ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №4, 2011 Механика

УДК 539.3

ПРИКЛАДНЫЕ МОДЕЛИ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ АНИЗОТРОПНЫХ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ТОНКИХ БАЛОК

АЛВАДЖЯН Ш. И., САРКИСЯН С.О.

Ключевые слова: микрополярность, анизотропия, упругость, тонкая балка, прикладная модель, прочность, жесткость.
Key words: micropolar, anisotropy, elasticity, thin bars, applied model, the strength, the stiffness.

Ալվաջյան Շ. Ի., Սարգսյան Ս. Հ.
Անիզոտրոպ միկրոպոլյար առաձգական բարակ ձողերի ստատիկ դեֆորմացիայի կիրառական մոդելները

Աշխատանքում ձևակերպվում են ընդունելություններ (վարկածներ), որոնք ունեն ասիմպտոտիկ հիմնավորվածություն և որոնց հիման վրա անիզոտրոպ միջավայրի համար առաձգականության միկրոպոլյար տեսության երկչափ եզրային խնդիրը բարակ ուղղանկյուն տիրույթում բերվում է միաչափ խնդրի: Կախված ֆիզիկական անչափ պարամետրերի արժեքներց, կառուցված են անկախ պտույտներով, կաշկանդված պտույտներով, <<փոքր սահքային կոշտությամբ>> միկրոպոլյար անիզոտրոպ առաձգական բարակ ձողերի կիրառական մոդելները, որոնցում լիովին հաշվի են առնվում ընդլայնական սահքային դեֆորմացիաները:

Alvajyan Sh. I., Sargsyan S. H.
Applied Models of Static Deformation of Anisotropic Micropolar Elastic Thin Bars

In this paper, using the method of hypothesis, which has an asymptotic study, two dimension boundary problem of micropolar elasticity theory for an anisotropic surrounding in a thin rectangular aria is reduced to the applied one-dimensional problem and, depending on the values of the dimensionless physical parameters used to construct general models of micropolar anisotropic elastic thin bars with free rotation, with constrained rotation, "with small shift rigidity", in which fully takes into account the transverse shearing and related deformation.

В данной работе при помощи метода гипотез, имеющих асимптотическое обоснование, двумерная краевая задача микрополярной теории упругости для анизотропной среды в области тонкого прямоугольника сводится к прикладной одномерной задаче и, в зависимости от значений безразмерных физических параметров, построены общие модели микрополярных анизотропных упругих тонких балок со свободным вращением; со стесненным вращением; “с малой сдвиговой жесткостью”, при которых полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Введение. Микрополярная (несимметричная, моментная) теория упругости в настоящее время трактуется как математическая модель упругих тел с внутренней структурой [1-3]. С этой точки зрения весьма актуально построение моделей для микрополярных упругих тонких балок, пластин и оболочек. В работах [4-6] на основе метода гипотез, имеющих асимптотическое обоснование, построены общие теории микрополярных упругих изотропных тонких балок, пластин и оболочек.

В работе [7] при помощи асимптотического метода изучено математическое поведение решения плоской задачи микрополярной теории упругости для анизотропного (ортотропного) материала в тонкой прямоугольной области.

В данной работе развивается подход работ [4-6] на основе асимптотических свойств решения плоской задачи микрополярной теории упругости для ортотропного материала [7], формулируются гипотезы и в зависимости от значений физических безразмерных параметров построены модели микрополярных упругих ортотропных тонких балок со свободным вращением, со стесненным вращением, “с малой сдвиговой жесткостью”.

1.Постановка задачи. Рассмотрим ортотропный микрополярно-упругий параллелепипед постоянной высоты $2h$, длины a и постоянной толщины, равной

$2h_1 = 1$. Координатную плоскость $x_1 x_2$ разместим в срединной плоскости параллелепипеда. Ось x_2 будет направлена по высоте, а ось x_1 – по длине параллелепипеда и делит высоту $2h$ пополам. Будем считать, что в параллелепипеде по направлению оси x_3 осуществлено плоское напряженное состояние.

Основные уравнения плоской задачи микрополярной теории упругости для анизотропного (ортотропного) материала с независимыми полями перемещений и вращений имеют вид [8]:

Уравнения равновесия –

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \mu_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \mu_{23}}{\partial x_2} + \sigma_{12} - \sigma_{21} = 0. \tag{1.1}$$

