

УДК 529.3.01

**ОБ АНТИПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОГО УПРУГОГО  
КЛИНА, СОДЕРЖАЩЕГО НА ЛИНИИ СПАЯ КОЛЛИНЕАРНУЮ СИСТЕМУ  
ЩЕЛЕЙ И АБСОЛЮТНО ЖЁСТКИХ ТОНКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ  
МКРТЧЯН М.М., МКРТЧЯН М.С.**

**Ключевые слова:** напряжение, клин, трещина, включения, система сингулярных интегральных уравнений, коэффициенты интенсивностей напряжений, раскрытие трещины  
**Keywords:** stress, wedge, crack, inclusion, system of singular integral equations, coefficients of stress intensity, crack opening displacement

Մկրտչյան Մ.Մ., Մկրտչյան Մ.Ս.

**Միացման գծի վրա ճաքեր և բարակապատ բացարձակ կոշտ ներդրակների համագիծ համակարգ պարունակող կտոր առ կտոր համասեռ առաձգական սեպի հակահարթ խնորհի մասին**

Աշխատանքում հետազոտվում է առաձգական կտոր առ կտոր համասեռ սեպի լարվածադեֆորմացիոն վիճակի վերաբերյալ խնդիրը հակահարթ դեֆորմացիայի ժամանակ, երբ սեպի մի եզրի վրա ազդում են բաշխված շոշափող ուժեր, իսկ մյուս եզրը կոշտ ամրակցված է: Տարասեռ սեպերի միացման գծի վրա դասավորված են ճաքերի և բացարձակ կոշտ բարակապատ ներդրակների համագիծ համակարգեր:

Mkrtychyan M.M., Mkrtychyan M.S.

**On anti-plane problem of piecewise homogeneous elastic wedge containing the collinear system of cracks on junction line and absolutely rigid thin inclusions**

In the present paper the problem on determination of the stress-strain state components of a piecewise homogeneous wedge under anti-plane deformations, one of the bounds of which is loaded by distributed tangential forces and the other one of the composite wedge is rigidly fastened, is considered. With this on the junction line of heterogeneous wedges collinear systems of cracks and absolutely rigid inclusions are distributed.

В настоящей работе рассматривается задача об определении компонентов напряженно-деформированного состояния кусочно-однородного клина при антиплоской деформации, одна из граней которого нагружена распределёнными касательными силами, а другая грань составного клина жёстко закреплена. При этом, на линии спая разнородных клиньев расположены коллинеарные системы трещин и абсолютно жёстких включений.

Задачи о трещинах и включениях тесно связаны с задачами определения напряжённо-деформированного состояния в однородных и неоднородных упругих телах, содержащих концентраторы напряжений. Ввиду их теоретической и практической важности в вопросах горной механики, механики композитов и прочности разнообразных инженерных конструкций они стали предметом исследования многих авторов. В этом направлении укажем на работы [1-3], а также на статью [4]. Аналогичные задачи рассмотрены в [5-7].

1. Пусть, отнесённый к цилиндрической системе координат  $r, \vartheta, z$  кусочно-однородный упругий клин состоит из двух областей:  $\Omega_{\alpha} = \{-\infty < z < \infty, 0 \leq r \leq \infty, 0 \leq \vartheta \leq \alpha\}$  с модулем сдвига  $G_{+}$  и  $\Omega_{\beta} = \{-\infty < z < \infty, 0 \leq r \leq \infty, -\beta \leq \vartheta \leq 0\}$  с модулем сдвига  $G_{-}$ , и в плоскости  $\vartheta = 0$  содержит систему из произвольного конечного числа сквозных трещин и

тонких абсолютно жёстких включений, причём их следы в плоскости  $r\vartheta$  составляют, соответственно, систему интервалов  $L_1$  и  $L_2$  ( $L = L_1 \cup L_2$ ):

$$L_1 = \bigcup_{k=1}^{N_1} [a_k, b_k]; \quad 0 < a_k < b_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_1); \quad b_k < a_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_1 - 1})$$

$$L_2 = \bigcup_{k=1}^{N_2} [c_k, d_k]; \quad 0 < c_k < d_k \quad (k = 1, 2, \dots, N_2); \quad d_k < c_{k+1} \quad (k = \overline{1, N_2 - 1}).$$

Пусть далее свободная грань клина нагружена распределёнными касательными силами интенсивности  $\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=\alpha} = f_+(r)$  ( $0 < r < \infty$ ), а другая грань составного клина жёстко закреплена. Кроме того, берега трещин также нагружены силами с заданными интенсивностями  $\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=\pm 0} = -\tau_{\pm}^{(1)}(r)$  ( $r \in L_1$ ), а на систему включений  $L_2$  действуют силы с равнодействующими  $P_k$ , направленные вдоль оси  $Oz$  и вызывающие продольный сдвиг упругого клина в направлении оси  $Oz$  с базовой плоскостью  $r\vartheta$ .

Требуется определить плотность дислокаций смещений и скачков смещений на берегах трещин, скачков напряжений на берегах включений, разрушающие напряжения и коэффициенты интенсивности напряжений (КИН).

