ՀԱՅԱՍՏԱՆԻ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԶԳԱՅԻՆ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК АРМЕНИИ

Մեխանիկա 64, №4, 2011 Механика

УДК 539.8

ОТРАЖЕНИЕ СДВИГОВОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ

ПОГОСЯН Н.Д.

Ключевые слова: Волна, неоднородный слой, отражение, импеданс
Key words: Wave, inhomogeneous layer, reflection, impedace

Պողոսյան Ն.Ջ.
Սահքի ալիքի անդրադարձումը անհամասեռ շերտից

Ուսումնասիրվում է առաձգական սահքի ալիքի անդրադարձումը անհամասեռ շերտի և համասեռ կիսատարածության սահմանից: Շերտի արտաքին ազատ եզրի և ամրացված արտաքին եզրի դեպքում որոշված են անդրադարձման գործակիցները: Ուսումնասիրված է անդրադարձման բնույթը կախված անհամասեռության պարամետրերից, հաճախականությունից և շերտի հաստությունից:

Poghossyan N.D.
Refraction of shear wave from non-homogeneous layer

Refraction problem is studied for shear wave from boundary of homogeneous substrate and non-homogeneous layer.

В работе рассмотрена задача отражения упругой сдвиговой волны от границы раздела неоднородного слоя и однородного полупространства. В случае свободной внешней границы слоя и в случае закреплённой внешней границы слоя определены коэффициенты отражения. Изучен характер отражения в зависимости от параметра неоднородности, частоты волны и толщины слоя.

Рассмотрению волн в неоднородных средах посвящён ряд работ [4-8]. В работе [4] рассматривается распространение поверхностных волн, где неоднородность по глубине задана гиперболическими тригонометрическими функциями от глубины.

Различные типы неоднородности и механизм распространения волн в этих средах рассмотрены в работах [5-8].

Исследования, посвящённые отражению волн от однородного и неоднородного слоя, отражены в ряде работ [1-5]. В работе Бреховских Л.М. [2] (стр. 15-19, 38-44) изучается отражение волн от системы однородных слоёв.

Рассмотрим двухслойную упругую среду. Пусть материал упругого слоя обладает экспоненциальной ($-h \le y \le 0$) неоднородностью $\rho(y) = \rho(0)\exp(2\alpha y)$, $\mu(y) = \mu(0)\exp(2\alpha y)$. Этот слой закреплён к однородному полупространству ($y \ge 0$) с постоянными Ламэ λ, μ и ρ. Рассмотрим вопрос отражения упругой сдвиговой волны от границы раздела слоя и полупространства.

Уравнение распространения сдвиговых волн в неоднородной среде имеет вид:

$$\mu(y)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(y)\frac{\partial u_1}{\partial y}\right) = \rho(y)\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \tag{1.1}$$

а в однородном пространстве –

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{1.2}$$

Введём обозначения:

$$q=\sqrt{\omega^2/C_t^2-k^2}\,,\ C_t^2=\frac{\mu}{\rho},\ \gamma=\frac{\mu}{\mu(0)},\ p=\sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2}-k^2-\alpha^2}\,,\ C_{t1}^2=\frac{\mu(0)}{\rho(0)}. \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.1) представляется в следующем виде:

$$u_1=(C_1\sin py+C_2\cos py)e^{-\alpha y}\exp i(kx-\omega t). \quad (1.4)$$

Решение уравнения (1.2) запишется в виде:

$$u=[A_0\exp(-iqy)+B\exp(iqy)]\exp i(kx-\omega t). \quad (1.5)$$

На u и u_1 налагаются граничные условия:

при $y=-h$ $\sigma_{23}^1=0$, т.е. $\frac{\partial u_1}{\partial y}=0$, $\quad (1.6)$

при $y=0$ $u=u_1$, $\mu(0)\frac{\partial u_1}{\partial y}=\mu\frac{\partial u}{\partial y}$. $\quad (1.7)$

Пусть на границу раздела падает сдвиговая волна $W_1=A_0\exp i(kx-qy-\omega t)$, тогда отражённая волна имеет вид $W_2=B\exp i(kx+qy-\omega t)$. Заметим, что $u=W_1+W_2$.