Физико-геометрические соотношения –

$$\begin{aligned}
\gamma_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{A_{22}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{11} - \frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{22}, \\
\gamma_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = -\frac{A_{12}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{11} + \frac{A_{11}}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}\sigma_{22}, \\
\gamma_{12} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \omega_3 = \frac{A_{88}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{12} - \frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{21}, \\
\gamma_{21} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \omega_3 = -\frac{A_{78}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{12} + \frac{A_{77}}{A_{77}A_{88} - A_{78}^2}\sigma_{21}, \\
\chi_{13} &= \frac{\partial \omega_3}{\partial x_1} = \frac{1}{B_{66}}\mu_{13}, \; \chi_{23} = \frac{\partial \omega_3}{\partial x_2} = \frac{1}{B_{44}}\mu_{23}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь, $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{21}, \sigma_{22}$ – силовые напряжения; μ_{13}, μ_{23} – моментные напряжения, $\gamma_{11}, \gamma_{22}, \gamma_{12}, \gamma_{21}$ – деформации; χ_{13}, χ_{23} – изгиб-кручение, u_1, u_2 – линейные перемещения, ω_3 – независимый поворот точек прямоугольника $(0 \le x_1 \le a, \; -h \le x_2 \le h)$ вокруг оси x_3, величины A и B с соответствующими индексами представляют собой упругие константы микрополярно-ортотропного материала.

На лицевых линиях прямоугольника $x_2 = \pm h$ считаются заданными силовые и моментные граничные условия (будем рассматривать задачу изгиба):

$$\sigma_{21} = \frac{1}{2}\left(X^+ - X^-\right), \; \sigma_{22} = \pm\frac{1}{2}\left(Y^+ + Y^-\right), \; \mu_{23} = \pm\frac{1}{2}\left(M^+ + M^-\right). \tag{1.3}$$

На кромках $\left(x_1 = 0, \; x_1 = a\right)$ прямоугольника примем нижеследующие варианты граничных условий плоской задачи микрополярной теории упругости:

1) $\sigma_{11} = \varphi_1\left(x_2\right), \sigma_{12} = \varphi_2\left(x_2\right), \; \mu_{13} = \varphi_3\left(x_2\right),$ (задача 1) (1.4)

2) $\sigma_{11} = \varphi_1\left(x_2\right), \; u_2 = 0, \; \mu_{13} = \varphi_3\left(x_2\right),$ (задача 2) (1.5)

3) $u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad \omega_3 = 0.$ (задача 3) (1.6)

Иногда более удобно вместо формул для γ_{12} и γ_{21} из (1.2) рассматривать их сумму и разность, т.е.

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}=\frac{A_{88}-A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{12}+\frac{A_{77}-A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sigma_{21}, \tag{1.7}$$

$$\omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)-\frac{A_{88}+A_{78}}{2\left(A_{77}A_{88}-A_{78}^2\right)}\sigma_{12}+\frac{A_{77}+A_{78}}{2\left(A_{77}A_{88}-A_{78}^2\right)}\sigma_{21}. \tag{1.8}$$

Функционал для вариационного принципа (типа принципа Рейсснера) для краевой задачи (1.1)-(1.4) плоской микрополярной теории упругости для ортотропного тела выражается следующим образом:

$$\begin{gathered}
I=\iint\limits_{(s)}\left(W(\gamma_{ij},\chi_{i3})-\sigma_{11}\left(\gamma_{11}-\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)-\sigma_{22}\left(\gamma_{22}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)-\sigma_{12}\left(\gamma_{12}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\omega_3\right)\right)-\right.\\
\left.-\sigma_{21}\left(\gamma_{21}-\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\omega_3\right)\right)-\mu_{13}\left(\chi_{13}-\frac{\partial\omega_3}{\partial x_1}\right)-\mu_{23}\left(\chi_{23}-\frac{\partial\omega_3}{\partial x_2}\right)\right)ds-\int\limits_0^a\left(\frac{1}{2}(X^+-X^-)u_1+\right.\\
\left.\left.+\frac{1}{2}(Y^++Y^-)u_2+\frac{1}{2}(M^++M^-)\omega_3\right)\right|_{x_2=+h}dx_1-\int\limits_0^a\left(-\frac{1}{2}(X^+-X^-)u_1+\frac{1}{2}(Y^++Y^-)u_2+\right.\\
\left.\left.+\frac{1}{2}(M^++M^-)\omega_3\right)\right|_{x_2=-h}dx_1+\int\limits_{-h}^{+h}\left.\left(\varphi_1u_1+\varphi_2u_2+\varphi_3\omega_3\right)\right|_{x_1=0}dx_2-\\
-\int\limits_{-h}^{+h}\left.\left(\varphi_1u_1+\varphi_2u_2+\varphi_3\omega_3\right)\right|_{x_1=a}dx_2,
\end{gathered} \tag{1.9}$$

где

$$W\left(\varepsilon_{ij},\chi_{i3}\right)=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{2A_{22}}\gamma_{11}^2+\frac{A_{77}}{2}\gamma_{12}^2+A_{78}\gamma_{12}\gamma_{21}+\frac{A_{88}}{2}\gamma_{21}^2+\frac{B_{66}}{2}\chi_{13}^2+\frac{B_{44}}{2}\chi_{23}^2 \tag{1.10}$$

представляет собой плотность потенциальной энергии деформации.