Для вывода определяющих уравнений поставленной задачи кусочно-однородный упругий клин вдоль оси  $Or$  разрежем на две части, а затем для действующих на их гранях  $\vartheta = \pm 0$  напряжений введём следующие обозначения ( $L' = R_+ \setminus L; R_+ = (0, \infty)$ ):

$$-\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=+0} = T_+(r) = \begin{cases} \tau_+^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ \tau_+^{(2)}(r) & (r \in L_2); \\ \tau(r) & (r \in L'); \end{cases} \quad (1)$$

$$-\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=-0} = T_-(r) = \begin{cases} \tau_-^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ \tau_-^{(2)}(r) & (r \in L_2); \\ \tau(r) & (r \in L'). \end{cases}$$

На системе включений  $L_2$  смещения постоянны:

$$u_z^+(r, \vartheta)|_{\vartheta=+0} = u_z^-(r, \vartheta)|_{\vartheta=-0} = \delta_k = \text{const}; \quad r \in (c_k, d_k) \quad (k = \overline{1, N_2}). \quad (2)$$

Запишем также граничные условия на  $\vartheta = \alpha$ ,  $\vartheta = -\beta$ :

$$\tau_{\vartheta z}|_{\vartheta=\alpha} = G_+ \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^+}{\partial \vartheta} \Big|_{\vartheta=\alpha} = f_+(r); \quad u_z^-(r, \vartheta)|_{\vartheta=-\beta} = 0 \quad (0 < r < \infty) \quad (3)$$

где  $u_z^{\pm}(r, \vartheta)$  – смещения точек, соответствующие клиньям  $\Omega_{\alpha}$  и  $\Omega_{\beta}$ , которые в этих областях удовлетворяют уравнению Лапласа в полярной системе координат:

$$\frac{\partial^2 u_z^{\pm}(r, \vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z^{\pm}(r, \vartheta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z^{\pm}(r, \vartheta)}{\partial \vartheta^2} = 0. \quad (4)$$

Далее введём в рассмотрение следующие величины:

$$\Omega(r) = T_+(r) + T_-(r); \quad h(r) = \frac{du_z^+(r, +0)}{dr} + \frac{du_z^-(r, -0)}{dr};$$

$$\chi(r) = T_+(r) - T_-(r) = \begin{cases} \psi(r) & (r \in L_2); \\ \tau_+^{(1)}(r) - \tau_-^{(1)}(r) & (r \in L_1); \\ 0 & (r \in L'), \end{cases} \quad (5)$$

а также плотность дислокаций смещений на берегах трещин:

$$w(r) = \frac{du_z^+(r, +0)}{dr} - \frac{du_z^-(r, -0)}{dr} = \begin{cases} \varphi(r) & (r \in L_1); \\ 0 & (r \in R_+/L_1). \end{cases} \quad (6)$$

Теперь с помощью математического аппарата интегрального преобразования Меллина [8] по переменной  $r$ , из уравнения (4) и граничных условий (1)-(3) в обозначениях (5)-(6), придём к системе ключевых уравнений задачи относительно плотностей дислокаций на берегах трещин  $w(r)$  и скачков касательных контактных напряжений  $\chi(r)$  на берегах включений:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi_{L_1}} \int \frac{w(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi_{L_1}} \int K \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) w(r_0) dr_0 - \frac{G_+ - G_-}{2G_+ G_-} r \chi(r) - \\ & - \frac{1}{\pi_{L_1}} \int M \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 - \frac{1}{\pi_{L_2}} \int M \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 = \\ & = - \frac{G_+ + G_-}{2G_+ G_-} r \Omega(r) - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_0^\infty F_1 \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0; \\ & \frac{G_+ - G_-}{2} r w(r) + \frac{G_+ G_-}{\pi} \int_{L_1} M \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) w(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi_{L_1}} \int \frac{\chi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \\ & + \frac{1}{\pi_{L_2}} \int \frac{\chi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi_{L_1}} \int Q \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi_{L_2}} \int Q \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) \chi(r_0) dr_0 = \\ & = - \frac{G_+ + G_-}{2} r h(r) + \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_0^\infty F_2 \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) f_+(r_0) dr_0 \quad (r \in R_+); \end{aligned} \right. \quad (7)$$

где

$$K \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) [1 - \operatorname{th}(\beta s)] - G_- [1 - \operatorname{th}(\alpha s)]}{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) + G_-} \sin \left( s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$M \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) - 1}{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) + G_-} \cos \left( s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$Q \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{G_+ \operatorname{th}(\beta s) [1 - \operatorname{th}(\alpha s)] - G_- [1 - \operatorname{th}(\beta s)]}{G_+ \operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) + G_-} \sin \left( s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$F_1 \left( \ln \frac{r_0}{r} \right) = \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}(\alpha s) [G_+ \operatorname{th}(\alpha s) \operatorname{th}(\beta s) + G_-]} \cos \left( s \ln \frac{r_0}{r} \right) ds;$$

$$F_2\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) = \int_0^\infty \frac{\text{th}(\beta s)}{\text{ch}(\alpha s)[G_+ \text{th}(\alpha s)\text{th}(\beta s) + G_-]} \sin\left(s \ln \frac{r_0}{r}\right) ds.$$

Рассматривая первое уравнение системы (7) на  $L_1$ , а второе уравнение на  $L_2$ , придём к определяющей системе сингулярных интегральных уравнений (СИУ) задачи:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{\varphi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} K\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \varphi(r_0) dr_0 - \frac{1}{\pi} \int_{L_2} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \psi(r_0) dr_0 = \\ & = -r \left[ \frac{\tau_+^{(1)}(r)}{G_+} + \frac{\tau_-^{(1)}(r)}{G_-} \right] + \frac{1}{\pi} \int_{L_1} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) [\tau_+^{(1)}(r_0) - \tau_-^{(1)}(r_0)] dr_0 - \\ & \quad - \frac{G_+ + G_-}{\pi G_+} \int_0^\infty F_1\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) f_+(r_0) dr_0; \quad (r \in L_1) \\ & \frac{G_+ G_-}{\pi} \int_{L_1} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \varphi(r_0) dr_0 + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} \frac{\psi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} + \frac{1}{\pi} \int_{L_2} Q\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \psi(r_0) dr_0 = \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_{L_1} \frac{[\tau_+^{(1)}(r_0) - \tau_-^{(1)}(r_0)] dr_0}{\ln r_0 - \ln r} - \frac{1}{\pi} \int_{L_1} Q\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) [\tau_+^{(1)}(r_0) - \tau_-^{(1)}(r_0)] dr_0 + \\ & \quad + \frac{G_+ + G_-}{\pi} \int_0^\infty F_2\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) f_+(r_0) dr_0; \quad (r \in L_2) \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Система (8) должна рассматриваться при условиях

$$\int_{b_k} \varphi(r) dr = 0, \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad (9)$$

$$\int_{c_k} \psi(r) dr = P_k. \quad (k = \overline{1, N_2}) \quad (10)$$

Первое из них эквивалентно условиям непрерывности смещений в концевых точках разреза, а второе представляет собой условие равновесия  $k$ -того включения.

