույթը այն փոփոխականների տարածությունում, որոնք բնութագրում են շրջնաման արագության մեծությունը, սալի միջին հարթության վրա ջերմությունը և ջերմության գրադիենտը նշված հարթության նորմալի ուղղությամբ: Ցույց է տրված, որ ջերմային դաշտի և շրջնաման համատեղ ազդեցությամբ կարելի է ղեկավարել կայունության պրոցեսը և ջերմային դաշտի օգնությամբ կարելի է էապես փոխել ֆլատերի կրիտիկական արագության մեծությունը:

**Baghdasaryan G.Y., Mikilyan M.A., Saghoyan R.O.**

**Thermoelastic stability of long rectangular plate in a supersonic gas flow**

There are several works devoted to the investigation of the stability of plates and shells in a supersonic gas flow. Remarks on these works in monographs [1,2] and in the paper [3] can be found. The issues of the influence of constant temperature field on the stability of deformable thin bodies in a supersonic gas flow are investigated also [4-7].

In this paper, in linear formulation we consider the problem of stability of long rectangular plate under the influence of both variable along the thickness temperature field and supersonic gas flow (with the unperturbed speed, which directed along the short edges of the plate). Due to the inhomogeneity of along the thickness temperature field the buckling of the plate is takes place and this state is taken as unperturbed. Conditions of stability of unperturbed state of examined termogasoelastic system are obtained and on its base the stability area is constructed in the space of variables characterizing the value of the flown speed, the temperature at the middle plane of the plate and the temperature gradient along the normal direction of this plane. It is shown that via the

combined action of the temperature field and the flowing stream one can regulate the process of stability and with the help of temperature field one can significantly change the value of the flutter critical speed.

Имеются многочисленные исследования, посвященные устойчивости пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке газа. Сведения об этих исследованиях можно найти в монографиях [1,2] и в обзорной статье [3]. Исследованы также вопросы влияния постоянного температурного поля на устойчивость деформируемых тонких тел обтекаемых сверхзвуковым потоком газа [4-7].

В настоящей работе в линейной постановке рассмотрена задача устойчивости удлиненной прямоугольной пластинки под действием переменного по толщине температурного поля и обтекающего сверхзвуковым потоком газа (с невозмущенной скоростью, направленной вдоль коротких сторон пластинки). Вследствие неоднородности по толщине температурного поля происходит выпучивание пластинки и это состояние принимается как невозмущенное. Получены условия устойчивости невозмущенного состояния рассматриваемой термогазоупругой системы и на их основе построена область устойчивости в пространстве переменных, характеризующих величину скорости обтекающего потока, температуру на срединной плоскости пластинки и градиента температуры в нормальном направлении к указанной плоскости. Показано, что совместным действием температурного поля и обтекающего потока можно регулировать процесс устойчивости и при помощи температурного поля существенно изменить величину критической скорости флаттера.

## 1. Основные уравнения

Рассмотрим тонкую изотропную прямоугольную пластинку постоянной толщины  $h$ , находящуюся в стационарном температурном поле  $T$ . Введем декартовую систему координат  $(x_1, x_2, x_3)$  так, чтобы срединная плоскость пластинки совпала с координатной плоскостью  $(x_1, x_2)$ . Пусть, пластинка обтекается с одной стороны сверхзвуковым потоком газа с невозмущенной скоростью  $U$ , направленной вдоль оси  $Ox_1$ . Исследуются вопросы устойчивости рассматриваемой аэротермоупругой системы. В основу исследования принимаются следующие известные предположения:

- а) гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях [8];
- б) деформации как невозмущенного, так и возмущенного состояния настолько малы, что можно воспользоваться линейной теорией аэротермоупругости;
- в) “закон плоских сечений” при определении аэродинамического давления [9,10]:

$$p = p_\infty \left( 1 + \frac{\alpha - 1}{2} \frac{v_3^2}{a_\infty^2} \right)^{\frac{2\alpha}{\alpha - 1}}, \quad (1)$$

где  $p$  – давление газа на поверхности пластинки,  $a_\infty$  – скорость звука для невозмущенного газа ( $a_\infty^2 = \alpha p_\infty / \rho_\infty$ ),  $p_\infty$  и  $\rho_\infty$  – давление и плотность газа в

невозмущенном состоянии,  $\kappa$  – показатель политропы,  $V_3$  – нормальная составляющая скорости точек поверхности пластинки;

г) линейный закон изменения температурного поля  $T(x_1, x_2, x_3)$  по толщине пластинки [1]:

$$T = T_0(x_1, x_2) + x_3 \Theta(x_1, x_2); \quad (2)$$

д) гипотеза Неймана об отсутствии сдвигов от изменения температуры [11].