Предполагается, что высота прямоугольника мала по сравнению с его длиной $(2h \ll a)$. Будем исходить из следующей основной концепции: в статическом случае напряженно-деформированное состояние (НДС) тонкого прямоугольника состоит из внутреннего НДС, охватывающего всю область прямоугольника и погранслоев, локализирующихся вблизи торцов прямоугольника $x_1=0$ и $x_1=a$. Построение прикладной одномерной модели микрополярных балок тесно связано с построением внутренней задачи.

Считая, что метод гипотез, наряду с чрезвычайной наглядностью, очень быстро и относительно просто для инженерной практики приводит к окончательным результатам, будем строить модель микрополярных ортотропных балок на основе метода гипотез. Сами гипотезы будем формулировать на основе результатов асимптотического анализа краевой задачи (1.1)-(1.6) в тонкой прямоугольной области [7].

2. Модель изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений. Рассмотрим случай, когда следующие безразмерные физические параметры балки имеют значения [7]:

$$\begin{gathered}
\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\ \frac{A_{88}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\\
\frac{A_{78}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\quad \frac{A_{77}A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\quad \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim 1,\quad \frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim 1.
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Как показывает асимптотический анализ краевых задач (1.1)-(1.6) в тонкой прямоугольной области [7], при выполнении условий (2.1) в асимптотических приближениях имеет место свободное вращение (т.е. поворот ω_3 не зависит от компонент вектора перемещений u_1, u_2).

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевых задач (1.1)-(1.6) в тонкой прямоугольной области [7] позволяют распространить подход работы [6] при построении модели микрополярной изотропной балки на случай микрополярной анизотропии и в основу ставить следующие достаточно общие предположения (гипотезы):

а) нормальный элемент, первоначально перпендикулярный к оси симметрии прямоугольника x_1, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной оси, свободно вращается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Вследствие этого имеем линейный закон изменения перемещений u_1, u_2 и свободного поворота ω_3 по толщине прямоугольника:

$$u_2 = w\left(x_1\right), \quad u_1 = x_2\psi\left(x_1\right), \quad \omega_3 = \Omega_3\left(x_1\right), \tag{2.2}$$

где w – прогиб балки; Ω_3 – угол свободного поворота, а ψ – полный угол поворота нормального элемента.

Как убедимся, в смысле перемещений представленная гипотеза представляет собой известную классическую гипотезу Тимошенко для упругих балок [9], поэтому гипотезу (2.2) полностью назовем, как в работах [4-6], обобщенной кинематической гипотезой Тимошенко в случае микрополярных балок.

Кинематическая гипотеза (2.2) дополняется следующими статическими гипотезами:

б) при определении деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений, для силового напряжения σ_{21} сначала примем

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}\left(x_1\right). \tag{2.3}$$

После определения указанных величин, окончательно, значение σ_{21} определим как сумму значения (2.3) и результата интегрирования первого уравнения равновесия из (1.1), для которого потребуем, чтобы усреднённое по высоте прямоугольника величина была равна нулю.

в) силовое напряжение σ_{22} в уравнениях (1.2) пренебрежём относительно σ_{11}.

Отметим, что гипотеза б) отличается от соответствующей гипотезы Тимошенко в классическом случае. На основе гипотез а), б) и в), нижепостроенная теория микрополярных упругих тонких балок, как и соответствующие теории для микрополярных изотропных балок работы [6], будет асимптотически точной теорией.

В соответствии с принятыми законами распределения перемещений и поворота (2.2), а также, предположением б), для деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений из (1.1)-(1.6) получим следующие формулы:

$$\begin{gathered}\gamma_{21} = \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3, \quad \gamma_{12} = \Gamma_{12} = \frac{dw}{dx_1} - \Omega_3, \quad \gamma_{11} = x_2 K_{11}, \quad \chi_{13} = \kappa_{13}, \\ \gamma_{22} = 0, \quad \chi_{23} = 0, \quad K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \quad \kappa_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}\end{gathered} \tag{2.4}$$

$$\sigma_{11}=x_2\overset{1}{\sigma}_{11}(x_1),\ \overset{1}{\sigma}_{11}=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}K_{11},\ \mu_{23}=x_3\frac{M^++M^-}{2h},\ \mu_{13}=B_{66}\kappa_{13},$$

$$\sigma_{12}=A_{77}\Gamma_{12}+A_{78}\Gamma_{21},\ \sigma_{22}=x_2\frac{Y^++Y^-}{2h},\ \sigma_{21}=\overset{0}{\sigma}_{21}(x_1)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{x_2^2}{2}\right)\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}(x_1)}{dx_1}. \tag{2.5}$$

С целью приведения двумерной задачи (1.1)-(1.6) к прикладной одномерной, что уже выполнено для деформаций, изгиба-кручений, перемещений, поворота, силовых и моментных напряжений (формулы (2.2),(2.4),(2.5)), в теории микрополярных ортотропных балок вместо компонент тензоров силового и моментного напряжений вводим статически эквивалентные им интегральные по высоте прямоугольника характеристики – усилия (N_{12},N_{21}) и моменты (M_{11},L_{13}):

$$N_{12}=\int_{-h}^{h}\sigma_{12}dx_2,\ N_{21}=\int_{-h}^{h}\sigma_{21}dx_2,\ M_{11}=\int_{-h}^{h}x_2\sigma_{11}dx_2,\ L_{13}=\int_{-h}^{h}\mu_{13}dx_2. \tag{2.6}$$