Рассматривая первое уравнение системы (7) вне разрезов и включений, будем иметь

$$\begin{aligned} \tau(r) = & -\frac{G_+ G_-}{\pi r (G_+ + G_-)} \int_{L_1} \frac{\varphi(r_0) dr_0}{\ln r_0 - \ln r} - \frac{G_+ G_-}{\pi r (G_+ + G_-)} \times \\ & \times \int_{L_1} K\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \varphi(r_0) dr_0 + \frac{G_+ G_-}{\pi r (G_+ + G_-)} \int_{L_1} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \times \\ & \times [\tau_+^{(1)}(r_0) - \tau_-^{(1)}(r_0)] dr_0 + \frac{G_+ G_-}{\pi r (G_+ + G_-)} \int_{L_2} M\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) \psi(r_0) dr_0 - \\ & - \frac{G_-}{\pi r} \int_0^\infty F_1\left(\ln \frac{r_0}{r}\right) f_+(r_0) dr_0; \quad (r \in L') \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, поставленная задача о напряжённом состоянии упругого клина с трещинами и абсолютно жёсткими включениями сводится к решению системы (8) при условиях (9)–(10). После нахождения решения (8)–(10) разрушающее напряжение вне трещин определяется формулой (11).

2. Для нахождения решения, определяющей СИУ (8)–(10), сначала введём следующие безразмерные координаты и величины:

$$\xi = \ln(r/l), \quad \eta = \ln(r_0/l); \quad \alpha_k = \ln(a_k/l); \quad \beta_k = \ln(b_k/l); \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad \gamma_k = \ln(c_k/l);$$

$$\delta_k = \ln(d_k/l); \quad (k = \overline{1, N_2}), \quad \mu = G_+/G_-; \quad L_{01} = \bigcup_{k=1}^{N_1} (\alpha_k; \beta_k); \quad L_{02} = \bigcup_{k=1}^{N_2} (\gamma_k; \delta_k); \quad (12)$$

$$\varphi_0(\eta) = e^\eta \varphi(le^\eta); \quad \psi_0(\eta) = \frac{e^\eta \psi(le^\eta)}{G_+ + G_-}; \quad \tau_\pm^{(0)}(\eta) = \frac{e^\eta \tau_\pm^{(1)}(le^\eta)}{G_+ + G_-}; \quad f_+^{(0)}(\eta) = \frac{e^\eta f_+(le^\eta)}{G_+ + G_-},$$

где  $l$  – характерный параметр длины, после чего (8) преобразуется в следующее СИУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} \frac{\varphi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} K_0(\xi - \eta) \varphi_0(\eta) d\eta - \\ \quad - \frac{\mu + 1}{\pi} \int_{L_{02}} M_0(\xi - \eta) \psi_0(\eta) d\eta = l_1(\xi); \quad (\xi \in L_{01}) \\ \frac{\mu}{\pi(\mu + 1)} \int_{L_{01}} M_0(\xi - \eta) \varphi_0(\eta) d\eta + \frac{1}{\pi} \int_{L_{02}} \frac{\psi_0(\eta) d\eta}{\eta - \xi} - \\ \quad - \frac{1}{\pi} \int_{L_{02}} Q_0(\xi - \eta) \psi_0(\eta) d\eta = l_2(\xi), \quad (\xi \in L_{02}) \end{array} \right. \quad (13)$$

где

$$K_0(x) = \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) [1 - \operatorname{th}(\lambda \beta)] - [1 - \operatorname{th}(\lambda \alpha)]}{\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$M_0(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) - 1}{\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1} \cos(\lambda x) d\lambda;$$

$$Q_0(x) = \int_0^\infty \frac{\mu \operatorname{th}(\lambda \beta) [1 - \operatorname{th}(\lambda \alpha)] - [1 - \operatorname{th}(\lambda \beta)]}{\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1} \sin(\lambda x) d\lambda;$$

$$F_{10}(x) = \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda \alpha) [\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1]} \cos(\lambda x) d\lambda;$$

$$F_{20}(x) = \int_0^\infty \frac{\operatorname{th}(\lambda \beta)}{\operatorname{ch}(\lambda \alpha) [\mu \operatorname{th}(\lambda \alpha) \operatorname{th}(\lambda \beta) + 1]} \cos(\lambda x) d\lambda;$$

$$l_1(\xi) = \frac{\mu + 1}{\pi} \int_{L_{01}} M_0(\xi - \eta) [\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)] d\eta - \frac{\mu + 1}{\mu} \tau_+^{(0)}(\xi) - (\mu + 1) \tau_-^{(0)}(\xi) -$$

$$- \frac{(\mu + 1)^2}{\pi \mu} \int_0^\infty F_{10}(\xi - \eta) f_+^{(0)}(\eta) d\eta; \quad (\xi \in L_{01})$$

$$l_2(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} \frac{[\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)]d\eta}{\eta - \xi} + \frac{1}{\pi} \int_{L_{01}} Q_0(\xi - \eta)[\tau_+^{(0)}(\eta) - \tau_-^{(0)}(\eta)]d\eta -$$

$$-\frac{\mu+1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{20}(\xi - \eta)f_+^{(0)}(\eta)d\eta; \quad (\xi \in L_{02})$$

Теперь каждый интервал  $(\alpha_k, \beta_k), (\gamma_k, \delta_k)$  системы  $L_{01}$  и  $L_{02}$  преобразуем в интервал  $(-1, 1)$ , полагая

$$\xi = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2}, \quad \eta = \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}u + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad (-1 < t, u < 1),$$

$$\xi = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2}t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2}, \quad \eta = \frac{\delta_k - \gamma_k}{2}u + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \quad (k = \overline{1, N_2}), \quad (-1 < t, u < 1)$$
(14)

