

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ ВЯЗКОУПРУГИХ
ОРТОТРОПНЫХ ПЛАСТИН С ПЕРЕМЕННОЙ ЖЁСТКОСТЬЮ**
АБДИКАРИМОВ Р.А., ХУДАЯРОВ Б.А.

Ключевые слова: вязкоупругость, пластина, метод Бубнова-Галёркина, интегро-дифференциальные уравнения

Key words: viscoelastic, plate, Bubnov-Galerkin method, integro-differential equation

Արդիկարիմով Ռ.Ա. Խուդայարով Բ.Ա.

Փոփոխական կոշտությամբ առաձգամածուցիկ օրթոտրոպ սալերի տատանողական պրոցեսների մոդելավորումը

Ստացված են տատանման ինդրի ճկվածքի նկատմամբ մասնակի ածացվյալներով ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումները: Խնդիրը Բուբնով-Գալյորկինի մեթոդով բերված է սովորական ինտեգրո-դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգի, որը լուծված է թվային մեթոդով:

Abdikarimov R.A., Khudayarov B.A.

Modelling of vibration processes of viscoelastic orthotropic plates with variable rigidity

In work the problem about vibrations of viscoelastic orthotropic plates with variable rigidity is considered. The equations of vibrations concerning deflections are described by the integro-differential equations (IDE) in partial derivatives. By means of Bubnov-Galerkin method based on polynomial approximation of deflections, the problem is shown to research of system of the ordinary IDE where an independent variable is time. Decisions of IDE are determined by the numerical method based on elimination of a singularity in a kernel. On the basis of this method the algorithm of the numerical decision is described.

В работе рассматривается задача о колебаниях вязкоупругих ортотропных пластин с переменной жёсткостью. Уравнения колебаний относительно прогибов описываются интегро-дифференциальными уравнениями (ИДУ) в частных производных. При помощи метода Бубнова-Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогибов, задача сведена к исследованию системы обыкновенных ИДУ, где независимым переменным является время. Решения ИДУ определяются численным методом, основанным на исключении особенности в ядре. На основе этого метода описан алгоритм численного решения.

Введение. Современная техника, строительство и другие области промышленности используют все более сложные конструкции, обеспечение прочности, надёжности и высокой экономичности которых имеет важное значение. Оптимальное проектирование таких конструкций невозможно без создания математических моделей, позволяющих учитывать максимально возможное количество факторов, влияющих на их работоспособность. При этом достигается значительное снижение веса, улучшение геометрических и механических характеристик строительных сооружений и технических конструкций.

Традиционно при математическом моделировании технических конструкций форма конструкции считалась заданной и неизменной. Однако в последние годы всё большее значение стали придавать поиску наилучшей конфигурации, особенно исследованиям колебаний тонкостенных конструкций переменной жёсткости из композиционных материалов. Эти задачи требуют новых методов математического и компьютерного моделирования [1, 2].

Большинство задач теории вязкоупругости приводит к необходимости численного решения краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений с частными производными. При этом, системы интегро-дифференциальных уравнений могут иметь высокий порядок, переменные коэффициенты, содержать малые и большие параметры, что приводит к появлению в

структуре решений таких задач быстро изменяющихся функций, а сами решения приобретают ярко выраженный характер погранслоёв. Кроме того, нелинейность моделируемых процессов приводит к нелинейности краевых задач, описывающих эти процессы. Традиционные методы и алгоритмы численного интегрирования при этом оказываются малоприменимыми. Поэтому, разработка и развитие математических моделей, совершенствование численных методов и алгоритмов решения задач теории вязкоупругости, возникающих при математическом моделировании объектов и явлений, являются важной и актуальной задачей фундаментальной науки.

Актуальным является решение конкретных, практически важных задач, среди которых выделим задачи моделирования и расчёта вязкоупругих тонкостенных конструкций с переменной жёсткостью. Решению этих проблем и посвящена настоящая работа.