В итоге, основная система уравнений изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок с независимыми полями перемещений и вращений будет выражаться так:

Уравнения равновесия –

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=-(Y^++Y^-),\ N_{21}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=h(X^+-X^-),\ \frac{dL_{13}}{dx_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^++M^-). \tag{2.7}$$

Соотношения упругости –

$$N_{12}=2h\left[A_{77}\Gamma_{12}+A_{78}\Gamma_{21}\right],\qquad N_{21}=2h\left[A_{78}\Gamma_{12}+A_{88}\Gamma_{21}\right],$$

$$M_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}K_{11},\quad L_{13}=2B_{66}h\kappa_{13}. \tag{2.8}$$

Геометрические соотношения –

$$\Gamma_{12}=\frac{dw}{dx_1}-\Omega_3,\quad \Gamma_{21}=\psi+\Omega_3,\quad K_{11}=\frac{d\psi}{dx_1},\quad \kappa_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1}. \tag{2.9}$$

Система уравнений изгибной деформации микрополярных ортотропных упругих тонких балок (2.7)-(2.9) представляет собой систему уравнений шестого порядка. Это система из 11-ти уравнений относительно 11-ти неизвестных функций: $w,\psi,\Omega_3,\Gamma_{12},\Gamma_{21},K_{11},\kappa_{13},N_{12},N_{21},M_{11},L_{13}$.

«Смягченные» граничные условия на торцах балки ($x_1=0,\ x_1=a$) имеют вид [6]:

$M_{11}=M_{11}^*$ или $\psi=\psi^*$, $N_{12}=N_{12}^*$ или $w=w^*$, $L_{13}=L_{13}^*$ или $\Omega_3=\Omega_3^*$.
(2.10)

В модели (2.7)-(2.10) микрополярных ортотропных упругих тонких балок полностью учтены поперечные сдвиговые и родственные им деформации.

Следует сказать, что когда между упругими константами имеют место равенство $A_{77}=A_{88}=A_{78}$, из системы уравнений и граничных условий (2.7)-(2.10) микрополярных ортотропных упругих тонких балок будут отделяться система уравнений и граничные условия классической теории ортотропных упругих балок типа Тимошенко [9] (с незначительным различием, связанным со статической гипотезой б)).

В случае, когда

$$A_{77}=A_{88}=\mu+\alpha,\quad A_{78}=\mu-\alpha,\quad B_{66}=B_{44}=B,\quad \frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}=E,$$

система уравнений и граничные условия (2.7)-(2.10) будут определять модель микрополярных изотропных упругих балок с независимыми полями перемещений и вращений [6].

Функционал вариационного принципа для прикладной – одномерной теории (2.7)-(2.10) микрополярных упругих тонких балок со свободным вращением для ортотропного материала будет выражаться так (который получается на основе уравнения (1.9) и формулы (1.10), используя значения перемещений и поворота, деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений по формулам (2.2), (2.4)-(2.6)):

$$I=\int_0^a\left(W-M_{11}\left(K_{11}-\frac{d\psi}{dx_1}\right)-N_{12}\left[\Gamma_{12}-\left(\frac{dw}{dx_1}-\Omega_3\right)\right]-N_{21}\left[\Gamma_{21}-\left(\psi+\Omega_3\right)\right]-\right.$$
$$\left.-L_{13}\left(k_{13}-\frac{d\Omega_3}{dx_1}\right)\right)dx_1-\int_0^a\left((X^+-X^-)h\psi+(Y^++Y^-)w+(M^++M^-)\Omega_3\right)dx_1+ \tag{2.11}$$
$$+\int_{-h}^{+h}\left(\varphi_1x_2\psi+\varphi_2w+\varphi_3\Omega_3\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{+h}\left(\varphi_1x_2\psi+\varphi_2w+{}_3\Omega_3\right)\Big|_{x_1=a}dx_2,$$

где

$$W=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^3}{3}K_{11}^2+A_{77}h\Gamma_{12}^2+2A_{78}h\Gamma_{12}\Gamma_{21}+A_{88}h\Gamma_{21}^2+B_{66}hk_{13}^2 \tag{2.12}$$

– плотность потенциальной энергии деформации одномерной модели.