в результате, СИУ (13) преобразуется в систему интегральных уравнений относительно функций

$$\Phi_k(t) = \Phi_0 \left( \frac{\beta_k - \alpha_k}{2}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right); \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, N_1})$$

$$\Psi_k(t) = \Psi_0 \left( \frac{\delta_k - \gamma_k}{2}t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} \right) \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, N_2})$$

на интервале  $(-1, 1)$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Phi_k(u)du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_1} \int_{-1}^1 K_{km}^{(1)}(t, u)\Phi_m(u)du - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_1} \int_{-1}^1 K_{km}(t, u)\Phi_m(u)du - \\ - \frac{\mu+1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_2} \int_{-1}^1 M_{km}^{(2)}(t, u)\Psi_m(u)du = l_{1k}(t); \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, N_1}) \\ \frac{\mu}{\pi(\mu+1)} \sum_{m=1}^{N_1} \int_{-1}^1 M_{km}^{(1)}(t, u)\Phi_m(u)du + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\Psi_k(u)du}{u-t} + \frac{1}{\pi} \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^{N_2} \int_{-1}^1 K_{km}^{(2)}(t, u)\Psi_m(u)du - \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{N_2} \int_{-1}^1 Q_{km}(t, u)\Psi_m(u)du = l_{2k}(t), \quad (-1 < t < 1; k = \overline{1, N_2}) \end{array} \right. \quad (15)$$

где

$$K_{km}^{(1)}(t, u) = \left( u - \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m}t + \frac{\beta_m + \alpha_m}{\beta_m - \alpha_m} - \frac{\beta_k + \alpha_k}{\beta_m - \alpha_m} \right)^{-1}; \quad (m, k = \overline{1, N_1})$$

$$K_{km}^{(2)}(t, u) = \left( u - \frac{\delta_k - \gamma_k}{\delta_m - \gamma_m}t + \frac{\delta_m + \gamma_m}{\delta_m - \gamma_m} - \frac{\delta_k + \gamma_k}{\delta_m - \gamma_m} \right)^{-1}; \quad (m, k = \overline{1, N_2})$$

$$K_{km}(t, u) = \lambda_m^{(1)} K_0 \left( \lambda_k^{(1)}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} - \lambda_m^{(1)}u - \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right); \quad (m, k = \overline{1, N_1})$$

$$M_{km}^{(1)}(t, u) = \lambda_m^{(1)} M_0 \left( \lambda_k^{(2)}t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} - \lambda_m^{(1)}u - \frac{\beta_m + \alpha_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_1}; k = \overline{1, N_2})$$

$$M_{km}^{(2)}(t, u) = \lambda_m^{(2)} M_0 \left( \lambda_k^{(1)}t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} - \lambda_m^{(2)}u - \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_2}; k = \overline{1, N_1})$$

$$Q_{km}(t, u) = \lambda_m^{(2)} Q_0 \left( \lambda_k^{(2)} t + \frac{\delta_k + \gamma_k}{2} - \lambda_m^{(2)} u - \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m, k = \overline{1, N_2})$$

$$l_{1k}(t) = l_1 \left( \lambda_k^{(1)} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right); \quad (k = \overline{1, N_1}; t \in (-1, 1))$$

$$l_{2m}(t) = l_2 \left( \lambda_m^{(2)} t + \frac{\delta_m + \gamma_m}{2} \right); \quad (m = \overline{1, N_2}; t \in (-1, 1))$$

$$\lambda_m^{(1)} = (\beta_m - \alpha_m)/2, \quad (m = \overline{1, N_1}); \quad \lambda_k^{(2)} = (\delta_k - \gamma_k)/2, \quad (k = \overline{1, N_2}),$$

а условие (9), (10) – в следующие условия:

$$\int_{-1}^1 \varphi_k(u) du = 0; \quad (k = \overline{1, N_1});$$

$$\int_{-1}^1 \psi_k(u) du = \tilde{P}_k; \quad \left( \tilde{P}_k = \frac{2P_k}{l(\delta_k - \gamma_k)(G_+ + G_-)} \right); \quad (k = \overline{1, N_2}). \quad (16)$$

К системе СИУ (15) при условиях (16) применим метод решения СИУ, изложенный в [9–11]. С этой целью полагаем

$$\varphi_k(t) = \frac{x_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (|t| < 1, k = \overline{1, N_1}); \quad \psi_k(t) = \frac{y_k(t)}{\sqrt{1-t^2}} \quad (|t| < 1, k = \overline{1, N_2}), \quad (17)$$

где  $x_k(t)$  и  $y_k(t)$  – функции, принадлежащие гильбертовскому классу функции на отрезке  $[-1, 1]$ , а затем выберем произвольное натуральное число  $M$ . Далее, следуя известной процедуре [9], систему (15) при условиях (16) сведём к следующей системе линейных алгебраических уравнений (ЛАУ):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{x_k(u_n)}{u_n - t_r} + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M K_{km}^{(1)}(t_r, u_n) x_m(u_n) - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M K_{km}(t_r, u_n) x_m(u_n) - \\ - \frac{\mu + 1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M M_{km}^{(2)}(t_r, u_n) y_m(u_n) = l_{1k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N_1}; r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{\mu}{M(\mu + 1)} \sum_{m=1}^{N_1} \sum_{n=1}^M M_{km}^{(1)}(t_r, u_n) x_m(u_n) + \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M \frac{y_k(u_n)}{u_n - t_r} + \\ + \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M K_{km}^{(2)}(t_r, u_n) y_m(u_n) - \\ - \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{N_2} \sum_{n=1}^M Q_{km}(t_r, u_n) y_m(u_n) = l_{2k}(t_r); \quad (k = \overline{1, N_2}; r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{n=1}^M x_k(u_n) = 0; \quad (k = \overline{1, N_1}), \quad \frac{\pi}{M} \sum_{n=1}^M y_k(u_n) = \tilde{P}_k; \quad (k = \overline{1, N_2}), \end{array} \right.$$