На основе принятых предположений и теории термоупругости изотропного тела получается следующая нелинейная система дифференциальных уравнений движения пластинки [1]:

$$D\Delta^2 w + \alpha(1 + \mu)D\Delta\Theta = q + T_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + T_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2T_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (3)$$

$$\frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 T_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 T_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + \alpha \Delta T_0 = 0.$$

Здесь  $w(x_1, x_2, t)$  – прогиб пластинки,  $D = Eh^3 / 12(1 - \mu^2)$ ,  $E$  – модуль

упругости,  $\mu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент теплового расширения,

$T_{ij}$  – внутренние усилия,  $q$  – поперечная нагрузка, которая складывается из сил

инерции, сил демпфирования и аэродинамического давления  $\Delta p$

$$q = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \rho h \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\kappa p_\infty}{a_\infty} \left( \frac{\partial w}{\partial t} + a_\infty M \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \quad (4)$$

где  $M = U a_\infty^{-1}$  – число Маха для невозмущенного потока,  $\rho$  – плотность материала пластинки,  $\varepsilon$  – коэффициент линейного затухания. Аэродинамическое давление  $\Delta p$  (последний член в (4)) вычислено по формуле (1) в линейном приближении.

Внутренние усилия  $T_{ij}$ , в предположении, что тангенциальными составляющими сил инерции можно пренебречь, удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\frac{\partial T_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} = 0; \quad (5)$$

и согласно обобщенному закону Гука связаны с компонентами деформаций  $\varepsilon_{ij}$  срединной плоскости пластинки формулами:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} [\varepsilon_{11} + \mu\varepsilon_{22} - \alpha(1+\mu)T_0], \\
T_{22} &= \frac{Eh}{1-\mu^2} [\varepsilon_{22} + \mu\varepsilon_{11} - \alpha(1+\mu)T_0], \quad T_{12} = \frac{Eh}{2(1+\mu)} \varepsilon_{12}, \\
\varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x_2} \right)^2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2};
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $u_1(x_1, x_2, t)$  и  $u_2(x_1, x_2, t)$  – тангенциальные перемещения точек срединной плоскости пластинки.

В дальнейшем, для простоты и наглядности принимается, что пластинка в направлении, перпендикулярном к скорости обтекающего потока, достаточно длинная и однородно закреплена по длинным сторонам. В этом случае срединная поверхность изогнутой пластинки будет близка к цилиндрической. Поэтому, направляя ось  $Ox_2$  вдоль длинной стороны, считаем, что все величины (как возмущённого, так и невозмущённого состояния) не зависят от координаты  $x_2$  и перемещение  $u_2$  вдоль оси  $Ox_2$  равно нулю.

Под действием неоднородного по толщине стационарного температурного поля ( $\Theta \neq 0$ ) происходит выпучивание пластинки (с прогибом  $w_T(x_1)$ ) и вследствие этого появляется аэроупругое давление, которое, согласно предположению (в), определяется формулой (1). В линейном приближении для указанного давления получается выражение  $\alpha p_\infty M dw_T / dx_1$ .

На основе приведенных уравнений и соответствующих условий на кромках  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$  пластинки (граничные условия приводятся в ходе изложения) исследуется устойчивость указанного выпученного (невозмущённого) состояния, под действием температурного поля и давления обтекающего сверхзвукового потока газа.

## 2. Определение характеристик невозмущённого состояния

Невозмущённое состояние рассматриваемой гидротермоупругой системы характеризуется стационарным температурным полем  $T$ , вектором упругих перемещений  $\vec{u}_0(u_0^{(1)}, 0, u_0^{(3)})$  и тензором напряжений  $\sigma_{ij}^0$ , возникающие вследствие температурного поля и обтекающего потока.

Для определения характеристик невозмущённого состояния кроме предположений уже принятых во втором параграфе, принимается также следующее: из лицевых поверхностей ( $x_3 = \pm h/2$ ) пластинки происходит теплообмен с

окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана (на поверхностях сохраняется постоянная температура со значениями  $T^+$  и  $T^-$  соответственно), а боковые поверхности ( $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ ) теплоизолированы.

**2.1. Определение температурного поля.** На основе принятых предположений задача определения стационарного температурного поля в пластинке сводится к решению уравнения теплопроводности:

$$\Delta T = 0 \quad (7)$$

в области, занимаемой пластинкой, при следующих поверхностных условиях:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = k(T - T^\pm) \quad \text{при } x_3 = \pm \frac{h}{2} \quad (8)$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = 0 \quad \text{при } x_1 = 0 \text{ и } x_1 = a \quad (9)$$

Сформулированная задача теплопроводности (6)–(8), согласно предположению о линейной зависимости температуры по толщине пластинки, имеет следующее решение:

$$T = T_0 + x_3 \Theta, \quad (10)$$

$$T_0 = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad \Theta = \frac{k(T^+ - T^-)}{2\lambda + kh}.$$

В (7)–(10)  $\Delta$  – двумерный оператор Лапласа,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности,  $k$  – коэффициент теплоотдачи,  $\vec{n}$  – внешняя нормаль поверхности пластинки.

**2.2 Определение термоупругих напряжений и перемещений.** На основе принятых предположений, из основных уравнений, соотношений и граничных условий теории термоупругости тонких пластин имеем:

следующие соотношения:

$$u_0^{(3)} = w_T(x_1), \quad (11)$$

$$u_0^{(1)} = u_T(x_1) - x_3 \frac{dw_T}{dx_1},$$

согласно гипотезам Кирхгоффа;

следующие уравнения, относительно  $u_T$  и  $w_T$ :

$$\frac{d^2 u_T}{dx_1^2} = 0 \quad (12)$$

$$D \frac{d^4 w_T}{dx_1^4} + \alpha p_\infty M \frac{dw_T}{dx_1} = 0 \quad (13)$$

согласно теории тонких пластин;

следующее выражение для напряжения  $\sigma_{11}^0$  невозмущенного состояния

$$\sigma_{11}^0 = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{du_T}{dx_1} - \alpha(1 + \mu)T_0 - x_3 \left( \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1 + \mu)\Theta \right) \right] \quad (14)$$

согласно обобщенному закону Гука.