1. Постановка задачи и методы решения

Рассмотрим задачу о нелинейных колебаниях ортотропных вязкоупругих прямоугольных пластин. Уравнение движения, основанное на гипотезе Кирхгоффа-Лява в геометрически нелинейной постановке, имеет вид:

$$\begin{aligned}
& h \left\{ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + [B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + 2B (1 - \Gamma^*)] \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2B (1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\partial h}{\partial y} 2B (1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \rho h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
& h \left\{ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + [B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + 2B (1 - \Gamma^*)] \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + 2B (1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} + \frac{\partial h}{\partial x} 2B (1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& \quad + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \rho h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\
& \frac{h^3}{12} \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (8B (1 - \Gamma^*) + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*)) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
& \quad \left. + B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] + \frac{1}{4} \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \left(B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \\
& \quad + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left[B_{11} (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (B_{12} (1 - \Gamma_{12}^*) + 4B (1 - \Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \times \\
& \quad \times \left[B_{22} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (B_{21} (1 - \Gamma_{21}^*) + 4B (1 - \Gamma^*)) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] + \frac{1}{4} \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \left[2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] 2B(1-\Gamma^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + (B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) + 2B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} + \frac{\partial h}{\partial y} 2B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} - \\
& - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h \left\{ B_{11}(1-\Gamma_{11}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \\
& - \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) + B(1-\Gamma^*)) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right] + \frac{\partial h}{\partial x} B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \right. \\
& \quad \left. - (k_y B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) + k_y B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)) w \right\} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ B_{21}(1-\Gamma_{21}^*) \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& \quad \left. + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*) \left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} h B(1-\Gamma^*) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q
\end{aligned} \tag{1}$$

где ρ – плотность материала; h – толщина пластины; Γ_{ij}^* , Γ^* – интегральные

операторы: $\Gamma^* \varphi(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$, $\Gamma_{ij}^* \varphi(t) = \int_0^t \Gamma_{ij}(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau$;

($i, j=1,2$); $\Gamma(t-\tau)$, $\Gamma_{ij}(t-\tau)$ – ядра релаксации.

Упругие постоянные выражены через технические постоянные следующим образом [3]:

$$B_{11} = \frac{E_1}{1-\mu_1\mu_2}, \quad B_{12} = \frac{\mu_2 E_1}{1-\mu_1\mu_2} = \frac{\mu_1 E_2}{1-\mu_1\mu_2} = B_{21}, \quad B_{22} = \frac{E_2}{1-\mu_1\mu_2}, \quad 2B = G.$$

Здесь E_1, E_2 – модули упругости, G – модуль сдвига, μ_1, μ_2 – коэффициенты Пуассона.

При изгибе в срединной поверхности возникают усилия:

$$\begin{aligned} N_x &= B_{11}h(1-\Gamma_{11}^*)\varepsilon_x + B_{12}h(1-\Gamma_{12}^*)\varepsilon_y, \\ N_y &= B_{21}h(1-\Gamma_{21}^*)\varepsilon_x + B_{22}h(1-\Gamma_{22}^*)\varepsilon_y, \quad N_{xy} = 2Bh(1-\Gamma^*)\varepsilon_{xy}, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ – компоненты конечной деформации, определяемые формулами [4]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}.$$

Изгибающие и крутящий моменты определяются через функцию прогиба w [5]:

$$\begin{aligned} M_x &= -\frac{h^3}{12}\left[B_{11}(1-\Gamma_{11}^*)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{12}(1-\Gamma_{12}^*)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \\ M_y &= -\frac{h^3}{12}\left[B_{21}(1-\Gamma_{21}^*)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B_{22}(1-\Gamma_{22}^*)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right], \\ H &= -\frac{Bh^3}{3}(1-\Gamma^*)\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}. \end{aligned} \quad (3)$$

Введя в уравнение (1) следующие безразмерные величины:

$$\frac{u}{h_0}; \quad \frac{v}{h_0}; \quad \frac{w}{h_0}; \quad \frac{x}{a}; \quad \frac{y}{b}; \quad \omega t; \quad \frac{h}{h_0}; \quad \frac{a}{b}; \quad \frac{b}{h_0}; \quad \frac{q}{E}\left(\frac{b}{h_0}\right)^4; \quad \frac{p_x}{E}; \quad \frac{p_y}{E}$$