откуда определяются неизвестные  $\{x_k(u_n)\} (k = \overline{1, N_1}; n = \overline{1, M})$  и  $\{y_k(u_n)\} (k = \overline{1, N_2}; n = \overline{1, M})$ . Здесь

$$u_n = \cos\left(\frac{2n-1}{2M}\pi\right); \quad (n = \overline{1, M}), \quad t_r = \cos\left(\frac{\pi r}{M}\right); \quad (r = \overline{1, M-1}) \quad (18)$$

– чебышевские узлы, т.е. корни уравнений  $T_M(u) = 0$ ,  $U_{M-1}(t) = 0$  соответственно, где  $T_M(u)$  и  $U_{M-1}(t)$  – многочлены Чебышева первого и второго родов соответственно.

Определим КИН в концевых точках  $a_k, b_k$  трещин  $(a_k; b_k)$  ( $k = \overline{1, N_1}$ ) в антиплоской задаче теории упругости. Если в известных формулах для КИН однородного тела в случае антиплоской деформации [12] модуль сдвига заменить приведённым модулем сдвига, то для КИН кусочно-однородного тела получим следующие формулы [13]:

$$K_{III}(a_k) = \frac{G_+}{1+\mu} \lim_{r \rightarrow a_k+0} \sqrt{2\pi(r-a_k)} \varphi(r); \quad (19)$$

$$K_{III}(b_k) = -\frac{G_+}{1+\mu} \lim_{r \rightarrow b_k-0} \sqrt{2\pi(b_k-r)} \varphi(r). \quad (\mu = G_+/G_-)$$

После преобразования формулы (17), в соответствии с (12), и после перехода к переменной  $t$  будем иметь

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2a_k}(1+\mu)} \sqrt{\ln\left(\frac{b_k}{a_k}\right)} x_k(-1); \quad (20)$$

$$K_{III}^0(b_k) = -\frac{\sqrt{l}}{\sqrt{2b_k}(1+\mu)} \sqrt{\ln\left(\frac{b_k}{a_k}\right)} x_k(1); \quad (k = \overline{1, N_1}),$$

где введены безразмерные КИН:

$$K_{III}^0(a_k) = \frac{K_{III}(a_k)}{\sqrt{\pi l G_+}}; \quad K_{III}^0(b_k) = \frac{K_{III}(b_k)}{\sqrt{\pi l G_+}}; \quad (k = \overline{1, N_1}).$$

Входящие в (18) значения  $x_k(\pm 1)$  функции  $x_k(t)$  определяются при помощи интерполяционного многочлена Лагранжа по чебышевским узлам (16) и выражаются формулами [9]:

$$x_k(1) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (-1)^{n+1} x_k(u_n) \operatorname{ctg}\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right); \quad (21)$$

$$x_k(-1) = \frac{1}{M} \sum_{n=1}^M (-1)^{M+n} x_k(u_n) \operatorname{tg}\left(\frac{2n-1}{4M}\pi\right); \quad (k = \overline{1, N_1}).$$

Далее раскрытие  $k$ -той трещины  $(a_k, b_k)$  определяется по формуле

$$w_k(r) = \int_{a_k}^r \varphi(r_0) dr_0; \quad (a_k \leq r \leq b_k; k = \overline{1, N_1}),$$

которая при помощи (12), (14) и (17) преобразуется к виду

$$w_k^0(t) = \ln \sqrt{\frac{b_k}{a_k} \int_{-1}^t \frac{x_k(u) du}{\sqrt{1-u^2}}} \quad (-1 \leq t \leq 1; k = \overline{1, N_1}), \quad (22)$$

причем,  $w_k^0(\pm 1) = 0$ . Здесь введено безразмерное раскрытие трещины

$$w_k^0(t) = l^{-1} w_k \left[ l \exp \left( \frac{\beta_k - \alpha_k}{2} t + \frac{\beta_k + \alpha_k}{2} \right) \right] \quad (k = \overline{1, N_1})$$

Используя соответствующую квадратурную формулу, из (22) будем иметь

$$w_k^0(t) = \frac{\pi}{M} \ln \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} \sum_{u_n \leq t} x_k(u_n) \quad (k = \overline{1, N}) \quad (23)$$

отсюда

$$w_k^0(t_r) = \frac{\pi}{M} \ln \sqrt{\frac{b_k}{a_k}} \sum_{u_n \leq t_r} x_k(u_n) \quad (r = \overline{1, M-1}) \quad (24)$$

Таким образом, безразмерное раскрытие  $k$ -той трещины можно вычислить по (23) или по (24).

Далее рассмотрим частный случай, в котором на линии соединения разнородных клиньев содержатся трещина и абсолютно жёсткое тонкое включение,  $L = L_1 \cup L_2$ ,  $L_1 = (a_1, b_1)$ ,  $L_2 = (c_1, d_1)$ . Предположим, что на свободной грани клина нагрузки отсутствуют  $f_+(r) = 0$ , а на берегах щелей действуют равные между собой напряжения постоянных интенсивностей  $\tau_+^{(1)}(r) = \tau_-^{(1)}(r) = \tau_0 = \text{const}$  ( $r \in L_1$ ).