В силу (14) для осевого усилия  $T_{11}^0$  и изгибающего момента  $M_{11}^0$  имеем:

$$T_{11}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}^0 dx_3 = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{du_T}{dx_1} - \alpha(1+\mu)T_0 \right], \quad (15)$$

$$M_{11}^0 = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{11}^0 dx_3 = -D \left[ \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1+\mu)\Theta \right]. \quad (16)$$

В (14)–(16)  $T_0$  и  $\Theta$  определяются согласно формулам (10).

Решения уравнений (12) и (13) должны удовлетворить условиям закрепления краев пластинки  $x_1 = 0$  и  $x_1 = a$ . Будут рассмотрены краевые условия следующих двух типов:

- края шарнирно опёрты и свободно перемещаются вдоль оси  $0x_1$ ;
- края шарнирно опёрты и неподвижны.

Указанные краевые условия согласно (15) и (16) представляются следующим образом:

**края шарнирно опёрты и свободно перемещаются вдоль оси  $0x_1$**

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1+\mu)\Theta = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad (17)$$

$$\frac{du_T}{dx_1} - \alpha(1+\mu)T_0 = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a; \quad (18)$$

**края шарнирно опёрты и неподвижны**

$$w_T = 0, \quad \frac{d^2 w_T}{dx_1^2} + \alpha(1+\mu)\Theta = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a \quad (19)$$

$$u_T = 0 \quad \text{при } x_1 = 0, x_1 = a. \quad (20)$$

Итак, краевые задачи для определения  $u_T$  и  $w_T$ , согласно уравнениям (12) и (13) и краевым условиям (17)–(20), разделяются. Для определения  $w_T$  как в случае свободно смещающихся, так и в случае неподвижных краёв получается одна и та же краевая задача (13), (17) или (13), (19). Указанная задача имеет следующее решение:

$$w_T(x_1) = -\frac{R\Theta}{\Delta} \left\{ e^{2\varphi(a-x_1)} (1 + e^{2\varphi a}) - (1 + e^{4\varphi a}) + \right. \\ \left. e^{\varphi a} \left[ (1 + e^{2\varphi a} - 2e^{2\varphi(a-x_1)}) \cos \sqrt{3}\varphi a - \sqrt{3} (1 - e^{2\varphi a}) \sin \sqrt{3}\varphi a \right] + \right. \\ \left. + e^{\varphi x_1} (1 - e^{2\varphi a}) \left[ \cos \sqrt{3}\varphi x_1 + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}\varphi x_1 \right] + \right. \\ \left. + e^{\varphi(a+x_1)} (1 - e^{2\varphi a}) \left[ \cos \sqrt{3}\varphi(a-x_1) + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}\varphi(a-x_1) \right] \right\} \quad (21)$$

где

$$\Delta = 4\varphi^2 \left\{ 1 + e^{4\varphi a} - e^{\varphi a} \left[ (1 + e^{2\varphi a}) \cos \sqrt{3}\varphi a + \sqrt{3}(1 - e^{2\varphi a}) \sin \sqrt{3}\varphi a \right] \right\},$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \sqrt[3]{\frac{\pi^4}{4a^3} K v}, \quad R = \alpha(1 + \mu), \quad K = \frac{4\alpha p_\infty}{Dh} \left( \frac{a}{\pi} \right)^4, \quad v = M \frac{h}{a}.$$

Решение задачи для определения  $u_T$ , в зависимости от граничных условий, имеет следующий вид:

$$u_T = \alpha(1 + \mu) T_0 \left( x_1 - \frac{a}{2} \right), \quad T_{11}^0 \equiv 0 \quad (22)$$

в случае свободно смещающихся краёв, и

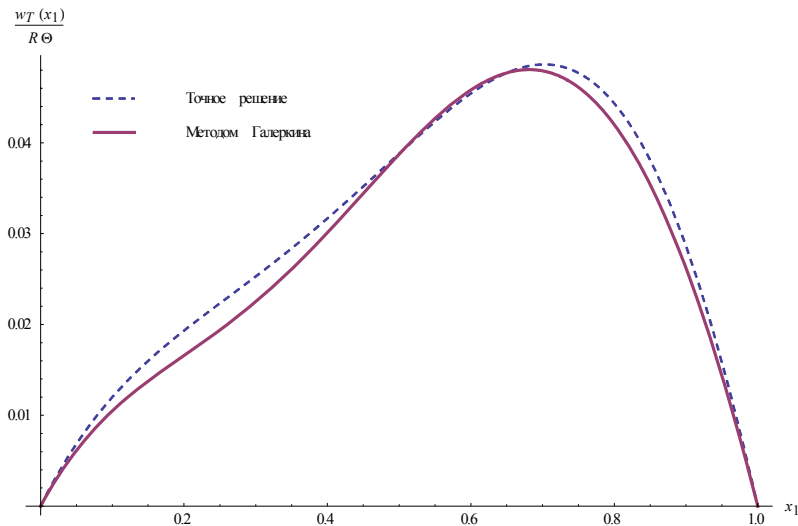
$$u_T \equiv 0, \quad T_{11}^0 = -\frac{Eh\alpha}{1 - \mu} T_0 \quad (23)$$

в случае неподвижных краёв.