3.Модель изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением. Изучим теперь случай [7], когда для следующих безразмерных физических параметров имеют место значения:

$$\begin{gathered}\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim1,\quad\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim1,\quad\frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim1,\quad\frac{\left(A_{88}-A_{78}\right)A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim1,\\ \frac{a^2A_{11}}{B_{66}}\sim1,\quad\frac{a^2A_{11}}{B_{44}}\sim1,\quad\frac{\left(A_{77}-A_{78}\right)A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim1,\quad\frac{\left(A_{88}+A_{78}\right)A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}<<1,\quad\frac{\left(A_{77}+A_{78}\right)A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}<<1.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Основная особенность случая (3.1) заключается в том, что как показывает асимптотический анализ [7] краевой задачи (1.1)-(1.8), поворот ω_3 в асимптотических приближениях выражается через компоненты вектора перемещений u_1 и u_2 формулой, идентичной соответствующей формуле плоской задачи классической теории упругости:

$$2\omega_3=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \tag{3.2}$$

Это означает, что в этом случае изучаемый вопрос находится в области микрополярной упругости со стесненным вращением (или иначе – псевдоконтинуума Коссера).

Как видно из соотношения (1.8), модель стесненного вращения будет иметь место, когда $\dfrac{A_{88}+A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}$ и $\dfrac{A_{77}+A_{78}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}$ стремятся к нулю (для изотропного случая: $A_{77}=A_{88}=\mu+\alpha,\quad A_{78}=\mu-\alpha,$ эти условия преобразуются к единому требованию: $\alpha\to\infty$).

Принимая к виду качественные стороны асимптотического решения граничной задачи (1.1)-(1.8), в случае (3.1) [7], в основу построения прикладной одномерной

модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стеснённым вращением, как в работе [6], положим следующие предположения (гипотезы):
1) это предположения а), б), в) предыдущего раздела и
2) условие стесненного вращения (3.2).

Принимая указанные предположения, для перемещений, поворота, деформаций, изгиба-кручений, силовых и моментных напряжений будем иметь формулы:

$$u_2=w(x_1),\ u_1=x_2\psi(x_1),\ \Omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{dw(x_1)}{dx_1}-\psi(x_1)\right),\ \gamma_{22}=0,\ \chi_{23}=0,$$
$$\gamma_{12}+\gamma_{21}=\Gamma_{12}+\Gamma_{21}=\frac{dw}{dx_1}+\psi,\ \gamma_{11}=x_2K_{11},\ K_{11}=\frac{d\psi}{dx_1},\ \chi_{13}=\kappa_{13},\ \kappa_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1}. \qquad (3.3)$$

$$\sigma_{11}=x_2\overset{1}{\sigma}_{11}(x_1),\ \overset{1}{\sigma}_{11}=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}K_{11},\ \mu_{23}=x_2\frac{M^{+}+M^{-}}{2h},$$
$$\sigma_{12}+\sigma_{21}^{0}=\frac{A_{77}+A_{88}+2A_{78}}{2}\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right),\ \mu_{13}=B_{66}\kappa_{13}, \qquad (3.4)$$
$$\sigma_{22}=x_2\frac{Y^{+}+Y^{-}}{2h},\ \sigma_{21}=\overset{0}{\sigma}_{21}(x_1)+\left(\frac{h^2}{6}-\frac{x_2^2}{2}\right)\frac{d\overset{1}{\sigma}_{11}(x_1)}{dx_1}.$$

Основная система уравнений прикладной одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок со стесненным вращением, при которой полностью учитываются поперечные сдвиговые и родственные им деформации, выражается следующим образом:

Уравнения равновесия –

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=-(Y^{+}+Y^{-}),\ N_{21}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=h(X^{+}-X^{-}),\ \frac{dL_{13}}{dx_1}+N_{12}-N_{21}=-(M^{+}+M^{-}). \qquad (3.5)$$

Физические соотношения –

$$N_{12}+N_{21}=h\left(A_{77}+A_{88}+2A_{78}\right)\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right),\ M_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}K_{11},\ L_{13}=2hB_{66}\kappa_{13}. \qquad (3.6)$$

Геометрические соотношения –

$$\Gamma_{12}+\Gamma_{21}=\frac{dw}{dx_1}+\psi,\ K_{11}=\frac{d\psi}{dx_1},\quad \kappa_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1},\ \Omega_3=\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx_1}-\psi\right). \qquad (3.7)$$

К системе уравнений (3.5)-(3.7) необходимо присоединить граничные условия (2.10) (при $x_1=0$, $x_1=a$).

Функционал вариационного принципа для прикладной – одномерной теории микрополярных упругих тонких балок со стесненным вращением для ортотропного материала (3.5)-(3.7), (2.10) будет выражаться так:

$$I=\int_0^a\left(W-M_{11}\left(K_{11}-\frac{d\psi}{dx_1}\right)-\frac{N_{12}+N_{21}}{2}\left[\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right)-\left(\frac{dw}{dx_1}+\psi\right)\right]-\frac{N_{12}-N_{21}}{2}\left[2\Omega_3-\left(\frac{dw}{dx_1}-\psi\right)\right]-\right.$$
$$\left.-L_{13}\left(k_{13}-\frac{d\Omega_3}{dx_1}\right)\right)dx_1-\int_0^a\left((X^{+}-X^{-})h\psi+(Y^{+}+Y^{-})w+(M^{+}+M^{-})\Omega_3\right)dx_1+$$
$$+\int_{-h}^{+h}\left(\varphi_1x_2\psi+\varphi_2w+\varphi_3\Omega_3\right)\Big|_{x_1=0}dx_2-\int_{-h}^{+h}\left(\varphi_1x_2\psi+\varphi_2w+\varphi_3\Omega_3\right)\Big|_{x_1=a}dx_2, \qquad (3.8)$$