В рассмотренном частном случае введём для удобства дальнейших расчётов и численного анализа следующие вспомогательные параметры и величины:  $l = b_1 - a_1 = d_1 - c_1$ ;  $\rho = a_1/l$ ;  $k = c_1/l$ ; ( $l = \text{const}$ ). При этом будем иметь

$$\lambda_1^{(1)} = (\beta_1 - \alpha_1)/2 = \ln \sqrt{(1+\rho)/\rho}; \quad \lambda_1^{(2)} = (\delta_1 - \gamma_1)/2 = \ln \sqrt{(1+k)/k};$$

$$e_1 = (\beta_1 + \alpha_1)/2 = \ln \sqrt{\rho(1+\rho)}; \quad e_2 = (\delta_1 + \gamma_1)/2 = \ln \sqrt{k(1+k)};$$

В этом случае по известной численно-аналитической методике [9], как и в общем случае, из системы (8) и условий на щели  $L_1$  и включения  $L_2$ , из (9) и (10) получаем следующую систему ЛАУ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{K}(t_r - u_m) \right] x_1(u_m) - \frac{\mu+1}{M} \times \\ \times \sum_{m=1}^M \tilde{M}_1(t_r, u_m) y_1(u_m) = - \frac{(\mu+1)^2 e^{\lambda_1^{(1)} t_r + e_1}}{\mu} \tilde{\tau}_0; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \frac{\mu}{M(\mu+1)} \sum_{m=1}^M \tilde{M}_2(t_r, u_m) x_1(u_m) + \frac{1}{M} \times \\ \times \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{Q}(t_r - u_m) \right] y_1(u_m) = 0; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\ \sum_{m=1}^M x_1(u_m) = 0; \quad \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M y_1(u_m) = \frac{\tilde{P}}{\lambda_1^{(2)}}, \end{array} \right. \quad (25)$$

где

$$\tilde{K}(t-u) = \lambda_1^{(1)} \int_0^\infty \frac{\mu \text{th}(\lambda \alpha) [1 - \text{th}(\lambda \beta)] - [1 - \text{th}(\lambda \alpha)]}{\mu \text{th}(\lambda \alpha) \text{th}(\lambda \beta) + 1} \sin(\lambda \lambda_1^{(1)}(t-u)) d\lambda;$$

$$\tilde{M}_1(t, u) = \lambda_1^{(2)} \int_0^\infty \frac{\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) - 1}{\mu\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) + 1} \cos[\lambda(\lambda_1^{(1)}t + e_1 - \lambda_1^{(2)}u - e_2)] d\lambda;$$

$$\tilde{M}_2(t, u) = \lambda_1^{(1)} \int_0^\infty \frac{\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) - 1}{\mu\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) + 1} \cos[\lambda(\lambda_1^{(2)}t + e_2 - \lambda_1^{(1)}u - e_1)] d\lambda;$$

$$\tilde{Q}(t - u) = \lambda_1^{(2)} \int_0^\infty \frac{\mu\text{th}(\lambda\beta)[1 - \text{th}(\lambda\alpha)] - [1 - \text{th}(\lambda\beta)]}{\mu\text{th}(\lambda\alpha)\text{th}(\lambda\beta) + 1} \sin[\lambda\lambda_1^{(2)}(t - u)] d\lambda;$$

$$\tilde{P} = P_1 / [l(G_+ + G_-)]; \quad \tilde{\tau}_0 = \tau_0 / (G_+ + G_-). \quad (-1 < t < 1)$$

Далее, для простоты примем  $\tilde{\tau}_0(t) = 0.01$ ,  $\tilde{P} = 0.01$ . Тогда, решая систему (25) при различных значениях параметров  $\mu, \alpha, \beta, \rho, k$  и учитывая (21), находим соответствующие значения КИН в концевых точках трещины по формулам (20) и соответствующее раскрытие трещины по формуле (24).

Вычисленные значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$  и  $K_{III}^0(b_1)$  в зависимости от изменения параметра  $\alpha \in (0, \pi]$  при фиксированных значениях остальных параметров:  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 4$ ,  $k = 2$ ,  $\beta = \pi/3$  (здесь включение находится на левой стороне трещины) приведены в табл.1. Данные этой таблицы, которые характерны для этих КИН и при других фиксированных значениях параметров  $\mu, \rho, k, \beta$ , показывают, что значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$ ,  $K_{III}^0(b_1)$  с возрастанием параметра  $\alpha$  уменьшаются, притом, значение  $K_{III}^0(a_1)$  всегда больше значения  $K_{III}^0(b_1)$ .

Таблица 1

$\alpha$	$\pi/30$	$\pi/20$	$\pi/15$	$\pi/10$	$\pi/6$	$\pi/4$
$K_{III}^0(a_1)$	0.07664	0.07289	0.07127	0.06986	0.06882	0.06829
$K_{III}^0(b_1)$	0.07540	0.07187	0.07041	0.06925	0.06846	0.06805

$\alpha$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	$\pi$
$K_{III}^0(a_1)$	0.06802	0.06777	0.06766	0.06762	0.06760	0.06756
$K_{III}^0(b_1)$	0.06783	0.06762	0.06753	0.06750	0.06747	0.06744

В табл.2 приведены вычисленные по формулам (20) значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$  и  $K_{III}^0(b_1)$  в зависимости от изменения параметра  $k$  (при возрастании этого параметра полагается, что включение находится на левой стороне трещины и приближается к неподвижной трещине, длина которой равна длине включения) при фиксированных значениях параметров  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 10$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\beta = \pi/3$ . Из этой таблицы видно, что с возрастанием  $k$  значение КИН возрастает. При этом, значение КИН  $K_{III}^0(a_1)$  всегда больше значения  $K_{III}^0(b_1)$ .

Таблица 2

$k$	0.1	0.5	1	2	4	6
$K_{III}^0(a_1)$	0.06677	0.06682	0.06688	0.06700	0.06726	0.06747
$K_{III}^0(b_1)$	0.06676	0.06680	0.06686	0.06697	0.06721	0.06741

$k$	7	7.5	8	8.2	8.5	8.8
$K_{III}^0(a_1)$	0.06754	0.06757	0.06759	0.06760	0.06760	0.06761
$K_{III}^0(b_1)$	0.06748	0.06751	0.06753	0.06754	0.06755	0.06756

В табл.3 приведены значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$  и  $K_{III}^0(b_1)$  в зависимости от изменения параметра  $\mu$  при фиксированных значениях остальных параметров:  $\rho = 4$ ,  $k = 2$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\beta = \pi/3$ . При этом, характер изменения значения КИН не зависит от других указанных значений фиксированных параметров.