С точки зрения дальнейшего применения выражения (21), задача определения  $w_T$  решена также приближённо методом Бубнова-Галеркина и получена следующая формула:

$$w_T(x_1) = -R\Theta \left\{ \frac{1}{2} x_1 (x_1 - a) + \frac{a^2 K v}{36 + K^2 v^2} \left[ \frac{3}{8\pi} K v \sin \frac{\pi x_1}{a} + \frac{9}{16\pi} \sin \frac{2\pi x_1}{a} \right] \right\}. \quad (24)$$

На фиг.1 приведены графики функции  $w_T$ , построенные на основе формул (21) и (24) при  $\alpha=23.8 \cdot 10^{-6}$  град $^{-1}$ ;  $k=1200$  Вт/(м $^2$  град);  $\lambda=210$  Вт/(м град);  $\mu=0.34$ ;  $a=1$ м;  $h/a=1/100$ .



Фиг.1  
Графики функции  $w_T / R\Theta$

Фиг.1 показывает, что значения функции  $w_T$ , определяемые формулами (21) и (24), практически совпадают. Поэтому в дальнейшем, для простоты применений и вычислений используется формула (24).

### 3. Возмущённое состояние

Использованием уравнения движения пластинки (3) и выражения для характеристик невозмущенного состояния, полученные в пункте 2, формулируются краевые задачи, описывающие поведение возмущений (сообщаемые пластинке) под действием рассматриваемого температурного поля и давления потока газа, обтекающего пластинку со сверхзвуковой скоростью. На основе решения сформулированной краевой задачи получены условия устойчивости и исследованы влияния температурного поля на области устойчивости и на критическую скорость флаттера.

#### 3.1 Краевые задачи относительно возмущений невозмущённого состояния.

Здесь будут получены уравнения и соответствующие краевые условия устойчивости рассматриваемой термоупругой системы. С этой целью основные величины, входящие в систему уравнений движения пластинки (3)–(6), представляются в виде суммы двух слагаемых. Первое из этих слагаемых является значением соответствующей величины в невозмущённом состоянии, а второе – возмущением этой величины. Следовательно,

$$\begin{aligned} w &= w_T(x_1) + w(x_1, t), \\ T_{11} &= T_{11}^0 + t_{11}, \\ u_1 &= u_T + u. \end{aligned} \quad (25)$$

Для получения уравнений возмущенного состояния (уравнения относительно возмущений  $u$ ,  $w$  и  $t_{11}$ ) соотношения (25) подставляются в (3)–(6) и учитываются, что:

а) величины, характеризующие невозмущенное состояние, удовлетворяют уравнениям и соотношениям, полученным в пункте 3;

б) величины невозмущенного состояния определены на основе линейной теории термоупругости (подлежащие определению величины входили в соответствующие уравнения и краевые условия линейно);

в) величины, характеризующие как невозмущенное, так и возмущенное состояние, не зависят от координаты  $x_2$ ;

г) в окончательных уравнениях и соотношениях величины, характеризующие невозмущенное состояние, будут присутствовать только в первых степенях.

В результате, из первого уравнения системы (5) получается (второе уравнение этой системы удовлетворяется тождественно):

$$\frac{\partial t_{11}}{\partial x_1} = 0 \quad (26)$$

где возмущение  $t_{11}$ , согласно первому соотношению из (6), формулам (11) и (18), а также представлению (25), определяется следующим образом:

$$t_{11} = \frac{Eh}{1-\mu^2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{2} F(x_1, t) \right], \quad F(x_1, t) = 2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1}. \quad (27)$$



Из (26) следует, что если края пластинки свободно смещаются ( $t_{11} = 0$  при  $x_1 = 0, x_1 = a$ ), то

$$t_{11} \equiv 0. \quad (28)$$

В случае же неподвижных краёв ( $u = 0$  при  $x_1 = 0, x_1 = a$ ), из (26) и (27) путем интегрирования получается:

$$u(x_1, t) = \frac{x_1}{2a} \int_0^a F(x_1, t) dx_1 - \int_0^{x_1} F(\xi, t) d\xi. \quad (29)$$

Подставляя (29) в (27), для возмущений  $t_{11}$  осевого усилия в случае неподвижных краев найдем:

$$t_{11} = \frac{Eh}{2a(1-\mu^2)} \int_0^a F(x_1, t) dx_1. \quad (30)$$

Наконец, из первого уравнения системы (3) с учетом (6), (23), (28) и (30) получается следующее основное дифференциальное уравнение относительно возмущения  $w(x_1, t)$  поперечного перемещения пластинки:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} - N_1^T \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \left( \rho h \varepsilon + \frac{\alpha p_\infty}{a_\infty} \right) \frac{\partial w}{\partial t} + \alpha p_\infty M \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} p_\infty M^2 \frac{dw_T}{dx_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad (31)$$

В (31) введены следующие обозначения:

$$N_1^T = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ -\frac{Eh}{1-\mu} \alpha T_0, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases} \quad (32)$$

Решения уравнения (31) должны удовлетворять следующим условиям:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a \quad (33)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0, \quad x_1 = a \quad (34)$$

которые вытекают из условий шарнирного опирания краев пластинки.