и сохраняя прежние обозначения, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} &h\left\{\Delta(1-\Gamma_{11}^*)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \left[\mu_2\Delta(1-\Gamma_{12}^*) + (1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\right] \times \right. \\ &\quad \times \left[\lambda\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \frac{\lambda}{\delta}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] + (1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\left(\lambda^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\left. \right\} + \\ &+ \frac{\partial h}{\partial x}\left\{\Delta(1-\Gamma_{11}^*)\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\lambda\delta}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right] + \mu_2\Delta(1-\Gamma_{12}^*)\left[\lambda\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda}{2\delta}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\} + \\ &\quad + \frac{\partial h}{\partial y}(1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\left(\lambda^2\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\lambda}{\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{\eta_1}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ &h\left\{\frac{1}{\Delta}(1-\Gamma_{22}^*)\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{\delta}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + \left[\frac{\mu_1}{\Delta}(1-\Gamma_{21}^*) + (1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\right] \times \right. \\ &\quad \times \left[\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + \frac{1}{\lambda^2\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right] + (1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\left(\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{\lambda^2\delta}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left. \right\} + \\ &+ \frac{\partial h}{\partial x}(1-\mu_1\mu_2)g(1-\Gamma^*)\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\lambda^2\delta}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial h}{\partial y}\left\{\frac{1}{\Delta}(1-\Gamma_{22}^*)\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\delta} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \left] + \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2\lambda^2 \delta} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \frac{1}{\eta_2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0, \quad (4) \\
& h^3 \left\{ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left[4(1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) + \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) + \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \right] \lambda^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \right. \\
& + \frac{\lambda^4}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \left. \right\} + 3 \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \left[\Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda^2 \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + \\
& + 6h^2 \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left[\mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) + 2(1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \right] \lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} + \\
& + 6h^2 \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \lambda^4 \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \left[\frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) + 2(1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \right] \lambda^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} + \\
& + 3 \left[2h \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \left[\frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \lambda^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + \\
& + 12 \left[2h \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial y} + h^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \right] (1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \lambda^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \\
& - 12 \frac{\partial w}{\partial x} \left\{ h \left[\Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \left(\lambda \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \right. \\
& + \left. \left[\mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) + (1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \right] \left(\lambda^2 \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + \right. \\
& + \left. (1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \left(\lambda^3 \delta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\} + \frac{\partial h}{\partial x} \left\{ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \left[\lambda \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& + \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) \left[\lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \left. \right\} + \\
& + \frac{\partial h}{\partial y} (1 - \mu_1 \mu_2) g(1 - \Gamma^*) \left(\lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left. \right\} - \\
& - 12 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} h \left\{ \Delta (1 - \Gamma_{11}^*) \left[\lambda \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \mu_2 \Delta (1 - \Gamma_{12}^*) \left[\lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - \\
& - 12 \frac{\partial w}{\partial y} \left\{ h \left[\frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \left(\lambda^4 \delta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \lambda^4 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) + (1 - \mu_1 \mu_2) g (1 - \Gamma^*) \right] \times \\
& \times \left(\lambda^3 \delta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + (1 - \mu_1 \mu_2) g (1 - \Gamma^*) \left(\lambda^2 \delta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big\} + \\
& + \frac{\partial h}{\partial x} (1 - \mu_1 \mu_2) g (1 - \Gamma^*) \left(\lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \\
& + \frac{\partial h}{\partial y} \left\{ \frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[\lambda^4 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda^4}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] + \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[\lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} - \\
& - 12 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} h \left\{ \frac{\mu_1}{\Delta} (1 - \Gamma_{21}^*) \left[\lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] + \right. \\
& \left. + \frac{1}{\Delta} (1 - \Gamma_{22}^*) \left[\lambda^4 \delta \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\lambda^4}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} - 24 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} h (1 - \mu_1 \mu_2) g \times \\
& \times (1 - \Gamma^*) \left(\lambda^3 \delta \frac{\partial u}{\partial y} + \lambda^2 \delta \frac{\partial v}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{1}{\eta_3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 12 (1 - \mu_1 \mu_2) \lambda^4 q,
\end{aligned}$$