Таблица 3

$\mu$	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1
$K_{III}^0(a_1)$	0.07910	0.03145	0.02190	0.01780	0.0155	0.01471
$K_{III}^0(b_1)$	0.07891	0.03132	0.02179	0.01770	0.01542	0.01462

$\mu$	1.5	2	5	8	10	15
$K_{III}^0(a_1)$	0.01230	0.01108	0.00884	0.00825	0.00804	0.00776
$K_{III}^0(b_1)$	0.01221	0.01100	0.00878	0.00820	0.00801	0.00773

Очевидно, что значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$ ,  $K_{III}^0(b_1)$  с возрастанием параметра  $\mu$  уменьшаются. При этом, как и в вышеприведённых случаях, значение КИН  $K_{III}^0(a_1)$  всегда больше  $K_{III}^0(b_1)$ .

В заключение рассмотрим ещё один частный случай задачи, когда на берегах щели в средних точках действуют равные между собой сосредоточенные силы:

$$\tau_+^{(1)}(r) = \tau_-^{(1)}(r) = \tau(r) = P_0 \delta\left(r - (a_1 + b_1)/2\right), \quad (r \in (a_1, b_1)) \quad (26)$$

где  $\delta(r)$  – известная дельта-функция Дирака. В этом случае соответствующая система ЛАУ примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{K}(t_r - u_m) \right] x_1(u_m) - \frac{\mu+1}{M} \times \\
\quad \times \sum_{m=1}^M \tilde{M}_1(t_r, u_m) y_1(u_m) = 0; \quad (r = \overline{1, M-1}; r \neq M/2) \\
\frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{-1}^1 \left[ \frac{1}{u_m - t} - \tilde{K}(t - u_m) \right] e^{\lambda_1^{(1)} t + e_1} dt \right\} x_1(u_m) - \frac{\mu+1}{M} \times \\
\quad \times \sum_{m=1}^M \left\{ \int_{-1}^1 \tilde{M}_1(t, u_m) e^{\lambda_1^{(1)} t + e_1} dt \right\} y_1(u_m) = - \frac{(\mu+1)^2 (2\rho+1)}{2\mu\lambda_1^{(1)}} \tilde{P}_0; \\
\frac{\mu}{M(\mu+1)} \sum_{m=1}^M \tilde{M}_2(t_r, u_m) x_1(u_m) + \frac{1}{M} \times \\
\quad \times \sum_{m=1}^M \left[ \frac{1}{u_m - t_r} - \tilde{Q}(t_r - u_m) \right] y_1(u_m) = 0; \quad (r = \overline{1, M-1}) \\
\sum_{m=1}^M x_1(u_m) = 0; \quad \frac{\pi}{M} \sum_{m=1}^M y_1(u_m) = \frac{\tilde{P}}{\lambda_1^{(2)}}, \quad \left( \tilde{P}_0 = \frac{P_0}{G_+ + G_-} \right)
\end{array} \right. \quad (27)$$

Здесь  $M$  – произвольное чётное натуральное число. Отметим, что второе уравнение системы (27) получается из первого уравнения системы (8) с помощью интегрирования на промежутке  $(a_1, b_1)$  в соответствии с (26).

Принимая  $\tilde{P}_0 = 0.1$ ,  $\tilde{P} = 0.1$  и решая систему (27) при различных значениях параметров  $\mu, \alpha, \beta, \rho, k$ , находим соответствующие значения КИН в концевых точках трещины и раскрытие трещины.

В табл.4 приведены значения КИН  $K_{III}^0(a_1)$  и  $K_{III}^0(b_1)$  в зависимости от изменения параметра  $k$  при фиксированных значениях остальных параметров:  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 10$ ,  $\alpha = \pi/6$ ,  $\beta = \pi/3$ . Из сопоставления значений табл. 2 и 4 следует, что поведение КИН одинаково в указанных случаях.

Таблица 4

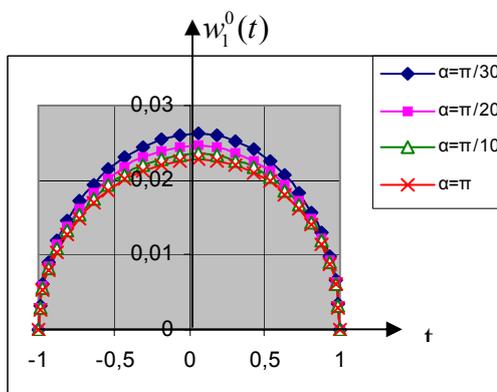
$k$	0.1	0.5	1	2	4	6
$K_{III}^0(a_1)$	0.00147	0.00196	0.00256	0.00382	0.00639	0.00849
$K_{III}^0(b_1)$	0.00138	0.00182	0.00236	0.00351	0.00584	0.00784

$k$	7	7.5	8	8.2	8.5	8.8
$K_{III}^0(a_1)$	0.00921	0.00948	0.00968	0.00975	0.00983	0.00989
$K_{III}^0(b_1)$	0.00857	0.00885	0.00908	0.00916	0.00926	0.00934

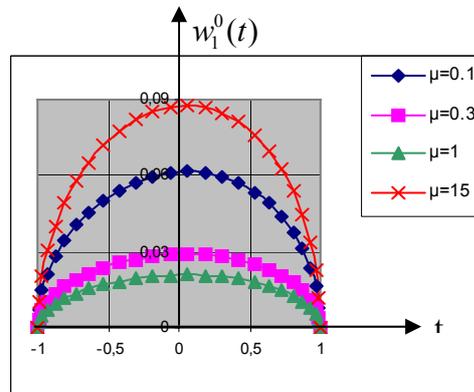
Вычисленные по формуле (24) безразмерные раскрытия трещины  $w_1^0(t)$  для различных значений параметра  $\alpha$  и при фиксированных значениях  $\mu = 0.5$ ,  $\rho = 4$ ,  $k = 2$ ,  $\beta = \pi/3$  графически изображены на фиг.1. По мере возрастания  $\alpha$  эти графики спускаются вниз, приближаясь к предельной кривой при

$\alpha = \pi$ . На фиг.2 изображены безразмерные раскрытия трещины  $w_1^0(t)$  для различных значений параметра  $\mu$  при фиксированных значениях  $\rho = 4, k = 2, \alpha = 6, \beta = \pi/3$ . Из фиг.2 видно, что раскрытие трещины минимальное, когда клин однородный.