Отметим, что присутствие последнего члена в уравнении (31) обусловлено искривленностью невозмущенного состояния пластинки (вследствие того, что  $\Theta \neq 0$ ). Величина этого члена вычислена при помощи линеаризации выражения  $(\partial w / \partial t)^2$ , входящего в разложение аэродинамической силы (1).

Таким образом, исследование поведения возмущений, сообщаемых находящейся в неоднородном температурном поле и обтекающейся сверхзвуковым потоком газа пластинке, сведена к решению нелинейной однородной краевой задачи (31)–(33).

**3.2. Сведение к задаче устойчивости, описываемой системой обыкновенных дифференциальных уравнений.** Решение уравнения (31), удовлетворяющее условиям (33), представим в виде

$$w(x_1, t) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(t) \sin \lambda_m x_1, \quad \left( \lambda_m = \frac{m\pi}{a} \right), \quad (35)$$

где  $f_m(t)$  – подлежащие определению функции времени  $t$ .

Подставляя (35) в уравнение (31) и используя процесс ортогонализации, после некоторых преобразований приходим к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно безразмерных функций  $x_m = f_m / h$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_k}{d\tau^2} + \frac{1}{\omega_1} \left( \varepsilon + \frac{a_{\infty} p_{\infty}}{\rho h} \right) \frac{dx_k}{d\tau} + \frac{\omega_k^2}{\omega_1^2} x_k - \bar{T} k^2 x_k \delta + \frac{Kv}{2} k \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{1 - (-1)^{k+m}}{k^2 - m^2} x_m + \\ + \frac{\varkappa + 1}{4} K v^2 \frac{a}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m a_{mk} x_m = 0, \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (36)$$

где

$$\omega_1 t = \tau, \quad \bar{T} = \frac{12}{\pi^2} \left( \frac{a}{h} \right)^2 RT_0, \quad \chi = \frac{1}{\omega_1} \left( \varepsilon + \frac{a_{\infty} p_{\infty}}{\rho h} \right), \quad \omega_k^2 = \frac{D}{\rho h} \lambda_k^4,$$

$$a_{mk} = \int_0^a \frac{dw_T}{dx_1} \sin \lambda_k x_1 \cos \lambda_m x_1 dx_1.$$

В (36)  $\omega_i$  – частоты собственных колебаний,  $\chi$ ,  $v$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$  – параметры, характеризующие соответственно процесс затухания, скорость обтекающего потока и температурного поля,

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{когда края пластинки свободно смещаются,} \\ 1, & \text{когда края пластинки неподвижны.} \end{cases}$$

В дальнейшем ограничимся случаем двухчленной аппроксимации [1]:

$$w = f_1(t) \sin \lambda_1 x + f_2(t) \sin \lambda_2 x,$$

принимая ее как первое приближение. Тогда, в силу (24), система (36) примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_1}{d\tau} + (1 - \bar{T} \delta) x_1 - \frac{2}{3} K v x_2 + \bar{\Theta} [\delta_{11}^{\ominus} x_1 + \delta_{12}^{\ominus} x_2] = 0, \\ \frac{d^2 x_2}{d\tau^2} + \chi \frac{dx_2}{d\tau} + (\gamma^2 - 4\bar{T} \delta) x_2 + \frac{2}{3} K v x_1 + \bar{\Theta} [\delta_{21}^{\ominus} x_1 + \delta_{22}^{\ominus} x_2] = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

где введены следующие обозначения:

$$\bar{\Theta} = R \Theta h \left( \frac{a}{h} \right)^2 \frac{1}{36 + K^2 v^2}, \quad \gamma = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (38)$$

а также следующие коэффициенты  $\delta_{ij}^{\ominus}$ , учитывающие взаимодействие температуры и обтекающего потока с колеблющейся пластинкой:

$$\begin{aligned}\delta_{11}^{\ominus} &= \frac{9}{4}(\varkappa + 1)Kv^2, \quad \delta_{12}^{\ominus} = -\frac{21}{40}(\varkappa + 1)K^2v^3, \\ \delta_{21}^{\ominus} &= -\frac{3}{40}(\varkappa + 1)K^2v^3, \quad \delta_{22}^{\ominus} = \frac{1}{80}(\varkappa + 1)Kv^2(180 + K^2v^2).\end{aligned}\tag{39}$$

Таким образом, задача устойчивости рассматриваемой гидроупругой системы в первом приближении сведена к исследованию поведения решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (37) в зависимости от величины скорости обтекающего потока газа (от величины параметра  $v$ ) и температуры (от величин  $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$ ).