Подставляя u и u_1 в граничные условия (1.6)-(1.7), получим:

$$\begin{aligned}&-\alpha e^{\alpha h}(C_2\cos ph-C_1\sin ph)+e^{\alpha h}(C_1p\cos ph+C_2p\sin ph)=0,\\&-A_0-B+C_2=0,\\&-\alpha C_2+C_1p+i(qA_0-B)\gamma=0,\end{aligned}\quad (1.8)$$

которая представляет собой систему из трёх уравнений относительно четырех неизвестных: A_0, B, C_1, C_2. Из этой системы выразим B, C_1, C_2 через A_0, в частности,

$$B=-\frac{A_0[-ipq\gamma\cosh p+(\alpha^2+p^2-i\alpha q\gamma)\sinh p]}{ipq\gamma\cos ph+(\alpha^2+p^2+i\alpha q\gamma)\sin ph}. \quad (1.9)$$

Отношение B/A_0 представляет собой коэффициент отражения. Разделяя действительную и мнимую части числа B, представим его в виде: $B=B_1+iB_2$:

$$B_1=\frac{A_0[p^2\gamma^2q^2\cos^2\mathrm{h}\,p-((\alpha^2+p^2)^2-\alpha^2q^2\gamma^2)\sin^2\mathrm{h}\,p+\alpha q^2\gamma^2p\sin 2hp]}{H},$$

$$B_2=\frac{2A_0(\alpha^2+p^2)q\gamma\sinh p[p\cosh p+\alpha\sinh p]}{H}, \quad (1.10)$$

где

$$H=p^2q^2\gamma^2\cos^2hp+((\alpha^2+p^2)^2+\alpha^2q^2\gamma^2)\sin^2hp+\alpha pq^2\gamma^2\sin 2hp$$

Из соотношений (1.10) можно заключить, что из $\sin ph=0$ следует, что $B_1=A_0$, $B_2=0$ и в данном случае коэффициент отражения равен 1.

При $\cos ph=0$

$$B_1=A_0\frac{\alpha^2q^2\gamma^2-(\alpha^2+p^2)^2}{(\alpha^2+p^2)^2+\alpha^2\gamma^2q^2},$$

$$B_2 = \frac{2A_0(\alpha^2 + p^2)q\gamma\alpha}{(\alpha^2 + p^2)^2 + \alpha^2 q^2 \gamma^2}. \qquad (1.11)$$

Из полученных выражений можно заключить, что если полупространство однородно ($\alpha = 0$), то при $\cos ph = 0$ $B = -A_0$.

В случае закреплённой границы условие (1.6) заменяется на

$$u_1(-h) = 0, \qquad (1.12)$$

а остальные граничные условия остаются без изменения.

Опять рассмотрим задачу на отражение в прежней постановке.

Подставляя полученные решения u и u_1 в граничные условия (1.7)-(1.12), получим:

$$\begin{gathered} e^{\alpha h}(C_2 \cos hp - C_1 \sin hp) = 0, \\ -A_0 - B + C_2 = 0, \\ -\alpha C_2 + pC_1 + i(A_0 q - iBq)\gamma = 0. \end{gathered} \qquad (1.13)$$

Из полученной системы определяются неизвестные C_1, C_2, B, имеем (в частности):

$$B = \frac{A_0(-p\cos ph + (\alpha - iq\gamma)\sin ph)}{p\cos ph - (\alpha + iq\gamma)\sin ph}\mathbb{S}. \qquad (1.14)$$

Здесь B есть комплексное число $B = B_1 + iB_2$, отделив действительную и мнимую части числа B, получим:

$$B_1 = A_0\left(-1 + \frac{2q^2\gamma^2 \sin^2 ph}{L}\right), \qquad (1.15)$$

$$B_2 = -A_0 \frac{q\gamma(-2\alpha \sin^2 ph + \sin 2ph)}{L}. \qquad (1.16)$$

где $L = p^2 \cos^2 ph + (\alpha^2 + q^2\gamma^2)\sin^2 ph - \alpha p \sin 2ph$

При $\sin ph = 0$ имеем: $B = -A_0$ и коэффициент отражения $B / A = -1$.