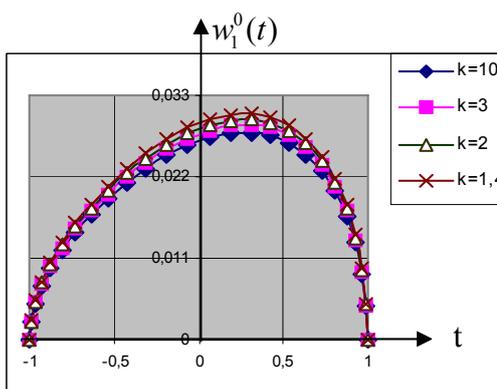
На фиг. 3 и 4 изображены графики безразмерных раскрытий трещины  $w_1^0(t)$  для различных значений параметров  $k$  ( $\alpha = \pi/6, \beta = \pi/3, \rho = 0.3, \mu = 0.5$ ) и  $\rho$  ( $k = 0.3, \mu = 0.5, \alpha = \pi/6, \beta = \pi/3$ ), соответствующие случаям, когда берега трещины нагружены распределениями и сосредоточенными силами соответственно. В обоих случаях раскрытие трещин увеличивается с уменьшением параметров  $k$  и  $\rho$  соответственно. При этом, в первом случае по мере уменьшения параметра  $k$  включение приближается к неподвижной трещине. А во втором случае, по мере уменьшения параметра  $\rho$  трещина приближается к неподвижному включению.



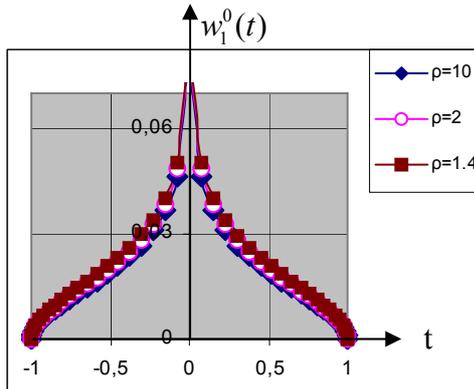
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

## ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г.П. Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
2. Попов Г.Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подключений. М.: Наука, 1982. 344с.
3. Александров В.М., Мхитарян С.М. Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М: Наука, 1983. 488с.
4. Nakobyan V.N. The mixed problem for anisotropic compound wedge with crack. // In collection of papers «Modern Problems of deformable bodies Mechanics», dedicated to the memory of Prof. P.S. Theocaris, Yerevan, published by «Gitutyun» NAS RA, 2005, pp.114-120.
5. Акопян В.Н. Антиплоское напряжённое состояние составного анизотропного клина, содержащего трещину и абсолютно жёсткое включение. // В сб. «Современные проблемы теории контактных взаимодействий». Ереван: Изд. НАН РА, 1996. С. 45–50.
6. Мкртчян М.М. О напряжённом состоянии упругого кусочно-однородного клина, содержащего на линии смятия систему щелей и абсолютно жёстких тонких включений. // В сб.: «Труды международной школы-конференции молодых ученых». Агавнадзор.– Ереван, 2009, с.276–281.
7. Mkhitarayan S.M., Bardzokas D.I., Gevorgyan S.Kh. About a stress deformation condition of a piecewise-uniform wedge with a system of collinear cracks at an antiplane deformation. // Mathematical Problems in Engineering, USA, 2005:2 (2005), pp.245–268.
8. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л.: Наука, 1968. 402 с.
9. Панасюк В.В., Саврук М.П., Дацышин А.П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев: Наукова думка, 1976. 443с.
10. Erdogan F., Gupta G.D., Cook T.S. The numerical solutions of singular integral equations. // Methods of Analysis and solution of Crack Problems; pp. 368-425. Noordhoff Intern. Publ. Leyden. 1973.
11. Theocaris P.S., Iokamidis N.I. Numerical Integration Methods for the solution of singular Integral Equations. // Quart. Appl. Math. 1977. Vol XXXV. №1. Pp.173-185.
12. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами.– Механика разрушения и прочность материалов. /Спр. пособие под общей редакцией В.В. Панасюка. Т.2. Киев: Наукова думка, 1988. 619с.
13. Мкртчян М.С. Напряжённое состояние упругого кусочно-однородного пространства с трещинами или абсолютно жёсткими включениями при антиплоской и плоской деформациях. – Канд. дисс.–Ереван: Институт механики НАН РА. 2001.

### Сведения об авторах:

#### **Мкртчян Мгер Мушегович**

Научный сотрудник Института механики НАН РА,  
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>,  
Институт механики НАН Армении  
Тел: (37410)-43-16-52, E-mail: [mher\\_1982@mail.ru](mailto:mher_1982@mail.ru)

#### **Мкртчян Мушег Серёжаевич**

Канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Института механики НАН РА.  
Адрес: Армения, 0019, Ереван, пр. Маршала Баграмяна, 24<sup>б</sup>,  
Институт механики НАН Армении  
Тел: (37410)-43-16-52, 098-80-19-56, E-mail: [muscheg-mkrtchyan@rambler.ru](mailto:muscheg-mkrtchyan@rambler.ru)

Поступила в редакцию 08.07.2011