#### 4. Условия и область устойчивости

Отметим, что при отсутствии обтекающего потока ( $v = 0$ ), когда  $\delta = 1$ , система (37) допускает следующие решения:  $x_1 = \text{const} \neq 0$ ,  $x_2 = 0$  и  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \text{const} \neq 0$ , отходящие от тривиального решения  $x_1 = x_2 = 0$  при

$$\bar{T} = 1 \quad \text{или} \quad T_{0*}^{(1)} = \frac{\pi^2}{12R} \left( \frac{h}{a} \right)^2\tag{40}$$

в случае первого решения ( $x_1 = \text{const} \neq 0$ ,  $x_2 = 0$ ) и при

$$4\bar{T} = \gamma^2 \quad \text{или} \quad T_{0*}^{(2)} = \frac{\pi^2 \gamma^2}{48R} \left( \frac{h}{a} \right)^2\tag{41}$$

в случае второго решения ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \text{const} \neq 0$ ). Первое решение соответствует выпучиванию пластинки по одной полуволне, второе – выпучиванию по двум полуволнам. Формулами (40) и (41) определяются критические значения температуры  $T_0$ , при которых пластинка теряет статическую устойчивость по формам, указанным выше.

Представляя решение системы (37) в виде  $x_1 = y_1 e^{\lambda \tau}$ ,  $x_2 = y_2 e^{\lambda \tau}$ , получим следующее характеристическое уравнение относительно  $\lambda$ :

$$a_0 \lambda^4 + a_1 \lambda^3 + a_2 \lambda^2 + a_3 \lambda + a_4 = 0\tag{42}$$

где

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 2\chi$$

$$a_2 = 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus}) + \chi^2, \quad a_3 = \left[ 1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^{\ominus} + \delta_{22}^{\ominus}) \right] \chi$$

$$a_4 = (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2v^2 + (\delta_{11}^\ominus\delta_{22}^\ominus - \delta_{12}^\ominus\delta_{21}^\ominus)\bar{\Theta}^2 + \\ + \left( \gamma^2(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) - (4\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)\bar{T}\delta \right)\bar{\Theta}.$$

Невозмущенная форма пластинки будет устойчива, если действительные части корней характеристического уравнения будут отрицательными. Следовательно, условия устойчивости, согласно теореме Гурвица, записываются в виде:

$$a_i > 0 \quad (i = 0, 1, \dots, 4), \quad \Delta_3 = a_1a_2a_3 - a_1^2a_4 - a_3^2a_0 > 0 \quad (43)$$

Первые два неравенства, которые требуют, чтобы затухание (внутреннее и аэродинамическое) было положительным, выполняются во всех случаях. Третье условие выполняется, если выполняется четвертое условие. Из остальных условий получим следующие неравенства, определяющие область устойчивости рассматриваемой термоупругой системы в пространстве параметров  $v$ ,  $\bar{T}$ ,  $\bar{\Theta}$ :

$$1 + \gamma^2 - 5\bar{T}\delta + \bar{\Theta}(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) > 0 \\ (1 - \bar{T}\delta)(\gamma^2 - 4\bar{T}\delta) + \frac{4}{9}K^2v^2 + (\delta_{11}^\ominus\delta_{22}^\ominus - \delta_{12}^\ominus\delta_{21}^\ominus)\bar{\Theta}^2 + \\ + \left( \gamma^2(\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus) - \frac{2}{3}Kv(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) - (4\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)\bar{T}\delta \right)\bar{\Theta} > 0 \quad (44) \\ (\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2v^2 + 2\chi^2(\gamma^2 + 1) - (6(\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus)\bar{\Theta} + 10\chi^2)\bar{T}\delta + \\ + 2\left( (\gamma^2 - 1)(\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus) + \frac{4}{3}Kv(\delta_{12}^\ominus - \delta_{21}^\ominus) + (\delta_{11}^\ominus + \delta_{22}^\ominus)^2\chi^2 \right)\bar{\Theta} + \\ + (4\delta_{12}^\ominus\delta_{21}^\ominus + (\delta_{22}^\ominus - \delta_{11}^\ominus)^2)\bar{\Theta}^2 > 0.$$

Если влиянием затухания можно пренебречь (формально  $\chi = 0$ ), то вместо (42) получается биквадратное уравнение, и, поэтому, условиями устойчивости будут:

$$a_2 > 0, \quad a_4 > 0, \quad a_2^2 - 4a_4 > 0. \quad (45)$$

Исследование области устойчивости рассматривается поэтапно:

1)  $\bar{T} \neq 0$ ,  $\bar{\Theta} = 0$ ; 2)  $\bar{T} = 0$ ,  $\bar{\Theta} \neq 0$ ; 3) общий случай  $\bar{T} \neq 0$ ,  $\bar{\Theta} \neq 0$ .

1) *Случай постоянного температурного поля* ( $\Theta = 0$ ). В этом случае, когда  $\delta = 1$  (т.е. когда края пластинки неподвижны), условия (44) существенно упрощаются и принимают вид:

$$1 - \gamma^2 - 5\bar{T} > 0, \quad (1 - \bar{T})(\gamma^2 - 4\bar{T}) + \frac{4}{9}K^2v^2 > 0, \quad (46)$$