Если $\alpha = 0$ и $\cos ph = 0$, то B – действительное число, на самом деле, $B_1 = A_0$, $B_2 = 0$. В выражениях для B (1.9) и (1.14) совершим замену $q = iq_1$. Легко заметить, что если $q^2 = \frac{\omega^2}{C_t^2} - k^2$, то

$$q_1 = k^2 - \frac{\omega^2}{C_t^2} = k^2\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2 C_t^2}\right) = k^2(1-\eta). \qquad (1.17)$$

После совершения замены получим соотношения:

$$B = -\frac{A_0[pq_1\gamma \cos ph + (\alpha^2 + p^2 + \alpha q_1\gamma)\sin ph]}{-q_1 p\gamma \cos ph + (\alpha^2 + p^2 - \alpha q_1\gamma)\sin ph}, \qquad (1.18)$$

$$B = \frac{A_0[-p\cos ph + (\alpha + q_1\gamma)\sin p\,\mathrm{h}]}{p\cos ph + (q_1\gamma - \alpha)\sin ph}. \qquad (1.19)$$

Если приравнять знаменатели выражений (1.18) и (1.19) к нулю и подставляя в них значения p и q_1 из (1.3) и (1.17), получим:

$$\operatorname{tg}æ kh=\frac{æ\gamma\sqrt{1-\eta}}{\theta\eta-1-\alpha k^{-1}\gamma\sqrt{1-\eta}}, \tag{1.20}$$

$$\operatorname{tg}\sqrt{k^2\left(\frac{\omega^2}{C_{t1}^2}-1\right)-\alpha^2}\,h=\frac{-\sqrt{k^2(\theta\eta-1)-\alpha^2}}{k\gamma\sqrt{1-\eta}-\alpha}. \tag{1.21}$$

Знаменатель и числитель правой части (1.21) умножим на h, после чего окончательно получим:

$$\operatorname{tg}æ kh=\frac{æ\gamma\sqrt{1-\eta}}{\theta\eta-1-\alpha k^{-1}\gamma\sqrt{1-\eta}},$$

$$\operatorname{tg}\sqrt{\xi^2(\theta\eta-1)-\varepsilon^2}=-\frac{\sqrt{\xi^2(\theta\eta-1)-\varepsilon^2}}{\xi\gamma\sqrt{1-\eta}-\varepsilon}.$$

В полученных формулах, как и в задаче Лява, имеют место соотношения:

$$æ^2=\theta\eta-1-\frac{\alpha^2}{k^2},\ \xi=kh,\ \varepsilon=\alpha h,\ \theta=\frac{C_t^2}{C_{t1}^2},\ \eta=\frac{\omega^2}{k^2C_t^2}.$$

Следствие соотношения (1.20) представляет собой дисперсионное уравнение для задачи Лява со свободной границей $y=-h$, а следствие соотношения (1.21) представляет собой дисперсионное уравнение задачи Лява с закреплённой границей $y=-h$.