где

$$W=\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}\frac{h^3}{3}K_{11}^2+\frac{A_{77}+A_{88}+2A_{78}}{4}h\left(\Gamma_{12}+\Gamma_{21}\right)^2+B_{66}hk_{13}^2 \qquad (3.9)$$

– плотность потенциальной энергии деформации одномерной модели.

4.Модель изгибной деформации микрополярных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жесткостью”. Рассмотрим случай, когда для следующих физических безразмерных параметров имеют место условия [7]:

$$\frac{A_{22}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\frac{A_{12}A_{11}}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\frac{A_{11}^2}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\sim 1,\frac{\left(A_{88}-A_{78}\right)A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,$$
$$\frac{\left(A_{77}-A_{78}\right)A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\quad \frac{\left(A_{77}+A_{78}\right)A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1,\quad \frac{\left(A_{88}+A_{78}\right)A_{11}}{A_{77}A_{88}-A_{78}^2}\sim 1, \qquad (4.1)$$
$$\frac{a^2\left(A_{77}-A_{78}\right)}{B_{66}}<<1,\quad \frac{a^2\left(A_{88}-A_{78}\right)}{B_{66}}<<1,\quad B_{66}\sim B_{44}.$$

Качественные результаты исходного приближения асимптотического метода интегрирования краевой задачи (1.1)-(1.8) в тонкой прямоугольной области [7] позволяют, для случая (4.1), в основу построения соответствующей прикладной одномерной теории микрополярных ортотропных упругих тонких балок положить следующие предположения (гипотезы) [6]:

1) принимаются предположения а), б), в) раздела два и

2) в третьем уравнении равновесия (1.1) можем пренебрегать разностью силовых напряжений $\left(\sigma_{12}-\sigma_{21}\right)$.

Главная особенность рассматриваемого случая состоит в том, что моментная часть задачи (с уравнениями и граничными условиями) отделится как самостоятельная граничная задача. Имея в виду условие (4.1), нижепостроенную модель, следуя работе [6], будем называть моделью микрополярных ортотропных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жесткостью”.

Основная разрешающая система уравнений и граничные условия модели микрополярных ортотропных упругих тонких балок “с малой сдвиговой жесткостью” с полным учетом поперечных сдвиговых и родственных им деформаций, будет выражаться следующим образом:

“Моментная часть” задачи:

$$\frac{dL_{13}}{dx_1}=-(M^{+}+M^{-}),\quad L_{13}=2hB_{66}\kappa_{13},\quad \kappa_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1}. \qquad (4.2)$$

Граничные условия (при $x_1=0$, $x_1=a$):

$$L_{13}=L_{13}^{*}\quad \text{или}\quad \Omega_3=\Omega_3^{*} \qquad (4.3)$$

“Силовая часть” задачи

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=-(Y^{+}+Y^{-}),N_{21}-\frac{dM_{11}}{dx_1}=h(X^{+}-X^{-}).$$
$$N_{12}=2h\left[A_{77}\Gamma_{12}+A_{78}\Gamma_{21}\right],\quad N_{21}=2h\left[A_{88}\Gamma_{21}+A_{78}\Gamma_{12}\right],$$
$$M_{11}=\frac{2h^3}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}K_{11},\ \Gamma_{12}=\frac{dw}{dx_1}-\Omega_3,\quad \Gamma_{21}=\psi+\Omega_3,\ K_{11}=\frac{d\psi}{dx_1}. \qquad (4.4)$$

Граничные условия (при $x_1=0$, $x_1=a$):

$$M_{11}=M_{11}^{*}\ \text{или}\ \psi=\psi^{*},\quad N_{12}=N_{12}^{*}\ \text{или}\ w=w^{*}. \qquad (4.5)$$

5. Изгиб шарнирно-опертой микрополярной ортотропной упругой балки под равномерно распределенной нагрузкой. Рассмотрим простейшую задачу об изгибе шарнирно-опертой микрополярной упругой балки под равномерно распределенной силовой нагрузкой интенсивности $q = q_0 \sin\dfrac{\pi x_1}{a}$.