где $\lambda = \frac{a}{b}$, $\delta = \frac{b}{h_0}$, $\Delta = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}$, $g = \frac{G}{\sqrt{E_1 E_2}}$, $\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{E_1 E_2} h^2 \eta}{6 \rho (1 - \mu_1 \mu_2)}} \left(\frac{\pi}{b} \right)^4$ – частота основного тона колебаний, $\eta = 1 + \Delta \mu_2 + 2(1 - \mu_1 \mu_2) g$.

Считая пластинку шарнирно опертой по краям, приближённое решение системы (4) по методу Бубнова-Галеркина будем искать в виде

$$\begin{aligned}
u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \quad v(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \varphi_{nm}(x, y), \\
w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \psi_{nm}(x, y),
\end{aligned} \tag{5}$$

где $u_{nm} = u_{nm}(t)$, $v_{nm} = v_{nm}(t)$, $w_{nm} = w_{nm}(t)$ – неизвестные функции времени; $\varphi_{nm}(x, y)$, $\varphi_{nm}(x, y)$, $\psi_{nm}(x, y)$, $n = 1, 2, \dots, N$; $m = 1, 2, \dots, M$ – координатные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям задачи.

Подставляя (5) в уравнение (4) и применяя метод Бубнова-Галеркина, для определения неизвестных $w_{nm} = w_{nm}(t)$, $u_{nm} = u_{nm}(t)$, $v_{nm} = v_{nm}(t)$ получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M a_{k \ln m} \ddot{u}_{nm} - \eta_1 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[(1 - \Gamma_{11}^*) d_{1k \ln m} + (1 - \Gamma^*) d_{2k \ln m} \right] u_{nm} + \right. \\
\left. + \left[(1 - \Gamma_{12}^*) d_{3k \ln m} + (1 - \Gamma^*) d_{4k \ln m} \right] v_{nm} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[(1-\Gamma_{11}^*) d_{7k \ln mij} + (1-\Gamma_{12}^*) d_{8k \ln mij} + (1-\Gamma^*) d_{9k \ln mij} \right] w_{nm} w_{ij} \Big\} = 0, \\
& \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M b_{k \ln m} \ddot{v}_{nm} - \eta_2 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[(1-\Gamma_{21}^*) e_{1k \ln m} + (1-\Gamma^*) e_{2k \ln m} \right] u_{nm} + \right. \\
& + \left. \left[(1-\Gamma_{22}^*) e_{3k \ln m} + (1-\Gamma^*) e_{4k \ln m} \right] v_{nm} \right\} + \\
& + \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M \left[(1-\Gamma_{22}^*) e_{7k \ln mij} + (1-\Gamma_{21}^*) e_{8k \ln mij} + (1-\Gamma^*) e_{9k \ln mij} \right] w_{nm} w_{ij} \Big\} = 0, \\
& \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M c_{k \ln m} \ddot{w}_{nm} + \eta_3 \left\{ \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \left[(1-\Gamma_{11}^*) f_{5k \ln m} + (1-\Gamma_{12}^*) f_{6k \ln m} + (1-\Gamma_{22}^*) f_{7k \ln m} + (1-\Gamma_{21}^*) f_{8k \ln m} + \right. \right. \\
& + \left. \left. (1-\Gamma^*) f_{9k \ln m} \right] w_{nm} \right\} - \eta_3 \left\{ \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,j=1}^M w_{nm} \left[(1-\Gamma_{11}^*) \xi_{1k \ln mij} + (1-\Gamma_{21}^*) \xi_{2k \ln mij} + \right. \right. \\
& + \left. \left. (1-\Gamma^*) \xi_{3k \ln mij} \right] u_{ij} + \left[(1-\Gamma_{22}^*) \xi_{4k \ln mij} + (1-\Gamma_{12}^*) \xi_{5k \ln mij} + (1-\Gamma^*) \xi_{6k \ln mij} \right] v_{ij} \right\} + \\
& + \sum_{n,i,r=1}^N \sum_{m,j,s=1}^M w_{nm} \left\{ \left[(1-\Gamma_{11}^*) g_{5k \ln mijrs} + (1-\Gamma_{12}^*) g_{6k \ln mijrs} + (1-\Gamma_{22}^*) g_{7k \ln mijrs} + \right. \right. \\
& + \left. \left. (1-\Gamma_{21}^*) g_{8k \ln mijrs} + (1-\Gamma^*) g_{9k \ln mijrs} \right] w_{ij} w_{rs} \right\} = 0, \\
& u_{nm}(0) = u_{0nm}, \quad \dot{u}_{nm}(0) = \dot{u}_{0nm}, \quad v_{nm}(0) = v_{0nm}, \quad \dot{v}_{nm}(0) = \dot{v}_{0nm}, \\
& w_{nm}(0) = w_{0nm}, \quad \dot{w}_{nm}(0) = \dot{w}_{0nm},
\end{aligned} \tag{6}$$