Исследуем случай, когда $k=0$, учитывая, что в случае свободной границы $B=B_1+iB_2$, где B_1, B_2 определяются по формулам (1.10):

$$B_1=\frac{p^2\gamma^2q^2\cos^2 hp-((\alpha^2+p^2)^2-\alpha^2\gamma^2q^2)\sin^2 hp+\alpha pq^2\gamma^2\sin 2hp}{p^2\gamma^2q^2\cos^2 hp+((\alpha^2+p^2)^2+\alpha^2q^2\gamma^2)\sin^2 hp+\alpha pq^2\gamma^2\sin 2hp}A_0,$$

$$B_2=\frac{2A_0(\alpha^2+p^2)q\gamma\sin hp[p\cos hp+\alpha\sin hp]}{p^2\gamma^2q^2\cos^2 ph+((\alpha^2+p^2)^2+\alpha^2q^2\gamma^2)\sin^2 ph+\alpha pq^2\gamma^2\sin 2ph}.$$

В случае $k=0$ из формул (1.3) получим:

$$q=\frac{\omega}{C_t},\quad p=\sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2}-\alpha^2},\quad \gamma=\frac{\mu}{\mu(0)},$$

$$\alpha^2+p^2=\frac{\omega^2}{C_{t1}^2},\quad C_{t1}^2=\frac{\mu(0)}{\rho(0)},\quad C_t^2=\frac{\mu}{\rho}. \tag{1.22}$$

Подставляя значение α^2+p^2 в формулу (1.10) и сокращая на q^2, получим:

$$B_1=\frac{[p^2\gamma^2\cos^2 hp-(\frac{\omega^4}{C_{t1}^4q^2}-\alpha^2\gamma^2)\sin^2 hp+\alpha\gamma^2p\sin 2hp]}{p^2\gamma^2\cos^2 hp+(\frac{\omega^4}{C_{t1}^4q^2}+\alpha^2\gamma^2)\sin^2 ph+\alpha p\gamma^2\sin 2hp}A_0, \tag{1.23}$$

$$\frac{\omega^4}{C_{t1}^4q^2}=\frac{\omega^4C_t^2}{C_{t1}^4\omega^2}=\frac{\omega^2C_t^2}{C_{t1}^4}.$$

Если $\alpha = 0$, то подставляя значение $p = \dfrac{\omega}{C_{t1}}$ в (1.23), для B_1 получим:

$$B_1 = \frac{C_{t1}^2\gamma^2 \cos^2 hp - C_t^2 \sin^2 hp}{C_{t1}^2\gamma^2 \cos^2 hp + C_t^2 \sin^2 hp} A_0, \tag{1.24}$$

отсюда следует: $B_1 = 0$ при

$$C_{t1}^2\gamma^2 \cos^2 hp - C_t^2 \sin^2 hp = 0, \tag{1.25}$$

$$\frac{\rho\mu}{\rho(0)\mu(0)} = \mathrm{tg}^2 hp. \tag{1.26}$$

Здесь $\rho\times\mu$ представляет собой импеданс полупространства, а $\rho(0)\mu(0)$ – импеданс слоя. Если $hp=\pi/4+\pi k$, $k \in Z$, то импеданс слоя равен импедансу полупространства и коэффициент $B_1 = 0$ – при отражении. Полученная отражённая сдвиговая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу либо на $-\pi/2$, либо на $\pi/2$. При $\alpha \neq 0$ условие $B_1 = 0$ запишется в виде:

$$\begin{gathered}\gamma^2 \frac{\omega^2}{C_{t1}^2}\cos^2 hp - \frac{\omega^2}{C_{t1}^4} C_t^2 \sin^2 hp - \\ -\alpha[\alpha\gamma^2 \cos^2 hp - \gamma^2 \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - \alpha^2} \cdot \sin 2hp] = 0\end{gathered}, \tag{1.27}$$

Выводя из скобок выражение ω^2 / C_{t1}^4, получим:

$$\begin{gathered}\frac{\omega^2}{C_{t1}^4}[\gamma^2 C_{t1}^2 \cos^2 hp - C_t^2 \sin^2 hp - \\ -\frac{\alpha\gamma^2}{\omega^2} C_{t1}^4 [\alpha(\cos^2 hp - \sin^2 hp) - \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - \alpha^2} \cdot \sin 2hp] = 0\end{gathered}.$$