А) Уравнения (2.7)-(2.9) микрополярной ортотропной балки со свободным вращением можем выражать через функции w, ψ и Ω_3:

$$A_{78}\frac{d\psi}{dx_1} + A_{77}\frac{d^2 w}{dx_1^2} + \left(A_{78} - A_{77}\right)\frac{d\Omega_3}{dx_1} = -\frac{q}{h},$$

$$A_{88}\psi + A_{78}\frac{dw}{dx_1} + \left(A_{88} - A_{78}\right)\Omega_3 - \frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{d^2\psi}{dx_1^2} = 0, \tag{5.1}$$

$$B_{66}\frac{d^2\Omega_3}{dx_1^2} + \left(A_{78} - A_{88}\right)\psi + \left(A_{77} - A_{78}\right)\frac{dw}{dx_1} - \left(A_{77} + A_{88} - 2A_{78}\right)\Omega_3 = 0.$$

Для граничных условий шарнирного опирания из (2.10) будем иметь:

$$w = 0, \quad M_{11} = 0, \quad L_{13} = 0 \text{ при } x_1 = 0; a. \tag{5.2}$$

Представим решение граничной задачи (5.1), (5.2) в виде:

$$w(x_1) = w_0 \sin\frac{\pi x_1}{a}, \;\; \psi(x_1) = \psi_0 \cos\frac{\pi x_1}{a}, \;\; \Omega_3(x_1) = \Omega_3^{(0)} \cos\frac{\pi x_1}{a}, \tag{5.3}$$

где $w_0, \psi_0, \Omega_3^{(0)}$ – неизвестные постоянные. Подставив решение (5.3) в систему дифференциальных уравнений (5.1), получим алгебраические уравнения относительно $w_0, \psi_0, \Omega_3^{(0)}$, после решения последних уравнений можем найти максимальные значения прогиба w и силового напряжения σ_{11}:

$$w_{\max} = w\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) = w_0 = \frac{q_0}{h}\left(A_{77}A_{88} - A_{78}^2 + B_{66}A_{88}\frac{\pi^2}{a^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi^2}{a^2}\left(B_{66}\frac{\pi^2}{a^2} + A_{77} + A_{88} + 2A_{78}\right)\right)\frac{1}{K}, \tag{5.4}$$

$$\sigma_{11\max} = \sigma_{11}\left(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = h\right) = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi^2}{a^2}q_0\left(B_{66}A_{78}\frac{\pi^2}{a^2} + A_{77}A_{88} - A_{78}^2\right)\frac{1}{K},$$

где

$$K = \frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi^4}{a^4}\left(A_{77}A_{88} - A_{78}^2 + B_{66}A_{77}\frac{\pi^2}{a^2}\right) + B_{66}\left(A_{77}A_{88} - A_{78}^2\right)\frac{\pi^4}{a^4}.$$

Численные результаты приведены в табл. 1. Эти численные результаты показывают о высоких прочностных и жёсткостных характеристиках микрополярного ортотропного материала балки.

Таблица 1

Физические параметры материала балки: $A_{77} = 0.6$ МПа, $B_{66} = 300H$, $\dfrac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2$ МПа, интенсивность нагрузки: q_0=50 Па							
Относитель-ная толщина балки	N	Размеры балки		Микрополярная ортотропная теория балок с независимыми полями перемещений и вращений (обобщенные гипотезы Тимошенко) $A_{88} = 0.8$ МПа, $A_{78} = 0.4$ МПа		Классическая ортотропная теория балок типа Тимошенко $A_{77} = A_{88} = A_{78} = A = 0.6$МПа	
		a, м	h, м	$\sigma_{11}^{\max\, мик.}$ кПа	$w_{\max}^{мик.}$, 10^{-4} м	$\sigma_{11}^{\max\, класс.}$ кПа	$w_{\max}^{класс.}$, 10^{-4} м
$\delta = \dfrac{h}{a} = \dfrac{1}{40}$	1.	0.008	0,0002	0.324	0.041	24.317	1.543
	2.	0.02	0,0005	0.353	0.106	24.317	3.858
	3.	0.1	0.0025	1.139	1.150	24.317	19.290
	4.	0.2	0.005	3.295	5.678	24.317	38.580
$\delta = \dfrac{h}{a} = \dfrac{1}{100}$	1.	0.008	0,00008	0.330	0.102	151.982	23.760
	2.	0.02	0,0002	0.359	0.267	151.982	59.396
	3.	0.1	0.001	1.192	2.959	151.982	297
	4.	0.2	0.002	3.739	15.850	151.982	594

В) Уравнения (3.5)-(3.7) микрополярной ортотропной балки со стеснённым вращением, выраженные через функции w и ψ, будут:

$$\left(A_{77} + A_{88} + 2A_{78}\right)\left(\frac{d^2w}{dx_1^2} + \frac{d\psi}{dx_1}\right) - B_{66}\left(\frac{d^4w}{dx_1^4} - \frac{d^3\psi}{dx_1^3}\right) = -\frac{4q}{h},$$

$$\left(A_{77}+A_{88}+2A_{78}\right)\left(\frac{dw}{dx_1}+\psi\right) - \frac{4h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{22}}\frac{d^2\psi}{dx_1^2} + B_{66}\left(\frac{d^4w}{dx_1^4} - \frac{d^3\psi}{dx_1^3}\right) = 0. \tag{5.5}$$

Граничные условия шарнирного опирания имеют вид (5.2).