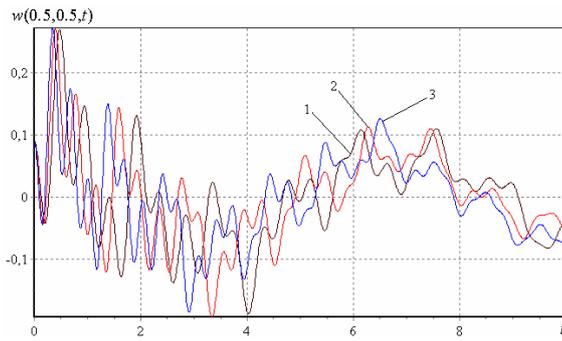
где коэффициенты, применявшиеся в этой системе, связаны с координатными функциями и их производными.

Интегрирование систем (6) выполнялось с помощью численного метода, предложенного в [6–8]. При этом, в качестве ядер релаксации используется слабосингулярное ядро Колтунова-Ржаницына вида

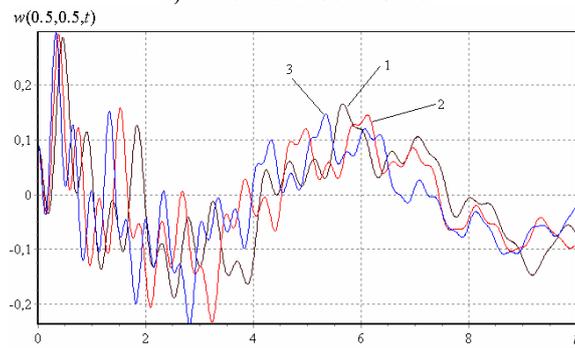
$$\Gamma(t) = A e^{-\beta t} t^{\alpha-1}, \quad (0 < \alpha < 1).$$

Результаты вычислений при различных физических и геометрических параметрах вязкоупругой ортотропной пластинки приведены на фиг. 1, 2. Закон изменения толщины выбирается в виде: $h = 1 - \alpha^* x$. Здесь, если не оговорены другие данные, в качестве исходных, при вычислениях были приняты следующие: $A = 0.05$; $\alpha = 0.25$; $\beta = 0.05$; $\mu = 0.3$; $\delta = 25$; $u_0 = 0$; $v_0 = 0$; $w_0 = 0.09$; $q = 0$; $\lambda = 1$; $\alpha^* = 0.5$.

Было исследовано влияние неоднородности материала на процесс колебания пластинки. На фиг.1 представлены зависимости прогиба от времени срединной точки пластинки, полученных без учёта (фиг.1а) и с учётом (фиг.1б) геометрической нелинейности при различных значениях параметра Δ , определяющего степень неоднородности (анизотропности) материала. Здесь кривая 1 соответствует случаю, когда $\Delta = 1$, кривая 2 – $\Delta = 1.5$ и кривая 3 – случаю, когда $\Delta = 2$. Как показывают исследования, увеличение параметра Δ приводит к уменьшению амплитуды колебания.