$$(\gamma^2 - 1 - 3\bar{T}\delta)^2 - \frac{16}{9}K^2v^2 > 0.$$

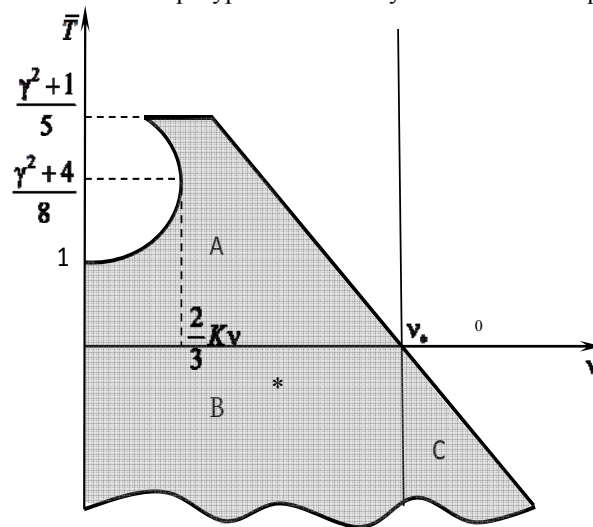
А если  $\delta = 0$  (т.е. когда края пластинки свободно смещаются), то первые два условия из (44) выполняются во всех случаях, а из третьего условия получается следующая формула для определения критической скорости флаттера в случае выбранной формы потери устойчивости пластинки:

$$v_* = \frac{3}{4} \frac{\gamma^2 - 1}{K} \sqrt{1 + \frac{2\chi^2(\gamma^2 + 1)}{(\gamma^2 - 1)^2}}. \quad (47)$$

Формула (47) совпадает с известной формулой, полученной в [1] и показывает, что постоянное температурное поле не влияет на области устойчивости, если края пластинки свободно смещаются.

Неравенства (46) позволяют построить область устойчивости на плоскости  $(v, T_0)$ .

Указанная область приведена на фиг.2, где  $v_*^0$  – критическое значение обтекающего потока, когда влияние температурного поля не учитывается. Из фиг. 2 видно, что:



Фиг.2

Область устойчивости при постоянном температурном поле

- а) если  $T_0 > 0$ , то температурное поле существенно сужает область устойчивости (полулобса  $(0 < v < v_*, T_0 > 0)$  превращается в область  $A$ ),
- б) если  $T_0 < 0$ , то температурное поле существенно увеличивает область

устойчивости (вместо  $B$  областью устойчивости является  $B \cup C$ ).

Для наглядности, в табл.1 приведены значения  $v_*$  в зависимости от  $T_0$  при различных  $h/a$ . Для расчёта здесь и дальнейшем принято:  $\alpha=23.8 \times 10^{-6}$  град $^{-1}$ ;  $k=1200$  Вт/(м $^2$  град);  $\lambda=210$  Вт/(м град);  $\mu=0.34$ ;  $a=1$ м;  $h/a=1/100$ .

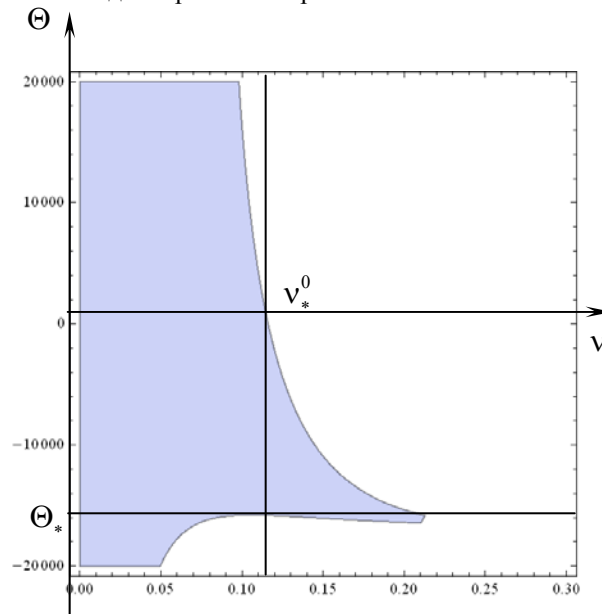
Таблица 1. Влияние постоянного температурного поля на критическую скорость

$\begin{matrix} \theta, T_0 \\ h/a \end{matrix}$	-100	-50	0	5	50
1/50	5.4622	3.6604	1.8586	1.6785	0.05687
1/80	1.6912	0.9874	0.2836	0.06165	Неуст.
1/100	1.01705	0.5667	0.1162	0.0711	Неуст.
1/300	0.1015	0.05148	0.001434	Неуст.	Неуст.

Случай присутствия постоянного температурного поля в той или иной постановке исследован многими авторами, в частности, этому случаю посвящены работы [4-7].

**2) Влияние градиента температуры на область устойчивости ( $\bar{T} = 0, \bar{\Theta} \neq 0$ ).**

В этом случае условиями устойчивости будут (44) при  $T_0 = 0$ , причем указанные условия не зависят от вида закрепления краев пластинки в своей плоскости.



Фиг. 3  
Область устойчивости при  $T_0 = 0$

На основе условий (44) построена область устойчивости на плоскости  $(v, \Theta)$  при тех же исходных данных, что приведены в предыдущем случае.

На фиг.3 приведена часть области устойчивости, соответствующая умеренным температурным полям. Из фиг.3 видно, что: а) если  $\Theta > 0$ , то температурное поле заметно сужает область устойчивости; б) если  $\Theta < 0$ , то до некоторого определённого отрицательного значения  $\Theta_*$  область устойчивости заметно увеличивается, после чего, с увеличением  $|\Theta|$  происходит существенное уменьшение области устойчивости.