В этом случае максимальные значения прогиба w и силового напряжения σ_{11} будут выражаться так:

$$w_{\max} = w\left(x_1 = \frac{a}{2}\right) = \frac{q_0}{h}\left(\left(A_{77} + A_{88} + 2A_{78}\right)\frac{a}{\pi} + B_{66}\frac{\pi}{a} + \frac{4h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi}{a}\right)\frac{1}{L},$$

$$\sigma_{11\max} = \sigma_{11}\left(x_1 = \frac{a}{2}, x_2 = h\right) = \frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi}{a}q_0\left(A_{77} + A_{88} + 2A_{78} - B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}\right)\frac{1}{L}, \tag{5.6}$$

где

$$L = \frac{h^2}{3}\frac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}}\frac{\pi^3}{a^3}\left(A_{77} + A_{88} + 2A_{78} + B_{66}\frac{\pi^2}{a^2}\right) + B_{66}\left(A_{77} + A_{88} + 2A_{78}\right)\frac{\pi^3}{a^3}.$$

Численные результаты приведены в табл. 2.

Таблица 2

Физические параметры материала балки: $A_{77} = 0.6$ МПа, $B_{66} = 300H$, $\dfrac{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}{A_{22}} = 5.2$ МПа, интенсивность нагрузки: q_0=50 Па

Относитель-ная толщина балки	N	Размеры балки: a, м	Размеры балки: h, м	Микрополярная ортотропная теория балок со стесненным вращением (обобщенные гипотезы Тимошенко) $A_{88} = 0.8$ МПа, $A_{78} = 0.4$ МПа: $\sigma_{11}^{\max\,мик.}$ кПа	Микрополярная ...: $w_{\max}^{мик.}$, 10^{-4} м	Классическая ортотропная теория балок типа Тимошенко $A_{77} = A_{88} = A_{78} = A = 0.6$МПа: $\sigma_{11}^{\max\,класс}$ кПа	Классическая ...: $w_{\max}^{класс.}$, 10^{-4} м
$\delta = \dfrac{h}{a} = \dfrac{1}{40}$	1.	0.09	0.00225	0.574	0,572	24.317	17.361
	2.	0.1	0.0025	0.730	0. 759	24.317	19.290
	3.	0.15	0.00375	1.710	2.295	24.317	28.936
	4.	0.2	0.005	2.953	5.02	24.317	38.581
$\delta = \dfrac{h}{a} = \dfrac{1}{100}$	1.	0.09	0.0009	0.589	1.451	151.982	267.281
	2.	0.1	0.001	0.755	1.934	151.982	296.978
	3.	0.15	0.0015	1.832	6.055	151.982	445.468
	4.	0.2	0.002	3.315	13.86	151.982	593.957

Из приведенных данных в табл. 2 вытекает, что по микрополярной теории балок со стесненным вращением имеем довольно высокие прочностные и жесткостные характеристики по сравнению с классической теорией упругих балок.

Расчеты выполнены также по модели микрополярных балок **“**с малой сдвиговой жесткостью**”,** где в других количественных отношениях имеют место те же эффекты.

Данная статья выполнена как часть темы, рекомендованной на финансирование в рамках **Конкурса на тематическое финансирование научной и научно-технической деятельности,** проведенного Государственным комитетом по науке МОН Республики Армении в 2010 году.

ЛИТЕРАТУРА

1. Савин Г.Н. Основы плоской моментной теории упругости. Киев: Изд. Киевского ун-та, 1965. 162с.
2. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд. МГУ, 1999. 328с.
3. Белов П.А., Лурье С.А. Континуальная модель микрогетерогенных сред. // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 5. С.833-848.
4. Саркисян С.О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Изв. НАН Армении. Механика. 2011. Т.64. №1.С.58-67.

5. Саркисян С.О. Общая теория микрополярных упругих тонких оболочек. // Физическая мезомеханика. 2011. №1. С.55-66.
6. Саркисян С.О. Математические модели микрополярных упругих тонких балок. // Доклады НАН Армении. 2011. Т.111. №2.
7. Алваджян Ш.И. Построение уравнений и граничных условий статической задачи изгиба ортотропных микрополярных упругих тонких балок асимптотическим методом //В сб.: научных трудов международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды». 2010. Т.1. С.71-75.
8. D. Iesan. The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids // Archives of Mechanics.1973. Vol.5. № 3. P.547-561.
9. Пелех Б.Л. Концентрация напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин. Киев: Наукова думка, 1977. 183с.

Сведения об авторах:

Саркисян Самвел Оганесович–
Доктор физ-мат. наук, профессор, Чл-корр. НАН Армении
Гюмрийский государственный педагогический институт им. М. Налбандяна

Алваджян Шушаник Искяндаровна–
Аспирант Гюмрийского государственного педагогического института им. М. Налбандяна

Поступила в редакцию 05.05.2011