При $ph = \pi/4 + 2\pi k$ имеем:

$$\frac{1}{2}(\gamma^2 C_{t1}^2 - C_t^2) + \frac{\alpha\gamma^2}{\omega^2} C_{t1}^4 \cdot \sqrt{\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} - \alpha^2} = 0. \tag{1.28}$$

Решим это уравнение относительно α:

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{\omega^2}{2C_{t1}^2} + \frac{\omega^2 C_t}{2C_{t1}^4}\sqrt{2C_{t1}^2\gamma^2 - C_t^2}}, \tag{1.29}$$

т.е. при $ph = \pi/4 + 2\pi k$ и при полученных α полученная отражённая сдвиговая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу либо на $-\pi/2$, либо на $\pi/2$.

В случае закреплённой границы $y = -h$ при $k = 0$ отражённая волна имеет амплитуду $B = B_1 + iB_2$, где B_1 и B_2 определяются по формулам (1.15), (1.16):

$$B_1 = A_0\left(-1 + \frac{2q^2\gamma^2 \sin^2 ph}{p^2 \cos^2 ph + (\alpha^2 + q^2\gamma^2)\sin^2 ph - \alpha p \sin 2ph}\right),$$

$$B_2 = -A_0 \frac{q\gamma(-2\alpha \sin^2 ph + p \sin 2ph)}{p^2 \cos^2 ph + (\alpha^2 + q^2\gamma^2)\sin^2 ph - \alpha p \sin 2ph}.$$

При $\alpha = 0$ имеют место формулы (1.22).

Подставляя значения q в (1.15), для B_1 получим:

$$B_1 = \frac{-p^2 \cos^2 ph - \alpha^2 \sin^2 ph + \dfrac{\gamma^2\omega^2}{C_t^2}\sin^2 ph + \alpha p \sin 2ph}{p^2 \cos^2 ph + (\alpha^2 + \dfrac{\omega^2}{C_t^2}\gamma^2)\sin^2 ph - \alpha p \sin 2ph} A_0. \qquad (1.30)$$

Если $\alpha = 0$, то подставляя значение $p = \dfrac{\omega}{C_{t1}}$ в выражение для B_1, получим:

$$B_1 = \frac{-\dfrac{\omega^2}{C_{t1}^2}\cos^2 ph + \dfrac{\gamma^2\omega^2}{C_t^2}\sin^2 ph}{\dfrac{\omega^2}{C_{t1}^2}\cos^2 ph + \dfrac{\omega^2}{C_t^2}\gamma^2 \sin^2 ph} A_0. \qquad (1.31)$$

Сократив на ω^2 и умножив знаменатель и числитель (1.31) на $C_{t1}^2 \cdot C_t^2$, получим:

$$B_1 = \frac{-C_t^2 \cos^2 ph + \gamma^2 C_{t1}^2 \sin^2 ph}{C_t^2 \cos^2 ph + \gamma^2 C_{t1}^2 \sin^2 ph},$$

откуда видно, что $B_1 = 0$ при выполнении условия:

$$\mathrm{tg}^2 ph = \frac{C_t^2}{C_{t1}^2\gamma^2} = \frac{\mu \cdot \mu^2(0)\cdot\rho(0)}{\rho\cdot\mu^2\cdot\mu(0)} = \frac{\mu(0)\rho(0)}{\mu\rho},$$

отсюда при $ph = \pi/4 + \pi k$ опять получаем равенство импедансов двух сред и, так как $\operatorname{Re} B = 0$, то полученная отражённая сдвиговая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу либо на $-\dfrac{\pi}{2}$, либо на $\dfrac{\pi}{2}$.