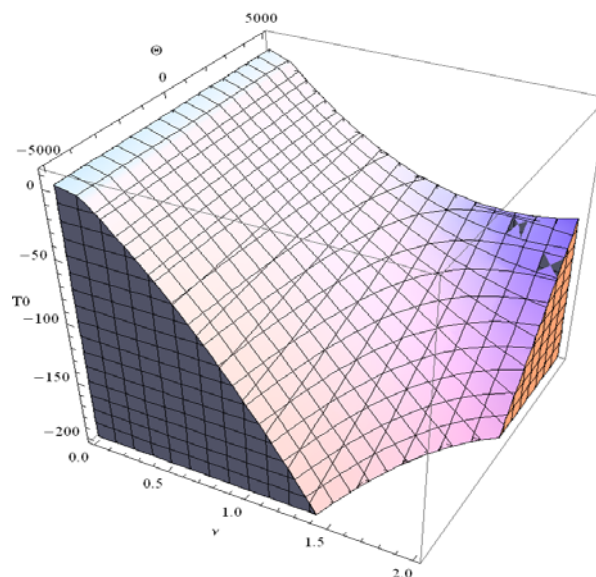
Для наглядности, в табл.2 приведены значения  $v_*$  в зависимости от  $\Theta$  при приведённых выше исходных данных и различных  $h/a$ .

Таблица 2. Влияние градиента температуры на критическую скорость

$\Theta c^0 / m$ h/a	-5000	-2500	0	2500	5000
1/50	2.5164	2.1183	1.8586	1.5702	1.4895
1/80	0.3509	0.3084	0.2836	0.2671	0.2554
1/100	0.1266	0.1208	0.1162	0.1124	0.1093
1/300	0.001437	0.001436	0.001434	0.001432	0.00143

Табл. 2 показывает, что влияние градиента температуры на критическую скорость является существенным в случае сравнительно толстых пластин.

**3) Общий случай ( $T \neq 0, \Theta \neq 0$ ).** В этом случае, при тех же исходных данных произведён численный анализ неравенств (44). Результаты вычислений приведены на фиг. 4 и в табл.3.



Фиг.4  
Область устойчивости в общем случае

**Таблица 3. Общий случай при  $h/a=1/100$**

$\Theta, ^\circ C / m$ $^0 c, T_0$	-5000	-2500	0	2500	5000
-200	1.4152	1.5818	1.9179	Уст.	Уст.
-100	0.8755	0.9286	1.01705	1.1989	Уст.
-50	0.5433	0.5513	0.5667	0.5918	0.6347
0	0.1266	0.1208	0.1162	0.1124	0.1093
5	0.0765	0.0735	0.0711	0.0396	0.0367
7	0.05515	0.05363	0.0531	0.0437	0.04166

Фиг.4 и табл.3 демонстрируют результаты рассмотренных выше частных случаев и показывают, что если обе составляющие температурного поля отличны от нуля, то влияние температурного поля на область устойчивости может оказаться более существенным.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Физматгиз, 1961. 339 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. М.:Наука, 1972. 432 с.
3. Новичков Ю.Н. Флаттер пластин и оболочек //Итоги науки и технологии. Механика деформируемых твердых тел. 1978. Т.11. С.67-122.
4. Болотин В.В. Температурное выпучивание пластин и пологих оболочек в сверхзвуковом потоке газа. //В сб.: “Расчеты на прочность”. М.: Машгиз. 1060. Вып.6.
5. Hoff N.I. Thermal buckling of supersonic wing panels. Journ. Aeronaut. Sci., v.23, N11, 1956.
6. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Выпучивание и установившийся флаттер термически сжатых панелей, находящихся в сверхзвуковом потоке. //Инж. журнал. 1961. Т.1. N2. С.82-96.
7. L. Librescu, P. Marzocca, W.A. Silva, “Linear/Nonlinear Supersonic Panel Flutter in a High-Temperature Field,” Journal of Aircraft, Vol. 41, No. 1, July – August 2004, pp. 918-924.
8. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949.
9. Илюшин А.А. Закон плоских сечений при больших сверхзвуковых скоростях. //ПМ. 1956. Т.XX. Вып.6.
10. Ashley H., Zartarian C. Piston theory – a new aerodynamic tool for the aeroelastician. Journ. Aeronaut. Sci. 23, N6, 1956.
11. Новацкий В. Вопросы термоупругости. М.: Изд. АН СССР, 1962.

#### Сведения об авторах:

**Багдасарян Геворг Ервандович** – академик НАН Армении, профессор, ЕГУ, факультет информатики и прикладной математики  
Тел.: (010) 552964; E-mail: [gevorgb@rau.am](mailto:gevorgb@rau.am)

**Микилян Марине Александровна** – к.ф.м.н., доцент, РАУ, факультет прикладной математики и информатики  
Тел. 010 726957; E-mail: [mikilyan@rau.am](mailto:mikilyan@rau.am)

**Сагоян Рафаэль Оникович** – внештатный работник института Механики НАН Армении, Тел. 093 248226; E-mail: [rafael1984@mail.ru](mailto:rafael1984@mail.ru).

Поступила в редакцию 20.10. 2011