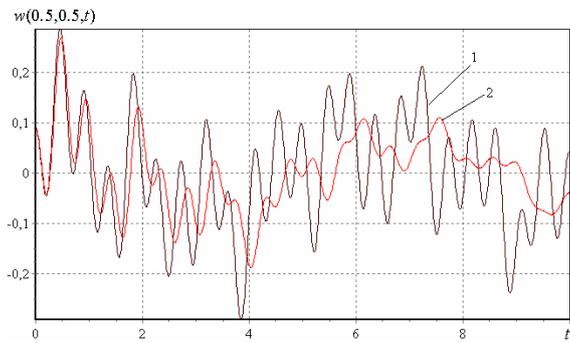


а) линейная постановка

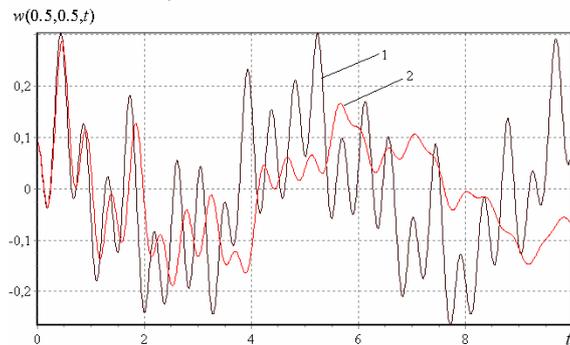


б) нелинейная постановка

Фиг. 1. Зависимость прогиба от времени при $\Delta=1(1); 1.5(2); 2(3)$



а) линейная постановка



б) нелинейная постановка

Фиг. 2. Зависимость прогиба от времени

На фиг.2 представлены зависимости прогиба от времени срединной точки пластинки, полученных для случаев с различными ядрами релаксации (кривая 1 – экспоненциальное ядро; кривая 2 – слабо-сингулярное ядро Колтунова-Ржаницына).

На фигуре видно, что если в начальные моменты времени результаты, полученные при этих ядрах, почти совпадают, то с течением времени наблюдается их расхождение и в момент времени $t = 10$ различия в результатах составляют уже 20 процентов. С течением времени различия в результатах продолжают возрастать.

Как показывают исследования, в случае отсутствия внешних нагрузок, результаты расчётов, полученных в линейной и нелинейной постановках, совпадают. Однако, при наличии внешних нагрузок зависимости $w(t)$ существенно отличаются друг от друга и отличие достигает 35-40%.

Анализ проведённых вычислительных экспериментов показывает, что предложенный метод и алгоритм позволяют учитывать плавное изменение толщины тонкостенных элементов и могут быть применены при их оптимальном проектировании.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А., Геворкян Р.С. Смешанные краевые задачи теории упругости слоистых тонких тел переменной толщины, состоящих из анизотропных неоднородных материалов. // Прикладная математика и механика (ПММ). 2009. Т.73. Вып.5. С.868-876.
2. Геворкян Г.З., Киракосян Р.М. К геометрически нелинейной уточнённой теории ортотропных пластин переменной толщины // Изв. НАН Армении. Механика. 2007. Т.60. №4. С.43-52.
3. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: Изд-во МГУ, 1967. 352 с.
4. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
5. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
6. Бадалов Ф.Б. Методы решения интегральных и интегро-дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент: Мехнат, 1987. 269с.
7. Эшматов Х., Абдикаримов Р.А., Бобоназаров Ш.П. Колебания и устойчивость вязкоупругой трубы с протекающей через неё жидкостью при различных граничных условиях // Узбекский журнал “Проблемы механики”. – Ташкент, 1995. № 1. С.20-24.
8. Верлань А.Ф., Эшматов Х., Худаяров Б., Бобоназаров Ш.П. Численное решение нелинейных задач динамики вязкоупругих систем // Электронное моделирование 2004. Т.26. №3. С.3–14.

Сведения об авторах:

Худаяров Бахтияр Алимович – доктор техн.наук, профессор каф.высшей математики Ташкентского института ирригации и мелиорации
E-mail: bakht-pro@yandex.ru

Поступила в редакцию 09.03.2011