В случае $p^2h^2 << 1$, полагая $\cos ph = 1$, $\sin ph = ph$, для B_1 и B_2 получим:

$$B_1 = \frac{A_0[q^2\gamma^2(1+\alpha h)^2 - (\alpha^2 + p^2)h^2]}{q^2\gamma^2(\alpha h + 1)^2 + (\alpha^2 + p^2)^2 h^2}, \qquad (1.32)$$

$$B_2 = \frac{2A_0(\alpha^2 + p^2)q\gamma h(1+\alpha h)}{q^2\gamma^2(\alpha h+1)^2 + (\alpha^2 + p^2)^2 h^2}, \qquad (1.33)$$

$B_1 = 0$ при $q^2\gamma^2(\alpha h+1)^2 = (\alpha^2 + p^2)^2 h^2$ или $q\gamma(\alpha h + 1) = (\alpha^2 + p^2)h$, из последнего уравнения:

$$\alpha = \frac{q\gamma}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2\gamma^2}{4} - p^2 + \frac{q\gamma}{h}}.$$

Для полученных значений α имеем $\alpha^2 + p^2 = \dfrac{q\gamma}{h}(\alpha h + 1)$ и для B_2 получим:

$$B_2 = \frac{2A_0 \dfrac{q\gamma}{h} q\gamma h(1+\alpha h)^2}{q^2\gamma^2(\alpha h+1)^2 + \dfrac{q^2\gamma^2}{h^2}(\alpha h+1)^2 h^2} = A_0,$$

т.е. для полученных значений α отражённая волна меняет фазу на $\pi/2$.

Из (1.32), (1.33) в случае $k=0$ с учётом формул (1.22) получим:

$$B_1 = \frac{A_0[q^2\gamma^2(1+\alpha h)^2 - \dfrac{\omega^4}{C_{t1}^4}h^2]}{q^2\gamma^2(1+\alpha h)^2 + \dfrac{\omega^4}{C_{t1}^4}h^2},$$

$$B_2 = \frac{2A_0 \dfrac{\omega^2}{C_{t1}^2} q\gamma h(1+\alpha h)}{q^2\gamma^2(1+\alpha h)^2 + \dfrac{\omega^4}{C_{t1}^4}h^2}.$$

Отсюда при $B_1 = 0$

$$1+\alpha h = \frac{\omega h}{C_t}\cdot\frac{\rho(0)}{\rho}. \qquad (1.34)$$

Для α, удовлетворяющих этому условию, после преобразования B_2 получим $B_2 = A_0$, т.е. отражённая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу на $\dfrac{\pi}{2}$.

При $p^2h^2 << 1$, $k=0$, $\alpha=0$ для случая свободной верхней границы слоя получим $B_1 = 0$ при $q\gamma = p^2h$ или с учётом формул (1.22):

$$C_t = \frac{\rho(0)}{\rho}\omega h, \qquad (1.35)$$

отсюда можно вывести $B_2 = A_0$.

Из (1.35) следует, что при заданном ω, если $h = \dfrac{C_t}{\omega}\cdot\dfrac{\rho}{\rho(0)}$, то фаза отражённой волны меняется на $\dfrac{\pi}{2}$, или при заданном h, если $\omega = C_t h^{-1}\cdot\dfrac{\rho}{\rho(0)}$, то опять имеет место то же самое явление.

Из (1.34) при заданном α и h определяется $\omega = \dfrac{(1+\alpha h)C_t}{h}\cdot\dfrac{\rho}{\rho(0)}$, при котором фаза отражённой волны по сравнению с первоначальной меняется на $\pi/2$.

При заданных α и h определяется значение $\alpha = \dfrac{1}{h}\left(\dfrac{\omega h}{C_t} - 1\right)\cdot\dfrac{\rho}{\rho(0)}$, для которой отражённая волна меняет фазу на $\pi/2$. Обозначив $\dfrac{\rho(0)}{\rho}$ через β, при

заданных ω и α определяется значение h, при котором имеет место то же явление: $h = \dfrac{C_t}{\omega\beta - C_t\alpha}$, по сравнению с однородным случаем при $\alpha > 0$ h становится больше, а при $\alpha < 0$ h становится меньше. С учётом условия $p^2h^2 << 1$ получим:
$\dfrac{\omega^2}{C_{t1}^2} \cdot \dfrac{C_t^2}{(\omega\beta - \alpha C_t)^2} << 1$ или $\dfrac{\omega^2}{C_{t1}^2} << \dfrac{(\omega\beta - \alpha C_t)^2}{C_t^2}$
или окончательно:

$$\frac{\omega^2}{C_{t1}^2} << \left(\frac{\omega}{C_t} \cdot \beta - \alpha\right)^2 . \qquad (1.36)$$

В случае закреплённой верхней границы слоя при $p^2h^2 << 1$ для B_1 и B_2 получим формулы

$$B_1 = A_0\left(-1 + \frac{2q^2\gamma^2h^2}{1 + (\alpha^2 + q^2\gamma^2)h^2 - 2\alpha h}\right), \qquad (1.37)$$

$$B_2 = -A_0 \frac{q\gamma(-2\alpha p^2h^2 + 2ph)}{p^2(1 + (\alpha^2 + q^2\gamma^2)h^2 - 2\alpha h)} . \qquad (1.38)$$

При α, близких к значению $\dfrac{1}{ph}$, отражённая волна лишь меняет амплитуду без изменения фазы. У нас $B_1 = 0$ при существовании корней уравнения $\alpha^2h^2 - 2\alpha h + 3\gamma^2q^2h^2 - 1 = 0$. При существовании таких корней волна для этих значений α при отражении меняет фазу либо на $-\dfrac{\pi}{2}$, либо на $\dfrac{\pi}{2}$.

Итак, в случае свободной верхней границы слоя при $\alpha = 0$ (однородный слой), для $ph = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ коэффициент отражения равен -1. В случае перпендикулярного падения ($k = 0$) при $hp = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$ ($k \in Z$), импеданс слоя равен импедансу полупространства и $\operatorname{Re} B = 0$, а полученная отражённая сдвиговая волна по сравнению с первоначальной меняет фазу либо на $-\dfrac{\pi}{2}$, либо на $\dfrac{\pi}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 342 с.
2. Погосян Т.Д. Упругие волны в экспоненциально неоднородном полупространстве и в полубесконечной пластине. //Диссертация на соискание учёной степени кандитата физ.-мат наук. Ереван. 2010 г.

3. Зволинский Н.В. Отражённые и головные волны, возникающие на плоской границе раздела двух упругих сред. Ч.II // Изв. АН СССР. Сер. Геофизика. 1958. № 1. С.3–6.
4. Саакян С.Г., Варданян И.А. Сдвиговые поверхностные волны в некоторых вертикально-неоднородных упругих средах. //Докл. НАН Армении. 1999. Т.99. №1. С.40–44.
5. Bhattacharya J. On the Propagation of Waves in an Elastic due to Various Types of Pressures and Velocities Prescribed on the Inner Surface of a Spherical Cavity. //Gertands Beitz. Geophys., 1969. Vol.7. № 3.
6. Chattarjee S.N. Propagation of Rayleigh Waves in a Layer, Lying Over a Heterogeneous Half-Space.//Pure and Applied Geophysics. 1971. Vol.86. №3. P.69-79.
7. Bleustein J.L. A new surface wave in piezoelectric materials. //Appl. Phys. Lett. Vol.13. №12. P.412-413.
8. Maugin G.A. Elastic surface waves with transverse horizontal polarization. //Advances in Applied Mechanics. 1983. Vol.23. P.373-374.

Сведения об авторе:

Погосян Норик Джанибекович – кандидат физ-мат. наук,
научный сотрудник Института механики НАН Армении
Тел.: (093)73-29-7**2**
E-mail: poghosyan.norik@mail.ru

Поступила в редакцию 05.10.2011